ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 58.

DER GANZEN REIHE 363. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

LEIPZIG, 1919.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

S
C.H.
DUBLIN
COLLEGE
LIBRARY

Anon Fund
Q.E.S.
3 00

WITHDRAWN
from
COLLEGE

Inhalt.

Vierte Folge. Band 58.

Erstes Heft. Seite

1. H. Kafka. Zur vierdimensionalen Tensoranalysis 1
2. W. Steubing. Spektrale Intensitätsverschiebung und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein magnetisches Feld . . . 55

Ausgegeben am 17. Januar 1919.

Zweites Heft.

1. W. Arkadiew. Über die Absorption elektromagnetischer Wellen an zwei parallelen Drähten 105
2. R. Ambronn. Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron—Kalk—Silikatgläsern 139
3. Max Berek. Über den senkrechten Durchgang linear polarisierter ebener Wellen durch planparallele Platten durchsichtiger inaktiver Kristalle 165
4. E. Ehrenhaft und D. Konstantinowsky. Bemerkung zum Nachtrage der R. Bärschen Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität 199

Ausgegeben am 14. Februar 1919.

Drittes Heft.

1. Gregor Huch. Versuch einer Theorie des Kanalstrahlenlichtes. (Zweite Abhandlung.) 201
2. L. Vegard. Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. Bemerkungen zu den Äußerungen des Hrn. C. Schaefer und Frl. Martha Schubert 291

Ausgegeben am 25. Februar 1919.

Viertes Heft.

Seite

1. Edgar Meyer. Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld 297
2. K. W. Meissner. Zur Kenntnis des Neonspektrums 333
3. J. Sommer. Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades 375

Ausgegeben am 14. März 1919.

Fünftes Heft.

1. A. Becker. Über die Bestimmung von Elektronen-Austrittsgeschwindigkeiten 393
2. R. J. Humm. Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie 474
3. W. Jaeger und H. von Steinwehr. Über den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents 487

Ausgegeben am 4. April 1919.

Sechstes Heft.

1. G. Borelius. Zur Elektronentheorie des Magnetismus und des Halleffektes 489
2. Jan Weyssenhoff. Über die Reflexion von Quecksilbermolekülen an Gold bei tiefen Temperaturen 505
3. A. March. Zur Thermodynamik der Kapillarität 515
4. Walter Dällenbach. Die allgemein kovarianten Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern ponderabler Materie vom Standpunkt der Elektronentheorie . . . 523
5. G. Quincke. Elektrische Zerstäubung von geschmolzenem Siegellack 549
6. Paul S. Epstein. Theoretisches über den Starkeffekt in der Fowlerschen Heliumserie 558

Ausgegeben am 25. April 1919.

Siebentes Heft.

1. J. Holtsmark. Über die Verbreiterung von Spektrallinien . 577
2. O. Lehmann. Über die Beziehungen zwischen mechanischer und chemischer Verdrehung der Struktur flüssiger Kristalle . 631

Ausgegeben am 9. Mai 1919.

Achtes Heft.

Seite

1. **Fritz Reiche.** Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs 657
2. **M. v. Laue.** Unter welchen Bedingungen kann man von einem Elektronengas reden? 695
3. **J. Stark und O. Hardtke.** Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IX. Vergleich von Dupletserien 712
4. **J. Stark.** Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. X. Zusammenhang der Serien eines Systems 723
5. **E. Brose.** Stärke des elektrischen Feldes und Zerlegung der Wasserstofflinien vor der Kathode des Glimmstroms 731
6. **E. Grüneisen.** Die thermische Ausdehnung regulär kristallisierender fester Körper. (Zweite Mitteilung.) 753
7. **F. Henning.** Zur Verdampfungswärme des Wassers 759

Ausgegeben am 27. Mai 1919.

1919. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58. 7

1. *Zur vierdimensionalen Tensoranalysis;* *von H. Kafka.*

1. Die bisherigen Analysen der als geometrische Größen bezeichneten Invarianten im R_4, die der Form nach den im R_3 gebräuchlichen nachgebildet sind, operieren direkt mit den geometrischen Größen. Diese Rechnungsmethoden haben den Nachteil, daß bei Multiplikationen mehrerer Faktoren eine Assoziationsänderung im allgemeinen auch eine Änderung der multiplikativen Verknüpfung im Gefolge hat, wodurch ihre Anwendung ziemlich erschwert wird.

Die genannte Schwierigkeit erscheint in der von Hrn. Prof. Einstein für die allgemeine Relativitätstheorie (im folgenden a. R. T. bezeichnet) entwickelten Tensoranalysis[1]) vermieden, die im Gegensatz zu den eingangs erwähnten Rechnungsmethoden mit den Bestimmungsgrößen operiert; außerdem hat diese Analysis den großen Vorzug, daß sie die einheitliche Behandlung von geometrischen Größen beliebig hoher Ordnung ermöglicht. Es läßt sich auf dem von Einstein gewiesenen Wege ein mathematisches Rüstzeug erhalten, welches den zu behandelnden Problemen angepaßt ist und Einfachheit mit Allgemeinheit verbindet.

Wenn es sich nur um Probleme der speziellen Relativitätstheorie (im folgenden sp. R. T. bezeichnet) handelt, läßt sich die Einsteinsche Tensoranalysis wesentlich vereinfachen. Im folgenden soll für diesen Fall der Aufbau einer Tensoranalysis skizziert werden, in welcher die symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren eine ihrer Bedeutung entsprechende besondere Berücksichtigung finden.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch einige Worte über die Bezeichnungsweise verlieren, deren Einheitlichkeit bekanntlich sehr viel zu wünschen übrig läßt; dies mag zum

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**. p. 776. 1916.

Teil davon kommen, daß es sich um ein noch in der Entwicklung befindliches mathematisches Gebiet handelt, welches von sehr verschiedenen Seiten in Angriff genommen wurde. Gerade deshalb wäre aber eine gewisse Zurückhaltung bei der Festlegung von Bezeichnungen am Platze und sollten diese zumindest so allgemein als möglich gewählt werden. Von diesem Standpunkte aus erscheint mir die Bezeichnung „Tensor" für geometrische Größen beliebig hoher Ordnung empfehlenswerter als die Bezeichnung „Affinor", welche ursprünglich für geometrische Größen zweiter Ordnung wegen ihres Zusammenhanges mit affinen Transformationen verwendet wurde. Für den Tensor 1. Ordnung mag die Bezeichnung „Vektor" als altvertraut beibehalten werden. Die Bezeichnung „Tensor" wird von vielen Seiten für symmetrische geometrische Größen verwendet, die ich mit Einstein als „symmetrische Tensoren" bezeichnen will; ihr Gegenstück soll „antisymmetrischer Tensor" oder kürzer „Antitensor" (nach Budde[1]) heißen.

2. Ein Tensor 1. Ordnung oder Vierervektor ist der Inbegriff von 4 Größen, welche gewisse Transformationseigenschaften besitzen. In der sp. R. T. läßt sich ein Vierervektor geometrisch etwa unter dem Bilde einer gerichteten Strecke vorstellen, wobei die 4 Größen die Projektionen dieser Strecke auf die Achsenrichtungen eines orthogonalen vierdimensionalen Koordinatensystems bestimmen können. In der a. R. T. ist eine solche geometrische Deutung nicht möglich; den 4 Größen entsprechen dort Parameter dreidimensionaler Räume, welche durch ihren Schnitt einen Punkt eines vierdimensionalen Gaußischen Koordinatensystems bestimmen.

Wenn wir uns einen Vierervektor der sp. R. T. unter dem Bilde einer gerichteten Strecke vorstellen und die 4 Größen als Projektionen dieser Strecke deuten, so ändern sich letztere bei einer Drehung des Bezugssystems (welche bekanntlich die der sp. R. T. eigentümliche Transformationsart ist) nach dem Gesetze

$$A_i = p_{i1} A_1' + p_{i2} A_2' + p_{i3} A_3' + p_{i4} A_4' = \sum_r p_{ir} A_r' \quad (r = 1,2,3,4).$$

1) E. Budde, Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. p. 62. Vieweg, Braunschweig 1914.

Die Verwendung des Summenzeichens läßt sich durch die Festsetzung vermeiden, daß über paarweise auftretende Zeiger (im folgenden „Summenzeiger" genannt) von 1—4 zu summieren ist. Diese von Einstein herrührende Bezeichnungsweise erweist sich in der Folge als sehr fruchtbar. Wir schreiben also

$$A_i = p_{ir} A_r' , \tag{1}$$

wobei die Determinante

$$|p_{ir}| = p$$

Transformationsdeterminante genannt wird. Die symbolische Bezeichnung A_i wird je nach Bedarf für den Vierervektor selbst oder seine Bestimmungsgrößen verwendet.

Von der geometrischen Deutung abgesehen, wird durch das Transformationsgesetz (1) zum Ausdruck gebracht, daß 4 Größen A_i durch 4 andere (A_r') ersetzt werden können, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten. Durch den Inbegriff von 4 Größen, welche das Transformationsgesetz (1) erfüllen, wollen wir nun ganz allgemein einen Tensor 1. Ordnung oder Vierervektor definieren. Über den Zusammenhang der Tensorbildung mit der Transformationsart wird im Abschnitt 4 die Rede sein.

Für die Addition und Subtraktion von Vierervektoren gelten die Gesetze

$$\begin{cases} C_i = A_i + B_i, \\ D_i = A_i - B_i, \end{cases} \tag{2}$$

welche je vier Gleichungen zusammenfassen.

3. *Äußere Multiplikation von 2 Vierervektoren; Tensoren 2. Ordnung.* — Aus den Bestimmungsgrößen zweier Vierervektoren lassen sich durch eine multiplikative Verknüpfung, die sogenannte „äußere Multiplikation" (Bezeichnung nach Einstein bzw. Grassmann) die Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung bilden. Die äußere Multiplikation zweier Vierervektoren A_i und B_k besteht darin, daß die 16 möglichen Produkte $A_i B_k$ der Bestimmungsgrößen beider Vektoren gebildet werden, für welche Produkte das Transformationsgesetz

$$A_i B_k = p_{ir} p_{ks} A_r' A_s' \tag{3}$$

gilt. In dem Ausdruck auf der rechten Seite treten zwei Paare gleicher Zeiger auf und ist entsprechend der früheren Festsetzung über die 16 Variationen zu zwei der Elemente 1—4 zu summieren.

Wir wollen nun den Inbegriff von 16 Größen C_{ik}, welche das Transformationsgesetz

$$C_{ik} = p_{ir}\, p_{ks}\, C_{rs}' \tag{3a}$$

befolgen, einen Tensor 2. Ordnung nennen. Durch (3a) wird ausgedrückt, daß 16 Größen C_{ik} durch 16 andere (C_{rs}') ersetzt werden können, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten.

Die allgemeinste Größe dieser Art läßt sich durch die Summe von 4 äußeren Produkten nach dem Typus (3) darstellen.

Was die geometrische Deutung anlangt, läßt sich ein Tensor 2. Ordnung unter dem Bilde einer vierdimensionalen Fläche zweiter Ordnung vorstellen. Diese geometrische Deutung ist aber in der allgemeinen Tensoranalysis ziemlich unwesentlich.

Für die Addition und Subtraktion von Tensoren 2. Ordnung gelten die Gesetze

$$\begin{cases} C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}\,, \\ D_{ik} = A_{ik} - B_{ik}\,. \end{cases} \tag{4}$$

4. *Äußere Multiplikationen, die zu Tensoren höherer Ordnung führen.* — Bei der äußeren Multiplikation von 3 Vierervektoren A_i, B_k und C_l bilden wir die 64 möglichen Produkte $A_i B_k C_l$ der Bestimmungsgrößen dieser Vektoren, für welche Produkte das Transformationsgesetz

$$A_i B_k C_l = p_{ir}\, p_{ks}\, p_{lt}\, A_r' B_s' C_t' \tag{5}$$

gilt. Auf der rechten Seite von (5) ist wegen des Auftretens dreier Paare von Summenzeigern über die 64 Variationen zu drei der Elemente 1—4 zu summieren.

Wir bezeichnen nun entsprechend den früheren Ausführungen als Tensor 3. Ordnung den Inbegriff von 64 Größen D_{ikl}, welche das Transformationsgesetz

$$D_{ikl} = p_{ir}\, p_{ks}\, p_{lt}\, D_{rst}' \tag{5a}$$

erfüllen. Die allgemeinste Größe dieser Art läßt sich wieder aus 4 äußeren Produkten nach dem Typus (5) zusammensetzen.

Auf einen Tensor 3. Ordnung führt auch das äußere Produkt

$$A_i B_{kl}$$

eines Vierervektors und eines Tensors 2. Ordnung.

Die äußeren Produkte

$$A_i B_k C_l D_m, \quad A_i B_{klm}, \quad A_{ik} B_{lm}$$

führen zu Tensoren 4. Ordnung mit 256 Bestimmungsgrößen. Auf die gleiche Weise lassen sich durch äußere Multiplikation Tensoren beliebig hoher Ordnung bilden.

Zusammenfassend können wir demnach Tensoren als den Inbegriff einer Anzahl von Bestimmungsgrößen definieren, welche durch eine gleiche Anzahl anderer ersetzt werden können, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der der Tensorbildung zugrunde gelegten Transformationsdeterminante auftreten. Diese Definition ist vielleicht etwas einseitig, da die Bestimmungsgrößen der Tensoren nur Hilfsmittel für die mathematische Erfassung dieser Gebilde darstellen, während die Tensoren selbst von jedem Bezugssystem unabhängige Invarianten sind.

Zusammenhang der Tensorbildung mit der Transformationsart. — Da zur Definition der Tensoren Transformationsgesetze herangezogen wurden, ist es wohl klar, daß die Transformationsart bei der Tensorbildung eine wesentliche Rolle spielt. Über diese Beziehungen hat Schouten[1]) sehr eingehende Untersuchungen angestellt. Wir könnten z. B. Tensoren 1. Ordnung oder Vierervektoren auch dadurch definieren, daß wir in die Bedingungsgleichung (1) statt der Elemente der Transformationsdeterminante ihre normierten Hauptminoren einführen; derartige Bildungen bezeichnet Einstein als kovariante Tensoren 1. Ordnung oder Vierervektoren zum Unterschied von den kontravarianten, in deren Definitionsgleichung die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten. Aus kovarianten Vierervektoren lassen sich wieder durch äußere Multiplikation kovariante Tensoren beliebig hoher Ordnung bilden.

In der a. R. T. ist diese Unterscheidung durch die in Frage kommenden allgemeineren Transformationsarten be-

1) J. A. Schouten, Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis. B. G. Teubner. Leipzig 1914.

dingt. Je allgemeiner diese sind, umso größere Verschiedenheiten zeigen die möglichen Tensorbildungen. In der sp. R. T. handelt es sich dagegen nur um Drehungen eines orthogonalen vierdimensionalen Koordinatensystems; die Transformationsdeterminante ist dann orthogonal, d. h. ihr Wert ist Eins und die Elemente sind ihren Hauptminoren gleich, so daß der Unterschied zwischen Kontravarianz und Kovarianz verschwindet.

5. *Symmetrische und antisymmetrische Tensoren 2. Ordnung und die ihnen entsprechenden speziellen äußeren Multiplikationen.* — Wenn wir uns die 16 Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung A_{ik} in einer Reihe nebeneinander angeschrieben denken, so lassen sich aus ihnen die Bestimmungsgrößen eines zweiten Tensors A_{ki} zusammenstellen, indem die Bestimmungsgrößen mit ungleichen Zeigern miteinander vertauscht werden. Diese invariante Bildung wird gewöhnlich als Konjugation bezeichnet.

Aus den Bestimmungsgrößen zweier konjugierter Tensoren 2. Ordnung lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion die Bildungen

$$A_{ik} + A_{ki} = \overline{A}_{ik} = \overline{A}_{ki} \tag{6}$$

und

$$A_{ik} - A_{ki} = \underline{A}_{ik} = -\underline{A}_{ki} \tag{7}$$

ableiten. Die erstere ist dadurch charakterisiert, daß ihre Bestimmungsgrößen bei Vertauschung der Zeiger ungeändert bleiben, so daß nur 10 verschieden sind. Die Bezeichnung „verschieden" ist aber im allgemeinen nicht gleichbedeutend mit „unabhängig". Wir wollen derartige Bildungen als symmetrische Tensoren 2. Ordnung bezeichnen und ihre Symbole mit einem oberen Querstrich versehen ($\overline{A}_{ik}$), wenn sie von vornherein symmetrische Eigenschaften besitzen.

Bei der zweiten Bildung ändert die Vertauschung der Zeiger das Vorzeichen der Bestimmungsgrößen, während jene mit gleichen Zeigern verschwinden, so daß nur 6 numerisch verschiedene Bestimmungsgrößen resultieren. Diese Bildungen seien antisymmetrische Tensoren oder Antitensoren 2. Ordnung genannt und ihre Symbole durch fetten Druck (in der Schrift durch Unterstreichung) hervorgehoben ($\underline{A}_{ik}$), wenn sie von vornherein antisymmetrische Eigenschaften besitzen.

Aus (6) und (7) folgt die Zerlegung eines beliebigen Tensors 2. Ordnung in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil:

$$A_{ik} = \tfrac{1}{2}\overline{A}_{ik} + \tfrac{1}{2}\underline{A}_{ik}. \tag{8}$$

Der Nachweis, daß es sich in (6) und (7) um invariante Bildungen handelt, ergibt sich wie folgt. Nach (8a) ist

$$A_{ik} = p_{ir}\,p_{ks}\,A_{rs}' = p_{is}\,p_{kr}\,A_{sr}'$$

(die Vertauschung von *Summenzeigern* ist ohneweiters erlaubt) bzw.

$$A_{ki} = p_{kr}\,p_{is}\,A_{rs}' = p_{ks}\,p_{ir}\,A_{sr}';$$

eine einfache Überlegung zeigt, daß

$$A_{ik} + A_{ki} = \tfrac{1}{2}(p_{ir}\,p_{ks} + p_{kr}\,p_{is})(A_{rs}' + A_{sr}')$$

oder

$$\overline{A}_{ik} = \tfrac{1}{2}(p_{ir}\,p_{ks} + p_{kr}\,p_{is})\,\overline{A}_{rs}'. \tag{9}$$

Andererseits ist

$$A_{ik} - A_{ki} = \tfrac{1}{2}(p_{ir}\,p_{ks} - p_{kr}\,p_{is})(A_{rs}' - A_{sr}')$$

oder

$$\underline{A}_{ik} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} p_{ir} & p_{is} \\ p_{kr} & p_{ks} \end{vmatrix}\,\underline{A}_{rs}'. \tag{10}$$

Die Entwicklung der rechten Seite von (10) nach den Summenzeigern r und s reduziert sich auf 12 Summanden, von denen je 2 gleich sind; es lassen sich demnach die 6 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 2. Ordnung durch 6 andere ersetzen, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten.

Bei dieser Gelegenheit wäre zu bemerken, daß die 6 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 2. Ordnung auch zur Bildung eines „Sechservektors“[1]) herangezogen werden können. In der allgemeinen Tensoranalysis empfiehlt es sich aber, die Einführung von Sechservektoren zu vermeiden und mit den Antitensoren 2. Ordnung zu operieren, welch letztere in den multiplikativen Verknüpfungen wie gewöhnliche Tensoren 2. Ordnung zu behandeln sind.

---

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip. p. 73. Vieweg, Braunschweig 1913.

Im Anschluß an das Vorstehende lassen sich multiplikative Verknüpfungen einführen, welche aus 2 Vierervektoren einen symmetrischen Tensor bzw. einen Antitensor 2. Ordnung erzeugen. Wir wollen die erstere die „äußere symmetrische" (Bezeichnung $\overline{A_i B_k}$), die letztere die „äußere antitensorische Multiplikation" (Bezeichnung $\underline{A_i B_k}$) nennen. Es ist

$$\overline{A_i B_k} = A_i B_k + A_k B_i; \quad \overline{A_i B_k} = \overline{A_k B_i}, \tag{11}$$

bzw.

$$\underline{A_i B_k} = A_i B_k - A_k B_i = \begin{vmatrix} A_i & A_k \\ B_i & B_k \end{vmatrix}; \quad \underline{A_i B_k} = -\underline{A_k B_i}. \tag{12}$$

Durch die in (11) und (12) eingeführte Bezeichnungsweise werden wir in der Folge alle multiplikativen Verknüpfungen gewöhnlicher Tensoren hervorheben, welche auf vollständig symmetrische Tensoren bzw. Antitensoren führen.

Das äußere Produkt zweier Vierervektoren läßt sich entsprechend (8) in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen:

$$A_i B_k = \tfrac{1}{2}\overline{A_i B_k} + \tfrac{1}{2}\underline{A_i B_k}. \tag{13}$$

Es gibt auch spezielle Tensoren 2. Ordnung, welche dadurch charakterisiert sind, daß nur die 4 Bestimmungsgrößen mit gleichen Zeigern von Null verschieden sind. Ein Beispiel einer derartigen Bildung ist der von Einstein eingeführte spezielle Tensor δ_{ik}, dessen nicht verschwindende Bestimmungsgrößen sämtlich gleich Eins sind:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ wenn } i = k, \\ 0 \text{ wenn } i \neq k. \end{cases} \tag{14}$$

Mit Benutzung von δ_{ik} läßt sich ein äußeres symmetrisches Produkt zweier Vierervektoren folgendermaßen zerlegen:

$$\tfrac{1}{2}\overline{A_i B_k} = \tfrac{1}{4}\delta_{ik} A_s B_s + (\tfrac{1}{2}\overline{A_i B_k} - \tfrac{1}{4}\delta_{ik} A_s B_s). \tag{15}$$

Das erste Glied der rechten Seite von (15) ist ein spezieller Tensor von der gleichen Art wie δ_{ik}, nur sind seine 4 nicht verschwindenden Bestimmungsgrößen gleich

$$\tfrac{1}{4}(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4);$$

diese Bildung entspricht, von dem Faktor $\frac{1}{4}$ abgesehen, dem „inneren Produkt" der Vierervektoren A_i und B_k (siehe Ab-

schnitt 10). — Der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (15) führt auf einen symmetrischen Tensor, welcher die Eigenschaft besitzt, daß seine Verjüngung (vgl. Abschnitt 9) verschwindet. Schouten[1]) bezeichnet die analoge Bildung im R_3 als „Deviator" und die ihr entsprechende multiplikative Verknüpfung als „deviatorische Multiplikation".

6. *Spezielle Tensoren 3. Ordnung.* — Aus den 64 Bestimmungsgrößen eines Tensors 3. Ordnung lassen sich durch Vertauschung die Bestimmungsgrößen von 6 „konjugierten" Tensoren

$$A_{ikl},\ A_{ilk},\ A_{kli},\ A_{kil},\ A_{lik},\ A_{lki}$$

zusammenstellen, welche in verschiedener Weise additiv und subtraktiv vereinigt werden können. Im folgenden sollen nur die wichtigsten Bildungen betrachtet werden.

Die Addition von 2 konjugierten Tensoren, welche sich durch Vertauschung zweier Zeiger unterscheiden, ergibt Bildungen von der Form

$$A_{i\overline{kl}} = A_{ikl} + A_{ilk}. \tag{16}$$

Die Bestimmungsgrößen des Tensors $A_{i\overline{kl}}$ sind bezüglich der überklammerten Zeiger symmetrisch, d. h. sie bleiben bei Vertauschung dieser Zeiger ungeändert; wir wollen derartige Tensoren „partiell symmetrisch" nennen. — Die 64 Bestimmungsgrößen setzen sich in dem vorliegenden Fall aus 24 gleichen Paaren und 16 einzelstehenden zusammen, so daß im ganzen 40 verschiedene Bestimmungsgrößen resultieren.

Andererseits führt die Subtraktion von 2 konjugierten Tensoren, welche sich durch Vertauschung zweier Zeiger unterscheiden, auf „partiell antisymmetrische" Tensoren:

$$A_{i\underline{kl}} = A_{ikl} - A_{ilk}. \tag{17}$$

Die Vertauschung der unterklammerten Zeiger ändert das Vorzeichen der Bestimmungsgrößen, während jene mit 2 gleichen unterklammerten Zeigern verschwinden. Die Bildung (17) hat 24 numerisch gleiche Paare von Bestimmungsgrößen, die restlichen 16 verschwinden.

Auf einen partiell symmetrischen Tensor führt auch die Summe zweier partiell antisymmetrischer Tensoren

$$A_{i\underline{kl}} + A_{k\underline{il}} = A_{ikl} - A_{ilk} + A_{kil} - A_{kli}. \tag{18}$$

1) l. c. p. 69.

Die Vertauschung der Zeiger i und k läßt die Bestimmungsgrößen des resultierenden Tensors ungeändert; diese Bildung besitzt wie (16) 24 Paare gleiche Bestimmungsgrößen, von den restlichen 16 verschwinden aber 4 (wenn $i = k = l$), so daß nur 36 verschiedene Bestimmungsgrößen übrig bleiben.

Die Differenz

$$A_{ikl} - A_{kil}$$

ergibt einen partiell antisymmetrischen Tensor vom Typus (17).

Die Summe dreier konjugierter Tensoren mit zyklisch vertauschten Zeigern ergibt einen Tensor mit 20 Gruppen von je 3 gleichen Bestimmungsgrößen, die restlichen 4 sind einzelstehend (24 verschiedene); wir könnten denselben als „zyklisch symmetrisch" bezeichnen, da die zyklische Vertauschung der Zeiger die Bestimmungsgrößen ungeändert läßt.

Der Nachweis für die Invarianz der vorstehend angedeuteten Tensorbildungen läßt sich auf dem im Abschnitt 5 verwendeten Wege erbringen.

Besonderes Interesse beansprucht die Bildung

$$(19)\quad A_{\overline{ikl}} = \overline{A}_{ikl} = A_{ikl} + A_{ilk} + A_{kli} + A_{kil} + A_{lik} + A_{lki},$$

welche einen vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung darstellt, und ihr Gegenstück, der vollständig antisymmetrische Tensor oder Antitensor 3. Ordnung

$$(20)\quad A_{\underline{ikl}} = \underline{A}_{ikl} = A_{ikl} - A_{ilk} + A_{kli} - A_{kil} + A_{lik} - A_{lki}.$$

Die Überklammerung einer Anzahl von Zeigern hat hier und in der Folge die Bedeutung, daß über alle Ausdrücke, welche durch Permutation der überklammerten Zeigerfolge erhalten werden, zu summieren ist; bei der Unterklammerung von Zeigern sind die Permutationen, welche inbezug auf die gegebene Zeigerfolge ungerade sind, negativ zu nehmen. Die Vertauschung überklammerter Zeiger läßt daher den Wert des betreffenden Tensorausdrucks ungeändert, während die Vertauschung zweier unterklammerter Zeiger das Vorzeichen eines solchen Ausdrucks ändert.

Bei vollständig symmetrischen Tensoren können die Zeiger beliebig vertauscht werden. Eine einfache Überlegung ergibt, daß eine derartige Bildung 3. Ordnung

4 Gruppen zu je 6 gleichen Bestimmungsgrößen
(alle Zeiger verschieden),
12 Gruppen zu je 3 gleichen Bestimmungsgrößen
(2 Zeiger gleich)
und 4 einzelstehende Bestimmungsgrößen
(alle 3 Zeiger gleich)

besitzt; die Anzahl der numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen ist also gleich 20.

Bei den Antitensoren 3. Ordnung verschwinden alle Bestimmungsgrößen mit gleichen Zeigern, so daß nur 4 Gruppen zu je 6 numerisch gleichen Bestimmungsgrößen übrigbleiben. Aus den 4 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 3. Ordnung läßt sich ein Vierervektor, die „Ergänzung" des Antitensors 3. Ordnung ableiten (vgl. Abschnitt 12).

Für die Kennzeichnung von Tensoren, welche von vornherein symmetrische bzw. antisymmetrische Eigenschaften besitzen, wollen wir an Stelle der Klammern einfache Striche verwenden, ferner seien Antitensoren durch fetten Druck ihrer Symbole (in der Schrift durch Unterstreichung) hervorgehoben.

Für den vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung gilt das Transformationsgesetz

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{A}_{ikl} = \tfrac{1}{6}(&p_{ir}p_{ks}p_{lt} + p_{ir}p_{ls}p_{kt} + p_{kr}p_{ls}p_{it} \\ &+ p_{kr}p_{is}p_{lt} + p_{lr}p_{is}p_{kt} + p_{lr}p_{ks}p_{it})\, A'_{rst}, \end{aligned}\right.$$

für den Antitensor

$$(22)\quad \mathbf{A}_{ikl} = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} p_{ir} & p_{is} & p_{it} \\ p_{kr} & p_{ks} & p_{kt} \\ p_{lr} & p_{ls} & p_{lt} \end{vmatrix} \mathbf{A}'_{rst}.$$

7. Im Anschluß an die Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes lassen sich spezielle äußere Multiplikationen definieren, welche auf spezielle Tensoren 3. Ordnung führen. Von den hierher gehörigen multiplikativen Verknüpfungen dreier Vierervektoren sind die wichtigsten die äußere vollständig symmetrische Multiplikation

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} A_{\bar{i}}B_{\bar{k}}C_{\bar{l}} = \overline{A_iB_kC_l} = {}& A_iB_kC_l + A_iB_lC_k + A_kB_lC_i + A_kB_iC_l \\ &+ A_lB_iC_k + A_lB_kC_i \\ &\text{(ergibt einen vollständig symmetrischen Tensor vom Typus 19)} \end{aligned}\right.$$

und das äußere Antitensorprodukt

$$(24)\quad \begin{cases} \underline{\underline{A_i B_k C_l}} = \underline{\underline{A_i B_k C_l}} = A_i B_k C_l - A_i B_l C_k + A_k B_l C_i \\ \qquad\qquad - A_k B_i C_l + A_l B_i C_k - A_l B_k C_i \\ \qquad\qquad \text{(ergibt einen Antitensor vom Typus 20).} \end{cases}$$

Die letztere Bildung kann auch in der Form

$$(24a)\quad \underline{\underline{A_i B_k C_l}} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l \\ B_i & B_k & B_l \\ C_i & C_k & C_l \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, wobei

$$(24b)\quad \begin{cases} \underline{\underline{A_i B_k C_l}} = -\underline{\underline{A_i B_l C_k}} = \underline{\underline{A_k B_l C_i}} = -\underline{\underline{A_k B_i C_l}} = \underline{\underline{A_l B_i C_k}} \\ \qquad = -\underline{\underline{A_l B_k C_i}}. \end{cases}$$

Die Entwicklung der Determinante in (24a) nach Hauptminoren ergibt Beziehungen von der Form

$$(25)\quad \begin{cases} \underline{\underline{A_i B_k C_l}} = A_i(B_k C_l - B_l C_k) + A_k(B_l C_i - B_i C_l) + A_l(B_i C_k - B_k C_i) \\ \qquad = A_i \underline{\underline{B_k C_l}} + A_k \underline{\underline{B_l C_i}} + A_l \underline{\underline{B_i C_k}} \text{ [nach (12)].} \end{cases}$$

In der letzten Zeile erscheinen partiell antisymmetrische Tensoren vom Typus (17).

Spezielle Tensoren 3. Ordnung lassen sich auch durch multiplikative Verknüpfungen von Vierervektoren mit Tensoren 2. Ordnung erzeugen. Als Beispiele führen wir an:

Die äußere partiell symmetrische Multiplikation

$$(26)\quad \overline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl} + A_k B_{il}$$

(ergibt einen speziellen Tensor vom Typus 16);

die äußere partiell antisymmetrische Multiplikation

$$(27)\quad \underline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl} - A_l B_{ki}$$

(ergibt einen speziellen Tensor vom Typus 17);

die äußere vollständig symmetrische Multiplikation

$$(28)\quad \begin{cases} \overline{\overline{A_i B_{kl}}} = A_i(B_{kl} + B_{lk}) + A_k(B_{li} + B_{il}) + A_l(B_{ik} + B_{ki}) \\ \qquad = A_i \overline{B}_{kl} + A_k \overline{B}_{li} + A_l \overline{B}_{ik} \text{ [nach (6)]} \end{cases}$$

und die äußere antitensorische Multiplikation der genannten Tensoren

$$(29)\quad \begin{cases} \underline{\underline{A_i B_{kl}}} = A_i(B_{kl} - B_{lk}) + A_k(B_{li} - B_{il}) + A_l(B_{ik} - B_{ki}) \\ \qquad = A_i \underline{B}_{kl} + A_k \underline{B}_{li} + A_l \underline{B}_{ik} \text{ [nach (7)].} \end{cases}$$

Schließlich erhalten wir auch spezielle Tensoren 3. Ordnung, wenn wir Vierervektoren auf äußere Weise mit speziellen Tensoren 2. Ordnung multiplizieren. — Die äußere Multiplikation eines Vierervektors A_i mit einem symmetrischen Tensor 2. Ordnung $\overline{B}_{kl}$ ergibt einen partiell symmetrischen Tensor 3. Ordnung

$$A_i \overline{B}_{kl}$$

vom Typus (16). Die Summe von 3 derartigen Tensoren bestimmt nach (28) einen vollständig symmetrischen Tensor und wollen wir diesen als äußeres vollständig symmetrisches Produkt eines Vierervektors und eines symmetrischen Tensors 2. Ordnung ansprechen:

$$\overline{A_i \overline{B}_{kl}} = A_i \overline{B}_{kl} + A_k \overline{B}_{li} + A_l \overline{B}_{ik}. \tag{30}$$

Die äußere Multiplikation eines Vierervektors A_i und eines Antitensors 2. Ordnung B_{kl} führt auf einen partiell antisymmetrischen Tensor 3. Ordnung

$$A_i B_{kl}$$

vom Typus (17). Durch zyklische Vertauschung der Zeiger erhalten wir 3 Tensoren, deren Summe nach (29) einen Antitensor darstellt. Wir definieren dementsprechend als äußeres Antitensorprodukt eines Vierervektors und eines Antitensors 2. Ordnung die Bildung

$$\underline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl} + A_k B_{li} + A_l B_{ik}. \tag{31}$$

8. *Spezielle Tensoren und Multiplikationen 4. Ordnung.* — Aus den 256 Bestimmungsgrößen eines Tensors 4. Ordnung lassen sich die Bestimmungsgrößen von 24 konjugierten Tensoren zusammenstellen, welche in sehr mannigfaltiger Weise zu speziellen Tensoren 4. Ordnung vereinigt werden können. Eine Auswahl der wichtigsten Bildungen ist in umstehender Tabelle (32) zusammengestellt.

Zu Post 7 der umstehenden Tabelle ist zu bemerken, daß der vollständig symmetrische Tensor 4. Ordnung $\overline{A}_{iklm}$ aus dem allgemeinen Tensor A_{iklm} durch Addition der aus dem letzteren abgeleiteten 24 konjugierten Tensoren entsteht, d. h. es ist

$$\overline{A}_{iklm} = A_{iklm} + A_{ikml} + A_{ilmk} + A_{ilkm} + \cdots \tag{33}$$

(24 Summanden entsprechend den Permutationen der Zeigerfolge i, k, l, m).

(32) Post	Bildung	Bezeichnung des Tensors	Eigenschaften der Bestimmungsgrößen (B.G.)	Anzahl der numer. verschied. B.G.
1	$A_{ik\overline{l}\overline{m}} = A_{iklm} + A_{ikml}$	partiell symmetrisch	96 Paare gleiche B.G. 64 einzelstehende B.G.	160
2	$A_{ik\underline{l}\underline{m}} = A_{iklm} - A_{ikml}$	partiell antisymmetr.	96 Paare numer. gleiche B.G. 64 verschwindende B.G.	96
3	$A_{i\overline{k}\overline{l}\overline{m}} = A_{iklm} + A_{ikml} + A_{ilmk} + A_{ilkm} + A_{imkl} + A_{imlk}$	partiell symmetrisch	16 Grupp. zu je 6 gleich. B.G. 48 „ „ „ 3 „ „ 16 einzelstehende B.G.	80
4	$A_{i\underline{k}\underline{l}\underline{m}} = A_{iklm} - A_{ikml} + A_{ilmk} - A_{ilkm} + A_{imkl} - A_{imlk}$	partiell antisymmetr.	16 Grupp. zu je 6 numerisch gleichen B.G. 160 verschwindende B.G.	16
5	$A_{i\overline{k}\overline{l}\overline{m}} + A_{i\overline{k}\overline{m}\overline{l}} = A_{ik\overline{l}\overline{m}} + A_{ki\overline{l}\overline{m}}$	zweifach symmetrisch	36 Grupp. zu je 4 gleich. B.G. 48 Paare gleiche B.G. 16 einzelstehende B.G.	100
6	$A_{i\underline{k}\underline{l}\underline{m}} - A_{i\underline{k}\underline{m}\underline{l}} = A_{ik\underline{l}\underline{m}} - A_{ki\underline{l}\underline{m}}$	zweifach antisymmetr.	36 Grupp. zu je 4 numerisch. gleichen B.G. 112 verschwindende B.G.	36
7	$A_{\overline{i}\overline{k}\overline{l}\overline{m}} = \overline{A}_{iklm}$	vollständig symmetrisch	1 Gruppe zu 24 gleich. B.G. 12 Grupp. zu je 12 gleich. B.G. 12 „ „ „ 4 „ „ 6 „ „ „ 6 „ „ 4 einzelstehende B.G.	35
8	$A_{\underline{i}\underline{k}\underline{l}\underline{m}} = \underline{A}_{iklm}$	Antitensor	1 Gruppe zu 24 numerisch gleichen B.G. 232 verschwindende B.G.	1

Von den 256 Bestimmungsgrößen eines vollständig symmetrischen Tensors 4. Ordnung sind, wie bereits bemerkt, nur 35 verschieden.

Werden in der Entwicklung (33) die Tensorsymbole, deren Zeigerfolgen inbezug auf die Folge i, k, l, m der linken Seite ungerade sind, negativ genommen, so ergibt sich der Antitensor 4. Ordnung.

(34) $$\underline{A}_{iklm} = A_{iklm} - A_{ikml} + A_{ilmk} - A_{ilkm} + \ldots$$

er hat nur 24 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen, welche überdies numerisch gleich sind. Durch Bildung der

„Ergänzung" (vgl. Abschnitt 12) läßt sich aus dem Antitensor 4. Ordnung ein Skalar ableiten.

Für die Kennzeichnung von Tensoren, welche von vornherein symmetrische bzw. antisymmetrische Eigenschaften besitzen, wollen wir an Stelle der Klammern wie früher einfache Striche verwenden bzw. Antitensoren durch fetten Druck ihrer Symbole (in der Schrift durch Unterstreichung) hervorheben.

Entsprechend den in der Tabelle (32) zusammengestellten Tensorbildungen können wir zunächst spezielle äußere Multiplikationen von vier Vierervektoren definieren, welche auf spezielle Tensoren 4. Ordnung führen; wir beschränken uns auf die zwei wichtigsten Beispiele.

a) Das äußere vollständig symmetrische Produkt von vier Vierervektoren ist die Bildung

$$(35)\quad \overline{A_i B_k C_l D_m} = A_i B_k C_l D_m + A_i B_k C_m D_l + A_i B_l C_m D_k + \dots$$

(entspricht Post 7 der Tabelle 32).

Diese Bildung kann nach symmetrischen Tensoren 3. bzw. 2. Ordnung entwickelt werden; es ist beispielsweise

$$(35a)\quad \overline{A_i B_k C_l D_m} = A_i \overline{B_k C_l D_m} + A_k \overline{B_i C_m D_l} + A_l \overline{B_m C_i D_k} + A_m \overline{B_i C_k D_l}$$

bzw.

$$(35b)\quad \begin{cases} \overline{A_i B_k C_l D_m} = \overline{A_i B_k}\,\overline{C_l D_m} + \overline{A_i B_m}\,\overline{C_k D_l} + \overline{A_k B_l}\,\overline{C_i D_m} \\ \qquad + \overline{A_k B_m}\,\overline{C_i D_l} + \overline{A_l B_i}\,\overline{C_k D_m} + \overline{A_l B_m}\,\overline{C_i D_k}. \end{cases}$$

b) Der Post 8 der Tabelle (32) entspricht das Antitensorprodukt von vier Vierervektoren, welches sich auch in der Form

$$(36)\quad \underline{A_i B_k C_l D_m} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l & A_m \\ B_i & B_k & B_l & B_m \\ C_i & C_k & C_l & C_m \\ D_i & D_k & D_l & D_m \end{vmatrix}$$

darstellen läßt. — Die Entwicklung der Determinante in (36) nach Hauptminoren bzw. Minoren 2. Ordnung ergibt andere Darstellungsmöglichkeiten des genannten Antitensorprodukts; es ist z. B.

$$(36a)\quad \underline{A_i B_k C_l D_m} = A_i \underline{B_k C_l D_m} + A_k \underline{B_i C_m D_l} + A_l \underline{B_m C_i D_k} + A_m \underline{B_i C_k D_l},$$

wobei zu beachten ist, daß die Zeigerfolgen der rechten Seite in bezug auf die Folge i, k, l, m der linken Seite gerade sind.

Die Entwicklung der Determinante nach Minoren 2. Ordnung führt auf Beziehungen von der Form

$$(36b)\quad \begin{cases} \underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k}\ \underline{C_l D_m} + \underline{A_i B_m}\ \underline{C_k D_l} + \underline{A_k B_l}\ \underline{C_i D_m} \\ \qquad + \underline{A_k B_m}\ \underline{C_l D_i} + \underline{A_l B_i}\ \underline{C_k D_m} + \underline{A_l B_m}\ \underline{C_i D_k}, \end{cases}$$

wobei wieder die Zeigerfolgen auf der rechten Seite gerade sind.

Spezielle Tensoren 4. Ordnung lassen sich ferner durch multiplikative Verknüpfungen von Vierervektoren mit Tensoren 3. Ordnung oder von zwei Tensoren 2. Ordnung erhalten. Einige Beispiele sind in den folgenden Tabellen angeführt.

(37) Spezielle äußere Multiplikation eines Vierervektors und eines Tensors 3. Ordnung.

Post	Bildung	Bezeichnung der Multiplikation	Eigenschaften der Bestimmgs.-Größen	Anzahl der numer. verschied. B.G.
1	$A_{\overline{i}} B_{\overline{klm}} = A_i B_{klm} + A_k B_{ilm}$	partiell symmetrisch	wie Post 1 der Tab. (32)	160
2	$A_{\underline{i}} B_{\underline{klm}} = A_i B_{klm} - A_l B_{kim}$	partiell antisymmetr.	wie Post 2 der Tab. (32)	96
3	$A_{\overline{i}} B_{\overline{k}\,\overline{l}\,\overline{m}} = A_i B_{klm} + A_i B_{kml} + A_i B_{lmk} + A_l B_{kim} + A_m B_{kil} + A_m B_{lik}$	partiell symmetrisch	wie Post 3 der Tab. (32)	80
4	$A_{\underline{i}} B_{\underline{klm}} = A_i B_{klm} - A_i B_{mlk} + A_k B_{mil} - A_k B_{ilm} + A_m B_{ilk} - A_m B_{kil}$	partiell antisymmetr.	wie Post 4 der Tab. (32)	16
5	$A_{\overline{i}} B_{\overline{k}\,\overline{l}\,\overline{m}} = \overline{A_i B_{klm}}$ $= A_i B_{klm} + A_i B_{kml} + A_i B_{lmk} + A_i B_{lkm} + \ldots$ (24 Summanden entspr. der Permutation der Zeigerfolge i, k, l, m) $= A_i \overline{B}_{klm} + A_k \overline{B}_{iml} + A_l \overline{B}_{mik} + A_m \overline{B}_{lki}$ [nach (19)]	vollständig symmetrisch	wie Post 7 der Tab. (32)	35
6	$A_{\underline{i}} B_{\underline{k}\,\underline{l}\,\underline{m}} = \underline{A_i B_{klm}}$ $= A_i B_{klm} - A_i B_{kml} + A_i B_{lmk} - A_i B_{lkm} + \ldots$ $= A_i \underline{B}_{klm} + A_k \underline{B}_{iml} + A_l \underline{B}_{mik} + A_m \underline{B}_{lki}$ [nach (20)	Antitensor	wie Post 8 der Tab. (32)	1

(38) Spezielle Multiplikationen zweier Tensoren 2. Ordnung.

Post	Bildung	Bezeichnung der Multiplikation	Eigenschaften der Bestimmgs.-Größen	Anzahl der numer. verschied. B.G.
1	$A_{\overline{ik}}\,B_{\overline{lm}} = A_{ik}\,B_{lm} + A_{ik}\,B_{lm}$	partiell symmetrisch	wie Post 1 der Tab. (32)	160
2	$A_{i\underline{k}}\,B_{l\underline{m}} = A_{ik}\,B_{lm} - A_{im}\,B_{lk}$	partiell antisymmetr.	wie Post 2 der Tab. (32)	96
3	$A_{\overline{ik}}\,B_{\overline{lm}} = A_{ik}\,B_{lm} + A_{ik}\,B_{ml} + A_{il}\,B_{mk} + A_{il}\,B_{km} + A_{im}\,B_{kl} + A_{im}\,B_{lk}$	partiell symmetrisch	wie Post 3 der Tab. (32)	80
4	$A_{\underline{ik}}\,B_{\underline{lm}} = A_{ik}\,B_{lm} - A_{ik}\,B_{ml} + A_{lk}\,B_{mi} - A_{lk}\,B_{im} + A_{mk}\,B_{il} - A_{mk}\,B_{li}$	partiell antisymmetr.	wie Post 4 der Tab. (32)	16
5	$A_{\overline{i\,k}}\,B_{\overline{l\,m}} = \overline{A_{ik}\,B_{lm}}$ $= A_{ik}B_{lm} + A_{ik}B_{ml} + A_{ki}B_{ml} + A_{ki}B_{lm} + \ldots$ (24 Summ.) $= \overline{A}_{ik}\,\overline{B}_{lm} + \overline{A}_{im}\,\overline{B}_{kl} + \overline{A}_{kl}\,\overline{B}_{im} + \overline{A}_{km}\,\overline{B}_{il} + \overline{A}_{il}\,\overline{B}_{km} + \overline{A}_{lm}\,\overline{B}_{ik}$	vollständig symmetrisch	wie Post 7 der Tab. (32)	35
6	$A_{\underline{i\,k}}\,B_{\underline{l\,m}} = \underline{A_{ik}\,B_{lm}}$ $= A_{ik}B_{lm} - A_{ik}B_{ml} + A_{ki}B_{ml} - A_{ki}B_{lm} + \ldots$ $= \underline{A}_{ik}\,\underline{B}_{lm} + \underline{A}_{im}\,\underline{B}_{kl} + \underline{A}_{kl}\,\underline{B}_{im} + \underline{A}_{km}\,\underline{B}_{il} + \underline{A}_{il}\,\underline{B}_{km} + \underline{A}_{lm}\,\underline{B}_{ik}$	Antitensor	wie Post 8 der Tab. (32)	1

Auch die äußere Multiplikation von Vierervektoren mit speziellen Tensoren 3. Ordnung sowie von zwei speziellen Tensoren 2. Ordnung ergibt spezielle Tensoren 4. Ordnung.

Beispiele: Die äußere Multiplikation eines Vierervektors mit einem vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung

$$A_i\,\overline{B}_{klm}$$

führt auf einen partiell symmetrischen Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 3 der Tab. (32) mit 80 verschiedenen Bestimmungsgrößen. Die Summe von 4 derartigen Tensoren bestimmt nach Post 5 der Tab. (37) einen vollständig symmetrischen Tensor 4. Ordnung, welche Bildung wir als äußeres vollständig symmetrisches Produkt eines Vierervektors und eines vollständig symmetrischen Tensors 3. Ordnung definieren wollen:

$$(39)\qquad \overline{A_i \bar{B}_{klm}} = A_i \bar{B}_{klm} + A_k \bar{B}_{iml} + A_l \bar{B}_{mik} + A_m \bar{B}_{lki}.$$

Das äußere Produkt eines Vierervektors und eines Antitensors 3. Ordnung

$$A_i B_{klm}$$

ist ein partiell antisymmetrischer Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 4 der Tab. (32) mit 16 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen. Die Summe von 4 solchen Tensoren ergibt nach Post 6 der Tab. (37) einen Antitensor 4. Ordnung; dementsprechend definieren wir als äußeres Antitensorprodukt eines Vierervektors und eines Antitensors 3. Ordnung die Bildung

$$(40)\qquad \underline{A_i B_{klm}} = A_i B_{klm} + A_k B_{iml} + A_l B_{mik} + A_m B_{lki}.$$

Die äußere Multiplikation von zwei symmetrischen Tensoren 2. Ordnung

$$\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm}$$

führt auf einen zweifach symmetrischen Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 5 der Tab. (32), die äußere Multiplikation von zwei Antitensoren 2. Ordnung

$$A_{ik} B_{lm}$$

auf einen zweifach antisymmetrischen Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 6 der Tab. (32).

Das äußere vollständig symmetrische Produkt zweier symmetrischer Tensoren 2. Ordnung definieren wir als die Bildung

$$(41)\qquad \begin{cases} \overline{\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm}} = \bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm} + \bar{A}_{im} \bar{B}_{kl} + \bar{A}_{kl} \bar{B}_{im} + \bar{A}_{km} \bar{B}_{li} \\ \qquad\qquad + \bar{A}_{li} \bar{B}_{km} + \bar{A}_{lm} \bar{B}_{ik}, \end{cases}$$

das äußere Antitensorprodukt zweier Antitensoren 2. Ordnung als

$$(42)\qquad \begin{cases} \underline{A_{ik} B_{lm}} = A_{ik} B_{lm} + A_{im} B_{kl} + A_{kl} B_{im} + A_{km} B_{li} \\ \qquad\qquad + A_{li} B_{km} + A_{lm} B_{ik}. \end{cases}$$

Nach den gleichen Gesichtspunkten lassen sich auch mehr oder weniger spezielle Tensoren höherer Ordnung bilden, deren Mannigfaltigkeit mit der Ordnung wächst. Antitensoren höherer als 4. Ordnung gibt es aber nicht.

Bemerkungen zu der Bezeichnungsweise. — Spezielle äußere Multiplikationen von Tensoren wurden durch Über- bzw.

Unterklammerung von Zeigern der beteiligten Tensorsymbole zum Ausdruck gebracht. Die Überklammerung einer Anzahl von Zeigern in einem Tensorausdruck hat für die Ausrechnung die Bedeutung, daß die Summe über alle Tensorausdrücke zu bilden ist, welche den Permutationen der überklammerten Zeigerfolge entsprechen [Beispiele vgl. Post 1, 3 und 5 der Tabb. (37) und (38)]. Überklammerte Zeiger können beliebig vertauscht werden, z. B.

$$A_{i\underline{k}}\, B_{\underline{l}\underline{m}} = A_{i\underline{m}}\, B_{\underline{k}\underline{l}}\,.$$

Derartige Bildungen führen auf partiell bzw. vollständig symmetrische Tensoren.

Bei der Ausrechnung von Tensorausdrücken mit unterklammerten Zeigern ($\leqq 4!$) sind jene Permutationen, welche in bezug auf die gegebene unterklammerte Zeigerfolge ungerade sind, negativ zu nehmen [Beispiele: Post 2, 4 und 6 der Tabb. (37) und (38)]. Die Vertauschung je zweier unterklammerter Zeiger ändert das Vorzeichen der Bildungen, z. B.

$$A_{\underline{i}\underline{k}}\, B_{\underline{l}\underline{m}} = -\, A_{\underline{m}\underline{k}}\, B_{\underline{l}\underline{i}} = A_{\underline{i}\underline{k}}\, B_{\underline{m}\underline{l}}\,;$$

die Bestimmungsgrößen mit zwei gleichen unterklammerten Zeigern verschwinden. — Diese Bildungen ergeben partiell antisymmetrische Tensoren bzw. Antitensoren.

Multiplikative Verknüpfungen, welche auf vollständig symmetrische Tensoren führen, wurden durch Überklammerung der an ihrer Bildung beteiligten Tensorsymbole bezeichnet. Befinden sich unter der Klammer nur die Symbole von gewöhnlichen Tensoren, so ist die Überklammerung gleichbedeutend mit der Überklammerung sämtlicher ihrer Zeiger.

Beispiele:

$$\overline{A_i\, B_k} = A_{\overline{i}}\, B_{\overline{k}}\,,\quad \overline{A_i\, B_{kl}} = A_{\overline{i}}\, B_{\overline{k}\,\overline{l}}\,,\quad \overline{A_{ik}\, B_{lm}} = (A_{\overline{i}\,\overline{k}}\, B_{\overline{l}\,\overline{m}})\,.$$

Die Bezeichnungsweise $(A_{\overline{i}\,\overline{k}}\, B_{\overline{l}\,\overline{m}})$ darf dabei nicht so aufgefaßt werden, als ob jedes der beiden Tensorsymbole für sich nach (6) entwickelt werden könnte; zur Vermeidung von Irrtümern ist die Bezeichnung durch Überklammerung der Tensorausdrücke vorzuziehen.

Die Überklammerung von Tensorausdrücken, welche symmetrische Tensoren enthalten, hat die in (30), (39) und (41) festgesetzte besondere Bedeutung. — Es könnte auch die früher angegebene Bedeutung beibehalten werden; doch treten

dann in den Entwicklungen derartiger Bildungen Zahlenfaktoren auf. Entwickeln wir z. B. die Bildung $\overline{A_i B_{kl}}$ [vgl. (28)] nach den Permutationen der überklammerten Zeigerfolge, so erhalten wir 6 Summanden

$$A_i \bar{B}_{kl} + A_i \bar{B}_{lk} + A_k \bar{B}_{li} + A_k \bar{B}_{il} + A_l \bar{B}_{ik} + A_l \bar{B}_{ki},$$

von denen je zwei wegen (6) gleich sind; es wäre daher

$$\overline{A_i \bar{B}_{kl}} = 2(A_i \bar{B}_{kl} + A_k \bar{B}_{li} + A_l \bar{B}_{ik}).$$

Entsprechend würde für die Bildungen (39) und (41) gelten:

$$\overline{A_i \bar{B}_{klm}} = 6(A_i \bar{B}_{klm} + A_k \bar{B}_{iml} + A_l \bar{B}_{mik} + A_m \bar{B}_{lki})$$

bzw.

$$\overline{\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm}} = 4(\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm} + \bar{A}_{im} \bar{B}_{kl} + \bar{A}_{kl} \bar{B}_{im} + \bar{A}_{km} \bar{B}_{li} + \bar{A}_{li} \bar{B}_{km} + \bar{A}_{lm} \bar{B}_{ik}).$$

Die Antitensorprodukte wurden durch Unterklammerung der Tensorsymbole bezeichnet, was bei gewöhnlichen Tensoren der Unterklammerung aller Zeiger ($\leqq 4!$) entspricht.

Beispiele:

$$\underline{A_i B_k} = A_i B_k, \quad \underline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl}, \quad \underline{A_{ik} B_{lm}} = (A_{ik} B_{lm}).$$

Die besondere Bedeutung der Unterklammerung von Tensorausdrücken, welche Antitensoren enthalten, ist in (31), (40) und (42) festgesetzt. — Wird die für gewöhnliche Tensoren geltende Bedeutung der Unterklammerung beibehalten, so treten in den Entwicklungen derartiger Bildungen wieder Zahlenfaktoren auf wie in den Beispielen:

$$\begin{aligned}
\underline{A_i B_{kl}} &= 2(A_i B_{kl} + A_k B_{li} + A_l B_{ik}), \\
\underline{A_i B_{klm}} &= 6(A_i B_{klm} + A_k B_{iml} + A_l B_{mik} + A_m B_{lki}), \\
\underline{A_{ik} B_{lm}} &= 4(A_{ik} B_{lm} + A_{im} B_{kl} + A_{kl} B_{im} + A_{km} B_{li} \\
&\qquad + A_{li} B_{km} + A_{lm} B_{ik}).
\end{aligned}$$

Bei der für gewöhnliche Tensoren geltenden Bedeutung der Über- bzw. Unterklammerung würden ferner überklammerte Tensorausdrücke, welche antisymmetrische Tensoren, und unterklammerte, welche symmetrische Tensoren enthalten, Null ergeben.

9. *Verjüngung.* — Eine wichtige invariante Bildung ist die „Verjüngung" (Bezeichnung nach Einstein) von Tensoren höherer als 2. Ordnung, welche darin besteht, daß in den Tensorsymbolen Paare von Zeigern gleichgesetzt werden, über welche dann nach den früheren Festsetzungen zu summieren ist. Durch die Verjüngung wird die Ordnung des betroffenen Tensors um zwei oder Vielfache von zwei erniedrigt.

Beispiele: Die Verjüngung eines Tensors 2. Ordnung A_{ik} ist der Skalar

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} . \tag{43}$$

Daß diese Bildung invariant ist, ergibt sich leicht aus ihrem Transformationsgesetz

$$A_{ii} = p_{ir}\, p_{is}\, A_{rs}' \text{ [nach (3a)]} ,$$

wenn wir beachten, daß die Elemente der orthogonalen Transformationsdeterminante $p = 1$ ihren Hauptminoren gleich sind. Die Entwicklung

$$p_{ir}\, p_{is} = p_{1r}\, p_{1s} + p_{2r}\, p_{2s} + p_{3r}\, p_{3s} + p_{4r}\, p_{4s}$$

entspricht daher der Summe aus den Produkten der Elemente einer Kolonne r mit den Hauptminoren einer Kolonne s der Transformationsdeterminante, und diese Summe verschwindet für $r \neq s$, während für $r = s$ der Wert der Determinante, also Eins, resultiert, so daß

$$A_{ii} = A_{rr}' . \tag{44}$$

Bei der von Einstein für die a. R. T. verwendeten Tensoranalysis ist die Verjüngung von kontravarianten bzw. kovarianten Tensoren *keine* Invariante; dort lassen sich nur gemischte Tensoren verjüngen, welche durch äußere Multiplikation von kontravarianten mit kovarianten Tensoren erhalten werden können.

Die Verjüngungen eines Tensors 3. Ordnung A_{ikl} sind die Vierervektoren

$$A_{iil},\ A_{ili},\ A_{lii} ,$$

welche im allgemeinen verschieden sind, nur bei symmetrischen Tensoren sind sie gleich.

Die Verjüngungen eines Tensors 4. Ordnung führen auf Tensoren 2. Ordnung, aus welchen durch nochmalige Verjüngung Skalare abgeleitet werden können.

Die Verjüngungen von Antitensoren verschwinden.

Aus den Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung lassen sich in Analogie zu den im R_3 gebräuchlichen Bildungen noch weitere Skalare ableiten; die Bildung (43) wäre darnach als „1. Skalar" zu bezeichnen.

Der 2. Skalar ist definiert durch

$$S_{(2)} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} (A_{ii} A_{kk} - A_{ik} A_{ki}) , \tag{45}$$

wobei über die 16 Variationen der Summenzeiger i, k zu summieren ist.

Der 3. Skalar ist die Bildung

$$S_{(3)} = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} & A_{il} \\ A_{ki} & A_{kk} & A_{kl} \\ A_{li} & A_{lk} & A_{ll} \end{vmatrix} ; \tag{46}$$

schließlich ist der 4. Skalar die Determinante der Matrix der Bestimmungsgrößen

$$S_{(4)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} . \tag{47}$$

Der 1. und 3. Skalar von Antitensoren 2. Ordnung verschwinden.

10. *Innere (gemischte) Multiplikation.* — Eine zweite nicht minder wichtige multiplikative Verknüpfung von Tensoren ist die „innere" bzw. „gemischte" Multiplikation, welche in der Kombination der äußeren Multiplikation mit der Verjüngung besteht.

Beispiele: a) Das innere Produkt zweier Vierervektoren A_i und B_k ist der Skalar (Tensor nullter Ordnung)

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 . \tag{48}$$

Die Invarianz dieser Bildung folgt aus der Invarianz der Verjüngung eines Tensors 2. Ordnung [vgl. (44)]. — In der a. R. T. ist das innere Produkt zweier gleichartiger Tensoren *keine* Invariante und kommt dort diese multiplikative Verknüpfung nur für Tensoren verschiedener Art in Frage.

b) Die inneren Produkte des Vierervektors A_i und des Tensors 2. Ordnung B_{kl} sind die Vierervektoren

(49) $$A_i B_{ki} = A_1 B_{k1} + A_2 B_{k2} + A_3 B_{k3} + A_4 B_{k4}$$

bzw.

(49a) $$A_i B_{ik} = A_1 B_{1k} + A_2 B_{2k} + A_3 B_{3k} + A_4 B_{4k},$$

welche im allgemeinen verschieden sind. Wenn B_{kl} symmetrisch ist, sind die beiden Produkte gleich. Ist B_{kl} ein Antitensor, so gilt wegen (7)

(50) $$A_i B_{ki} = - A_i B_{ik};$$

die Summierung über i ergibt hier nur 3 Summanden.

c) Die inneren Produkte des Vierervektors A_i und des Tensors 3. Ordnung B_{klm} sind die Tensoren 2. Ordnung

(51) $$A_i B_{kli}, \quad A_i B_{kil}, \quad A_i B_{ikl};$$

für einen vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung sind sie gleich; für einen Antitensor gilt

(52) $$A_i B_{kli} = - A_i B_{kil} = A_i B_{ikl}.$$

Die Bildung (52) führt übrigens, wie leicht einzusehen ist, auf einen Antitensor 2. Ordnung.

d) Die gemischten Produkte zweier Tensoren 2. Ordnung A_{ik} und B_{lm} sind die Tensoren 2. Ordnung

(53) $$A_{ki} B_{li}, \quad A_{ki} B_{il}, \quad A_{ik} B_{li}, \quad A_{ik} B_{il};$$

diese multiplikativen Verknüpfungen sind als „gemischt" zu bezeichnen, da sie hinsichtlich der Zeiger k, l „äußere", hinsichtlich der Zeiger i „innere" Multiplikationen darstellen. — Wenn es sich um symmetrische Tensoren handelt, sind die 4 Produkte gleich; für Antitensoren gilt

(54) $$A_{ki} B_{li} = - A_{ki} B_{il} = - A_{ik} B_{li} = A_{ik} B_{il}.$$

Zweimaligen Verjüngungen entsprechen beispielsweise die inneren Produkte

$$A_{ik} B_{ik} \text{ (Skalar)}, \quad A_{kl} B_{ikl} \text{ (Vierervektor)},$$

deren Entwicklung nach den Summenzeigern im allgemeinen 16 Summanden ergibt.

Bei den inneren (gemischten) multiplikativen Verknüpfungen treten, wie aus den vorstehenden Beispielen zu ersehen ist, Paare von gleichen Zeigern (Summenzeiger) auf; die Ordnung des Produkts bestimmt sich hier durch die nach Absonderung der Summenzeigerpaare übrigbleibenden verschiedenen Zeiger, welche aus diesem Grunde „Ordnungszeiger" genannt werden sollen.

11. Die inneren (gemischten) Multiplikationen von Tensoren lassen sich noch in der Weise spezialisieren, daß nach den Ausführungen der Abschnitte 5—8 durch Zusammenfassung konjugierter Produkte symmetrische bzw. antisymmetrische Tensoren gebildet werden. So entstehen aus (51) die „inneren symmetrischen Produkte"

$$(55)\quad \begin{cases} A_i B_{\overline{k}\overline{l}i} = \overline{A_i B_{kli}} = A_i B_{kli} + A_i B_{lki}, \\ A_i B_{\overline{k}i\overline{l}} = \overline{A_i B_{kil}} = A_i B_{kil} + A_i B_{lik}, \\ A_i B_{i\overline{k}\overline{l}} = \overline{A_i B_{ikl}} = A_i B_{ikl} + A_i B_{lik}. \end{cases}$$

Die „inneren Antitensorprodukte" eines Vierervektors A_i und eines Tensors 3. Ordnung B_{klm} sind andererseits die Bildungen

$$(56)\quad \begin{cases} A_i B_{\underline{k}\underline{l}i} = \underline{A_i B_{kli}} = A_i B_{kli} - A_i B_{lki}, \\ A_i B_{\underline{k}i\underline{l}} = \underline{A_i B_{kil}} = A_i B_{kil} - A_i B_{lik}, \\ A_i B_{i\underline{k}\underline{l}} = \underline{A_i B_{ikl}} = A_i B_{ikl} - A_i B_{lik}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Über- bzw. Unterklammerung bezieht sich hier selbstverständlich nur auf die Permutationen der Ordnungszeiger.

Beispiele von speziellen gemischten Produkten sind die Bildungen:

$$(57)\quad A_{\overline{k}i} B_{\overline{l}i} = \overline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} + A_{li} B_{ki},$$

$$(58)\quad \bar{A}_{\overline{k}i} \bar{B}_{\overline{l}i} = \overline{\bar{A}_{ki} \bar{B}_{li}} = \bar{A}_{ki} \bar{B}_{li} + \bar{A}_{li} \bar{B}_{ki}$$

(gemischte symmetrische Produkte)

bzw.

$$(59)\quad A_{\underline{k}i} B_{\underline{l}i} = \underline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} - A_{li} B_{ki},$$

$$(60)\quad A_{\underline{k}i} B_{\underline{l}i} = \underline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} - A_{li} B_{ki}$$

(gemischte Antitensorprodukte).

Die Bildung (60), als Sechservektor aufgefaßt, entspricht dem Laueschen Vektorprodukt zweier Sechservektoren.[1])

12. *Der Ergänzungsbegriff.* — Wie bereits bemerkt [vgl. Abschnitt 8, Gl. (34) bzw. Abschnitt 6, Gl. (20)], läßt sich aus einem Antitensor 4. Ordnung ein Skalar und aus einem Antitensor 3. Ordnung ein Vierervektor ableiten, welch letztere Größen als „Ergänzungen" der genannten Antitensoren be-

1) M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip. Vieweg, Braunschweig 1913. p. 78 u. 79.

zeichnet werden. Diese Bildungen werden allgemein nach Großmann[1]) mit Hilfe eines Antitensors 4. Ordnung

$$I_{iklm}$$

erhalten, dessen von Null verschiedene Bestimmungsgrößen gleich $+1$ (-1) sind, wenn die betreffende Zeigerfolge i, k, l, m bezüglich 1, 2, 3, 4 eine gerade (ungerade) Permutation darstellt.

Als Ergänzung A^* eines Antitensors 4. Ordnung A_{iklm} definieren wir nun das innere Produkt

$$A^* = \frac{1}{24} I_{iklm} A_{iklm}; \tag{61}$$

die Ausrechnung ergibt

$$A^* = A_{1234}. \tag{61a}$$

Die Ergänzung H_i^* eines Antitensors 3. Ordnung H_{klm} ist die Bildung

$$H_i^* = \tfrac{1}{6} I_{iklm} H_{klm}. \tag{62}$$

Für $i = 1$ ergibt die Ausrechnung

$$H_1^* = \tfrac{1}{6}(I_{1234} H_{234} + I_{1243} H_{243} + I_{1342} H_{342} + I_{1324} H_{324} + I_{1423} H_{423} + I_{1432} H_{432});$$

alle anderen Variationen der Summenzeiger k, l, m verschwinden wegen des Antitensorcharakters von I_{iklm}. Wenn wir für I_{1234}, I_{1243} usw. die Werte ± 1 nach der früheren Angabe einsetzen, erhalten wir

$$H_1^* = \tfrac{1}{6}(H_{234} - H_{243} + H_{342} - H_{324} + H_{423} - H_{432});$$

da

$$H_{234} = -H_{243} = H_{342} = -H_{324} = H_{423} = -H_{432},$$

wird schließlich

$$H_1^* = H_{234} (= -H_{243} = H_{342} = \text{usw.}).$$

Auf diese Weise ergibt sich die folgende Zusammenstellung der Bestimmungsgrößen der Ergänzung H_i^*:

$$\begin{cases} H_1^* = H_{234}, & H_3^* = H_{412}, \\ H_2^* = H_{143}, & H_4^* = H_{321}. \end{cases} \tag{62a}$$

In ähnlicher Weise läßt sich mit Hilfe des Antitensors I_{iklm} auch die Ergänzung eines Antitensors 2. Ordnung

1) Entwurf einer verallgemeinerten R. T. B. G. Teubner 1913. II. Mathem. Teil von M. Graßmann. p. 33 u. 34.

sowie die Ergänzungen eines Vierervektors und eines Skalars definieren. — Die Ergänzung eines Antitensors 2. Ordnung M_{lm} ist der Antitensor 2. Ordnung

$$M_{ik}^* = \tfrac{1}{2} I_{iklm} M_{lm}; \tag{63}$$

für M_{23}^* ergibt die Ausrechnung beispielsweise

$$M_{23}^* = \tfrac{1}{2}(I_{2314} M_{14} + I_{2341} M_{41}) = \tfrac{1}{2}(M_{14} - M_{41}) = M_{14}.$$

Zusammenstellung:

$$\left\{\begin{aligned}
&M_{23}^* = -M_{32}^* = M_{14} = -M_{41},\\
&M_{31}^* = -M_{13}^* = M_{24} = -M_{42},\\
&M_{12}^* = -M_{21}^* = M_{34} = -M_{43},\\
&M_{14}^* = -M_{41}^* = M_{23} = -M_{32},\\
&M_{24}^* = -M_{42}^* = M_{31} = -M_{13},\\
&M_{34}^* = -M_{43}^* = M_{12} = -M_{21}.
\end{aligned}\right. \tag{63a}$$

Die Ergänzung des Vierervektors A_m ist der Antitensor 3. Ordnung

$$A_{ikl}^* = I_{iklm} A_m; \tag{64}$$

die Ausrechnung ergibt

$$\left\{\begin{aligned}
&-A_{234}^* = A_{243}^* = -A_{342}^* = A_{324}^* = -A_{423}^* = A_{432}^* = A_1\\
&-A_{143}^* = A_{134}^* = -A_{431}^* = A_{413}^* = -A_{314}^* = A_{341}^* = A_2\\
&-A_{412}^* = A_{421}^* = -A_{124}^* = A_{142}^* = -A_{241}^* = A_{214}^* = A_3\\
&-A_{321}^* = A_{312}^* = -A_{213}^* = A_{231}^* = -A_{132}^* = A_{123}^* = A_4.
\end{aligned}\right. \tag{64a}$$

Schließlich ist die Ergänzung eines Skalars A der Antitensor 4. Ordnung

$$A_{iklm}^* = I_{iklm} A. \tag{65}$$

Mit Hilfe des Ergänzungsbegriffes lassen sich äußere multiplikative Verknüpfungen von Tensoren mit inneren (gemischten) Multiplikationen in Zusammenhang bringen. In dieser Beziehung spielt der Ergänzungsbegriff in der Graßmannschen Ausdehnungslehre eine große Rolle. Wir wollen hier nur ein Beispiel anführen.

Wird das äußere Antitensorprodukt dreier Vierervektoren

$$\Omega_{klm} = \underline{Y_k E_l H_m} = Y_k E_l H_m - Y_k E_m H_l + Y_l E_m H_k - Y_l E_k H_m + Y_m E_k H_l - Y_m E_l H_k,$$

beiderseits mit $\frac{1}{6} I_{iklm}$ multipliziert, so erhalten wir auf der linken Seite nach (62) die Ergänzung Ω_i^* von Ω_{klm}. Die einzelnen Glieder der Entwicklung auf der rechten Seite ergeben mit Rücksicht auf (64)

$$\frac{1}{6} Y_k E_l I_{iklm} H_m = \frac{1}{6} Y_k E_l H_{ikl}^*,$$
$$-\frac{1}{6} Y_k E_m I_{iklm} H_l = \frac{1}{6} Y_k E_m H_{ikm}^*,$$
usw.

Diese Ausdrücke sind aber alle gleich, da sie sich nur durch die beliebig vertauschbaren Summenzeiger unterscheiden: es ist also

$$\Omega_i^* = Y_k E_l H_{ikl}^* \tag{66}$$

oder

$$\frac{1}{6} I_{iklm} \underline{Y_k E_l H_m} = Y_k E_l H_{ikl}^*,$$

d. h. die Ergänzung des äußeren Antitensorprodukts $\underline{Y_k E_l H_m}$ ist das gemischte Produkt $Y_k E_l H_{ikl}^*$.

Ein anderer Weg für die Bildung dieser Ergänzung besteht darin, daß das äußere Antitensorprodukt zunächst nach (25) entwickelt wird:

$$\Omega_{klm} = Y_k \underline{E_l H_m} + Y_l \underline{E_m H_k} + Y_m \underline{E_k H_l}$$
$$= Y_k S_{lm} + Y_l S_{mk} + Y_m S_{kl} \quad (\underline{E_l H_m} = S_{lm} \text{ gesetzt}).$$

Wenn wir wieder beiderseits mit $\frac{1}{6} I_{iklm}$ multiplizieren, erhalten wir links Ω_i^*; das erste Glied der rechten Seite ergibt mit Berücksichtigung von (63)

$$\frac{1}{6} Y_k I_{iklm} S_{lm} = \frac{1}{3} Y_k S_{ik}^*.$$

Die beiden anderen Glieder auf der rechten Seite liefern gleichbedeutende Ausdrücke, so daß

$$\Omega_i^* = Y_k S_{ik}^*, \tag{67}$$

oder

$$\frac{1}{6} I_{iklm} \underline{Y_k E_l H_m} = Y_k S_{ik}^*. \tag{67a}$$

Die Ergänzung des äußeren Antitensorprodukts $\underline{Y_k E_l H_m}$ ist das innere Produkt $Y_k S_{ik}^*$, wobei nach (63)

$$S_{ik}^* = \frac{1}{2} I_{iklm} \underline{E_l H_m}.$$

In der allgemeinen Tensoranalysis spielt der Ergänzungsbegriff meiner Ansicht nach keine so große Rolle; er kommt

jedoch in Frage, wenn es sich darum handelt, die Einführung von Antitensoren 3. Ordnung zu vermeiden.

13. In den Abschnitten 5—8 wurde die Bildung spezieller Tensoren durch Addition und Subtraktion der Bestimmungsgrößen konjugierter Tensoren behandelt, wobei die Ordnung unverändert blieb. Es lassen sich nun auch mit Hilfe von Determinantenbildungen aus den Bestimmungsgrößen von Tensoren 2. und höherer Ordnung die Bestimmungsgrößen von speziellen Tensoren ableiten, deren Ordnung verschieden sein kann.

Betrachten wir etwa einen Tensor 2. Ordnung mit den 16 Bestimmungsgrößen A_{ik}, welche in der Matrix

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix}$$

angeordnet sind. Die Determinante der Matrix werde mit A bezeichnet. Die Bildung der Unterdeterminanten von A (inkl. Vorzeichen) soll durch die Schreibweise

$$A_{(i),(r)}\,,\quad A_{(ik),(rs)}\,,\quad A_{(ikl),(rst)}$$

angedeutet werden, wobei die eingeklammerten Zeiger vor dem Beistrich die Zeilen, die Zeiger hinter dem Beistrich die Kolonnen angeben, welche in A zu streichen sind, um die Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen zu erhalten. In den durch den Beistrich getrennten Zeigergruppen können darnach keine gleichen Zeiger auftreten.

Was das Vorzeichen der Unterdeterminanten 3. Ordnung $A_{(i),(r)}$ anlangt, so sind die nach Streichung der $i$ten Zeile und $k$ten Kolonne in A übrigbleibenden Determinanten mit $(-1)^{i+r}$ zu multiplizieren. Das Vorzeichen der Unterdeterminanten 2. und 1. Ordnung wird in der Weise bestimmt, daß zunächst die Zeigerfolgen $(i\,k)$ und $(r\,s)$ bzw. $(i\,k\,l)$ und $(r\,s\,t)$ mit Berücksichtigung der dabei auftretenden Vorzeichenwechsel (die Vertauschung je zweier Zeiger der durch den Beistrich getrennten Zeigergruppen ändert das Vorzeichen der Unterdeterminanten) der natürlichen Zahlenfolge entsprechend geordnet werden. Die nach Streichung der durch die geordneten Zeigerfolgen angegebenen Zeilen und Kolonnen

in A übrigbleibenden Determinanten sind dann mit

$$(-1)^{i+k+r+s}$$

bzw.

$$(-1)^{i+k+l+r+s+t}$$

zu multiplizieren.

Die nach vorstehendem aus der Determinante A der Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung A_{ik} abgeleiteten Unterdeterminanten können als Bestimmungsgrößen neuer Tensoren angesehen werden, da sie sich bei Transformationen des Bezugsystems wie solche verhalten. Wir erhalten auf diese Weise folgende Bildungen:

1. Einen Skalar (Tensor nullter Ordnung) in der Determinante A der Bestimmungsgrößen [4. Skalar des Tensors A_{ik}; vgl. (47)].

2. Einen Tensor 2. Ordnung

$$A_{(i),(r)},$$

dessen Bestimmungsgrößen durch die Unterdeterminanten 3. Ordnung von A gebildet werden. Es läßt sich leicht zeigen, daß $A_{(i),(r)}$ symmetrisch (antisymmetrisch) ist, wenn es der Ausgangstensor war. Zwischen den vier Skalaren der Tensoren $A_{(i),(r)}$ und des Ausgangstensors A_{ik} bestehen ferner gewisse Beziehungen, auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll.

3. Ein Tensor 4. Ordnung

$$A_{(i\,k),(r\,s)}$$

aus den Unterdeterminanten 2. Ordnung von A; dieser Tensor ist zweifach antisymmetrisch, da die Vertauschung der Zeiger $i\,k$ bzw. $r\,s$ das Vorzeichen der Bestimmungsgrößen ändert und jene Bestimmungsgrößen, welche gleiche Zeiger vor oder nach dem Beistrich aufweisen, verschwinden. Er besitzt 144 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen, von denen aber nur 36 numerisch verschieden sind.

4. Ein Tensor 6. Ordnung

$$A_{(i\,k\,l),(r\,s\,t)}$$

aus den Unterdeterminanten 1. Ordnung, welche auf die Elemente von A zurückführen; dieser Tensor ist gleichfalls zweifach antisymmetrisch (nach den Zeigerfolgen $i\,k\,l$ bzw. $r\,s\,t$) und besitzt 576 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen, von denen aber nur 16 numerisch verschieden sind.

Im folgenden soll eine zweite Gruppe von Tensorbestimmungsgrößen aus den Unterdeterminanten von A abgeleitet werden. — Wir stellen zunächst aus den Elementen, in welchen die Zeilen k, l, m, die Kolonnen s, t, u der Determinante A schneiden, die Determinanten

$$A_{klm,\,stu} = \begin{vmatrix} A_{ks} & A_{kt} & A_{ku} \\ A_{ls} & A_{lt} & A_{lu} \\ A_{ms} & A_{mt} & A_{mu} \end{vmatrix}$$

zusammen. Was das Vorzeichen anlangt, so sollen jene, deren beide Zeigerfolgen zusammen eine gerade (ungerade) Anzahl von Inversionen aufweisen, mit positiven (negativen) Vorzeichen genommen werden. Diese Determinanten können als Bestimmungsgrößen eines zweifach antisymmetrischen Tensors 6. Ordnung angesehen werden, welcher 576 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen besitzt, von denen aber nur 16 numerisch verschieden sind. Um den Tensorcharakter dieser Bildungen zu erweisen, setzen wir in der vorstehenden Determinante nach (3a) für die Elemente

$$A_{ks} = p_{kf} p_{so} A_{fo}',$$
$$A_{kt} = p_{kf} p_{tp} A_{fp}'$$
usw.

und erhalten

$$(68)\quad \begin{vmatrix} A_{ks} & A_{kt} & A_{ku} \\ A_{ls} & A_{lt} & A_{lu} \\ A_{ms} & A_{mt} & A_{mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{kf} p_{so} A_{fo}, & p_{kf} p_{tp} A_{fp}, & p_{kf} p_{uq} A_{fq} \\ p_{lg} p_{so} A_{go}, & p_{lg} p_{tp} A_{gp}, & p_{lg} p_{uq} A_{gq} \\ p_{mh} p_{so} A_{ho}, & p_{mh} p_{tp} A_{hp}, & p_{mh} p_{uq} A_{hq} \end{vmatrix}$$
$$= p_{kf} p_{lg} p_{mh} p_{so} p_{tp} p_{uq} \begin{vmatrix} A_{fo} & A_{fp} & A_{fq} \\ A_{go} & A_{gp} & A_{gq} \\ A_{ho} & A_{hp} & A_{hq} \end{vmatrix}.$$

Die 16 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen des Tensors 6. Ordnung $A_{klm,\,stu}$ stimmen mit jenen des Tensors 2. Ordnung $A_{(i),(r)}$ überein. Eine ähnliche Beziehung haben wir im Abschnitt 12 [Gleichung (62)] zwischen den vier numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 3. Ordnung und den Bestimmungsgrößen seiner „Ergänzung" kennen gelernt. Da wir es hier mit einem zweifach antisymmetrischen Tensor zu tun haben, ist die Beziehung (62) wie folgt zu erweitern:

(69) $$A_{(i),(r)} = \frac{1}{36} I_{iklm} I_{rstu} A_{klm,stu}.$$

Der Tensor $A_{(i),(r)}$ kann daher auch als „Ergänzung" des Tensors $A_{klm,stu}$ angesprochen werden.

Desgleichen bilden die Determinanten

$$A_{lm,iu} = \begin{vmatrix} A_{lt} & A_{lu} \\ A_{mt} & A_{mu} \end{vmatrix}$$

der Elemente, in welchen die $l$te und $m$te Zeile die $t$te und $u$te Kolonne von A schneiden, die Bestimmungsgrößen eines zweifach antisymmetrischen Tensors 4. Ordnung mit 144 von Null verschiedenen Bestimmungsgrößen, von denen aber nur 36 numerisch verschieden sind. Zwischen diesem Tensor und $A_{(ik),(rs)}$ besteht die Beziehung

$$A_{(ik),(rs)} = \tfrac{1}{4} I_{iklm} I_{rstu} A_{lm,tu}.$$

Schließlich ist

$$A_{m,u} = A_{mu}$$

mit dem Ausgangstensor identisch und es gilt

$$\begin{aligned} A_{(ikl),(rst)} &= I_{iklm} I_{rstu} A_{m,u} \\ &= I_{iklm} I_{rstu} A_{mu}. \end{aligned}$$

Durch die letzte Gleichung wird die „Ergänzung" eines Tensors 2. Ordnung definiert.

Auch aus den Bestimmungsgrößen von Tensoren 3. und höherer Ordnung lassen sich durch Determinantenbildungen die Bestimmungsgrößen neuer Tensoren ableiten, welche vorläufig wohl nur invariantentheoretisches Interesse besitzen.

14. *Differentielle Operationen.* — Für die Ausführung differentieller Operationen empfiehlt sich die Einführung des Vierervektors ∇_i (Nabla) mit den Bestimmungsgrößen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{ic\partial t} = -\frac{i\partial}{c\partial t}.$$

Die äußere Multiplikation von ∇_i mit einem Vierervektor Φ_k führt auf einen Differentialtensor 2. Ordnung

$$\nabla_i \Phi_k,$$

welcher in Anlehnung an Einstein als „Erweiterung" des Vierervektors bezeichnet werden könnte.

Die innere Multiplikation von ∇_i und A_k ergibt den Skalar

$$\nabla_i A_i,$$

die „Divergenz" des Vierervektors.

Ich möchte mir an dieser Stelle den Vorschlag erlauben, die äußere Multiplikation von ∇_i mit einem Tensor beliebiger Ordnung als seine „differentielle Erhöhung" oder kurz „Erhöhung", die innere Multiplikation von ∇_i mit einem Tensor als seine „Erniedrigung" zu bezeichnen, da im ersten Falle das resultierende Tensorgebilde von höherer, im zweiten Falle von niedrigerer Ordnung ist als der beteiligte Tensor.

Von der großen Anzahl differentieller Bildungen wollen wir hier nur einige Beispiele anführen:

Die Erhöhung eines Skalars (Tensor nullter Ordnung) A ist der Vierervektor

$$\nabla_i A ,$$

welchen Sommerfeld[1]) als Gradient des Skalars bezeichnet.

Die „antitensorische Erhöhung" eines Vierervektors Φ_k ist der Antitensor 2. Ordnung [nach (12) gebildet]

$$\underline{\nabla_i \Phi_k} = \nabla_i \Phi_k - \nabla_k \Phi_i , \tag{70}$$

welcher, als Sechservektor (Vektor 2. Art) aufgefaßt, der Sommerfeldschen Rotation (l. c. p. 654) entspricht.

Die antitensorische Erhöhung eines Antitensors 2. Ordnung ist der nach (31) gebildete Antitensor 3. Ordnung

$$\underline{\nabla_i M_{kl}} = \nabla_i M_{kl} + \nabla_k M_{li} + \nabla_l M_{ik} ; \tag{71}$$

die Erniedrigung eines Antitensors 2. Ordnung ist der Vierervektor

$$\nabla_i M_{ki} = - \nabla_i M_{ik} , \tag{72}$$

welchen Sommerfeld (l. c. p. 651) als Vektordivergenz bezeichnet.

Das äußere Produkt

$$\nabla_i \nabla_k = \square_{ik} \tag{73}$$

können wir als Nablatensor 2. Ordnung ansprechen; das innere Produkt

$$\nabla_i \nabla_i = \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{c^2 \partial t^2} \tag{74}$$

entspricht dem Operator Δ im R_3.

15. *Zusammenfassung.* — In den vorhergehenden Abschnitten wurden die wichtigsten Tensorbildungen und ihre multiplikativen Verknüpfungen behandelt, wobei die „speziellen"

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie II. Ann. d. Phys. **33.** p. 653. 1900.

Tensoren eine besondere Berücksichtigung fanden; unter dieser Bezeichnung sind ganz allgemein Tensoren zu verstehen, deren Bestimmungsgrößen besondere Eigenschaften besitzen. Diese Tensorbildungen weisen hinsichtlich der Anzahl ihrer numerisch gleichen bzw. verschwindenden Bestimmungsgrößen große Verschiedenheiten auf; trotzdem lassen sie sich in der allgemeinen Tensoranalysis wie gewöhnliche Tensoren ihrer Ordnung behandeln.

Die multiplikativen Verknüpfungen zerfallen in zwei Hauptgruppen: äußere und innere (gemischte) Multiplikationen. Die äußeren Multiplikationen von Tensoren sind in der Schreibweise daran zu erkennen, daß sämtliche Zeiger der vorkommenden Tensorsymbole verschieden sind; die Ordnung des Produkts wird durch die Anzahl der verschiedenen Zeiger bestimmt. — Treten dagegen Paare von gleichen Zeigern (Summenzeiger) auf, so ist die multiplikative Verknüpfung im allgemeinen eine gemischte. Die Ordnung des Produkts bestimmt sich durch die nach Absonderung der Summenzeigerpaare übrigbleibenden verschiedenen Zeiger (Ordnungszeiger).

Beispiele:

In der Bildung

$$(\alpha) \qquad Y_b M_{bc} Y_\sigma V_{c\nu}$$

treten 2 Paare von Summenzeigern (b und c) sowie 2 Ordnungszeiger (σ, ν) auf; das Resultat ist ein Tensor 2. Ordnung.

Die Bildung

$$(\beta) \qquad Y_b M_{ab} Y_c V_{ac}$$

enthält 3 Paare von Summenzeigern und keinen Ordnungszeiger; sie entspricht daher einem Tensor nullter Ordnung oder Skalar.

Bei der Ausrechnung von Tensorausdrücken ist über die etwa auftretenden Summenzeiger zu summieren. In α) wäre z. B. die Summe über die Tensorausdrücke zu bilden, welche den 16 Variationen (mit Wiederholungen) zu zwei (b, c) der Elemente 1, 2, 3, 4 entsprechen, in β) die Summe über die 64 Variationen zu drei (a, b, c) dieser Elemente.

Die Entwicklung nach Summenzeigern läßt sich in manchen Fällen vereinfachen. Bei der Ausrechnung des inneren Produkts zweier Antitensoren 2. Ordnung

$$M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$$

wäre die Summe über die 12 nicht verschwindenden Variationen der Summenzeiger α, β zu bilden; da aber je zwei Glieder dieser Entwicklung gleich sind (z. B. $M_{23} M_{23} = M_{32} M_{32}$), läßt sie sich durch die Summe

$$2 \sum_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}; \quad \alpha\beta = 23, 31, 12, 14, 24, 34$$

darstellen. Entsprechendes gilt für das innere Produkt zweier Antitensoren 3. Ordnung

$$H_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta\gamma},$$

dessen Entwicklung nach den Summenzeigern 24 Summanden ergibt (die übrigen 40 verschwinden); diese lassen sich in der Form

$$6 \sum_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta\gamma}; \quad \alpha\beta\gamma = 234, 143, 412, 321$$

zusammenfassen.

Weitere Rechnungsregeln:

Summenzeiger können ohneweiters untereinander vertauscht und durch andere Buchstaben ersetzt werden; dies ermöglicht einerseits Umformungen von Tensorausdrücken, andererseits lassen sich scheinbar verschiedene Ausdrücke als gleich erweisen.

Ordnungszeiger dürfen dagegen im allgemeinen nicht vertauscht werden; nur wenn es sich um markierte Zeiger oder solche von speziellen Tensoren handelt, ist die Vertauschung derselben mit Berücksichtigung der eventuell auftretenden Vorzeichenwechsel gestattet.

Der größte Vorteil der Einsteinschen Tensoranalysis liegt in der Assoziativität ihrer Bildungen; es erübrigt sich daher auch die Verwendung von Klammern. Wenn es sich um differentielle Operationen handelt, sind unter Umständen Klammern erforderlich, um den Bereich abzugrenzen, auf den sich diese Operationen erstrecken.

Beispiel: In der Bildung

$$\nabla_\sigma (M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta})$$

erstreckt sich die Operation ∇_σ auf die eingeklammerten Tensorsymbole; es ist daher

$$\nabla_\sigma (M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}) = M_{\alpha\beta} \nabla_\sigma V_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta} \nabla_\sigma M_{\alpha\beta}.$$

Dagegen soll sich in

$$\nabla_\sigma M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} \nabla_\sigma M_{\alpha\beta}$$

die Operation ∇_σ nur auf das unmittelbar folgende Tensorsymbol, also $M_{\alpha\beta}$, beziehen.

In Tensorausdrücken mit markierten Zeigern ist eine Assoziationsänderung nicht ohneweiters erlaubt. Betrachten wir beispielsweise das spezielle äußere Produkt

$$(A_{i\underline{k}}\, B_{l\underline{m}}\, C_{r\underline{s}}\, D_{t\underline{u}}),$$

so ist wohl eine Vertauschung der Tensorsymbole (etwa $(C_{r\underline{s}}\, A_{i\underline{k}}\, D_{t\underline{u}}\, B_{l\underline{m}})$ zulässig, doch dürfen dieselben im Hinblick auf die Bedeutung der Unterklammerung von Zeigern nicht in zwei Teilgruppen, etwa in der Weise

$$(A_{i\underline{k}}\, B_{l\underline{m}})\,(C_{r\underline{s}}\, D_{t\underline{u}})$$

zusammengefaßt werden, wie dies bei Tensorsymbolen ohne markierte Zeiger möglich wäre. Die vollständige Entwicklung der betrachteten Bildung, welche nach (36) auch in der Form

$$(A_{i\underline{k}}\, B_{l\underline{m}}\, C_{r\underline{s}}\, D_{t\underline{u}}) = \begin{vmatrix} A_{ik}\, B_{im}\, C_{is}\, D_{iu} \\ A_{lk}\, B_{lm}\, C_{ls}\, D_{lu} \\ A_{rk}\, B_{rm}\, C_{rs}\, D_{ru} \\ A_{tk}\, B_{tm}\, C_{ts}\, D_{tu} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann, ergibt 24 Glieder mit nicht markierten Zeigern; dieselbe kann auch nach (36a) als Summe von 4 Gliedern oder nach (36b) als Summe von 6 Gliedern mit markierten Zeigern dargestellt werden. — Um Irrtümer zu vermeiden, wird es sich empfehlen, derartige Tensorausdrücke gegebenenfalls in runde Klammern einzuschließen, um damit anzudeuten, daß die eingeklammerten Tensorsymbole nicht willkürlich assoziiert werden dürfen.

Wenn wir es mit Tensorgleichungen zu tun haben, welche beiderseits als Faktoren gleiche Tensorsymbole mit gleichen Zeigern aufweisen, so dürfen diese (falls sie nicht gleich Null sind) nur dann „gekürzt" werden, wenn es sich um Tensorsymbole mit nicht markierten Ordnungszeigern oder mit zusammenhängenden Paaren von Summenzeigern handelt; werden jedoch dabei Paare von Summenzeigern getrennt, so ist die Kürzung im allgemeinen unzulässig. — Eine Tensorgleichung darf ferner nicht mit Tensorsymbolen multipliziert werden, wenn Zeiger der letzteren mit Summenzeigern von Gliedern

der betreffenden Gleichung übereinstimmen, da sonst in diesen Gliedern drei gleiche Zeiger auftreten würden. Es ist z. B. unzulässig, die Gleichung

$$Y_\sigma \Omega'_\nu = Y_c V_{bc} Y_\sigma M_{\nu b} - Y_e M_{de} Y_\sigma V_{\nu d}$$

mit Y_c oder Y_d zu multiplizieren, sondern es muß für dieses Symbol ein anderer, nicht vorkommender Zeiger gewählt werden, wenn es sich um eine äußere Multiplikation handelt.

In der Einsteinschen Tensoranalysis spielen die Zeiger der Tensorsymbole eine große Rolle; dies tritt noch mehr in Erscheinung, wenn die speziellen Tensorbildungen berücksichtigt werden. Bei einzelstehenden Tensorsymbolen gibt die Zahl der Zeiger die Ordnung (wenn es sich nicht gerade um verjüngte Tensoren handelt), ihre Markierung die besonderen Eigenschaften der Bestimmungsgrößen des betreffenden Tensors an. In Ausdrücken mit mehreren Tensorsymbolen bestimmt die Anordnung der Zeiger und ihre Markierung die Art der multiplikativen Verknüpfung. — Es ist daher bei Verwendung dieser Rechnungsmethode den Zeigern der Tensorsymbole ein besonderes Augenmerk zu widmen, da man sich in vielen Fällen durch einfache Überlegungen längere Ausrechnungen ersparen kann. Betrachten wir z. B. die Bildung

$$Y_b Y_c M_{bc};$$

in der Entwicklung nach den Summenzeigern b und c verschwinden die vier Glieder, für die $b = c$, da M_{bc} ein Antitensor ist. Unter den übrigbleibenden 12 Gliedern sind je zwei wegen $M_{bc} = - M_{cb}$ entgegengesetzt gleich und heben sich bei der Addition weg, so daß

$$Y_b Y_c M_{bc} = 0. \tag{75}$$

Die allgemeinsten Tensoren $p$ter Ordnung im R_4 haben 4^p verschiedene Bestimmungsgrößen, welche gleichzeitig voneinander unabhängig sind. Wie bereits im Abschnitt 5 bemerkt, ist die Bezeichnung „verschieden" nicht gleichbedeutend mit „unabhängig". So hat beispielsweise der Antitensor

$$C_{ik} = \underline{A_i B_k}$$

6 numerisch verschiedene, aber nur 5 unabhängige Bestimmungsgrößen, da das innere Produkt

$$C_{ik}C_{ik}^{*} = C_{23}C_{14} + C_{31}C_{24} + C_{12}C_{34} + C_{14}C_{23} + C_{24}C_{31} + C_{34}C_{12}$$
$$= 2(C_{23}C_{14} + C_{31}C_{24} + C_{12}C_{34})$$

verschwindet.

Von den speziellen Tensoren bieten die vollständig symmetrischen und die Antitensoren ein besonderes Interesse. Bei den vollständig symmetrischen Tensoren bleiben die Bestimmungsgrößen bei Vertauschung der Zeiger ungeändert; unter den 4^p Bestimmungsgrößen befinden sich

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}$$

verschiedene. Die Bestimmungsgrößen von Antitensoren ändern bei Vertauschung je zweier Zeiger ihr Vorzeichen, außerdem verschwinden jene mit gleichen Zeigern. Antitensoren $p$ter Ordnung haben $\binom{4}{p}\,p!$ von Null verschiedene Bestimmungsgrößen (wobei $p \leqq 4$), von denen aber nur $\binom{4}{p}$ numerisch verschieden sind.

In nachstehender Tabelle (76) sind für die gewöhnlichen Tensoren und die zuletzt genannten speziellen Tensoren die Anzahl der von Null verschiedenen und der numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen zusammengestellt.

Ordnung	Bezeichnung	Anzahl der von Null verschiedenen Bestimmungsgr.	Anzahl der numerisch verschiedenen Bestimmungsgr.
0	Tensor nullter Ordnung (Skalar)	1	1
1	Tensor 1. Ordnung (Vierervektor)	4	4
2	Tensor	16	16
	Vollständig symmetrischer Tensor	16	10
	Antitensor	12	6
3	Tensor	64	64
	Vollständig symmetrischer Tensor	64	20
	Antitensor	24	4
4	Tensor	256	256
	Vollständig symmetrischer Tensor	256	35
	Antitensor	24	1

In dem hiermit abgeschlossenen ersten Teil meiner Arbeit habe ich die von Einstein für die a. R. T. entwickelte Tensoranalysis auf die sp. R. T. zugeschnitten und sie sodann in der Richtung einer besonderen Berücksichtigung der speziellen Tensorbildungen ausgebaut. In entsprechender Weise

läßt sich auch die Tensoranalysis der a. R. T. ausbauen, nur sind die hierbei auftretenden speziellen Bildungen wegen der Unterscheidung von kontravarianten und kovarianten Tensoren ungleich mannigfaltiger.

In den folgenden Abschnitten soll die behandelte Rechnungsmethode auf die Elektrodynamik des leeren Raumes und die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper angewendet und die für beide Fälle geltenden Spannungs-Energie-Tensoren abgeleitet werden. Zuletzt wird der vollständige Ausdruck der Viererkraft für beschleunigungsfrei bewegte isotrope Körper aufgestellt.

16. *Elektrodynamik des leeren Raumes nach der sp. R. T.*[1]) — Die antitensorische Erhöhung [vgl. (70)] des Viererpotentials $\Phi_\nu(\mathfrak{A}; i\varphi)$ ergibt den Antitensor 2. Ordnung

$$\boldsymbol{M}_{\mu\nu} = \underline{\nabla_\mu \Phi_\nu} = \nabla_\mu \Phi_\nu - \nabla_\nu \Phi_\mu \tag{76}$$

mit den 12 von Null verschiedenen (6 numerisch verschiedenen) Bestimmungsgrößen

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{23} &= -\boldsymbol{M}_{32} = \mathfrak{H}_x, \\ \boldsymbol{M}_{31} &= -\boldsymbol{M}_{13} = \mathfrak{H}_y, \\ \boldsymbol{M}_{12} &= -\boldsymbol{M}_{21} = \mathfrak{H}_z, \\ \boldsymbol{M}_{14} &= -\boldsymbol{M}_{41} = -i\mathfrak{E}_x, \\ \boldsymbol{M}_{24} &= -\boldsymbol{M}_{42} = -i\mathfrak{E}_y, \\ \boldsymbol{M}_{34} &= -\boldsymbol{M}_{43} = -i\mathfrak{E}_z. \end{aligned}\right. \tag{76a}$$

Bedeutung der Schreibweise $\Phi_\nu(\mathfrak{A}; i\varphi)$: Die Komponenten des dreidimensionalen Vektors vor dem Strichpunkt sind den Bestimmungsgrößen Φ_1, Φ_2 und Φ_3, der Skalar nach dem Strichpunkt der Bestimmungsgröße Φ_4 gleich. Die erste Beziehung wird gelegentlich auch in der Form

$$\Phi_{(1,2,3)} = \mathfrak{A}$$

geschrieben werden.

Die sechs numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen des Antitensors $\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$, den wir kurz als „Feldtensor" bezeichnen wollen, entsprechen den Komponenten der magnetischen und elektrischen Feldstärke, was wir auch durch die Schreibweise

$$\boldsymbol{M}_{\mu\nu}(\mathfrak{H}; -i\mathfrak{E})$$

1) Vgl. auch M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip. p. 87 ff.

andeuten werden. Die Komponenten des dreidimensionalen Vektors vor dem Strichpunkt sind den Bestimmungsgrößen M_{23}, M_{31} und M_{12}, die Komponenten des Vektors nach dem Strichpunkt den Bestimmungsgrößen M_{14}, M_{24} und M_{34} des Antitensors $M_{\mu\nu}$ gleich.

Die Erniedrigung von $M_{\mu\nu}$ [vgl. (72)] bestimmt die Vierdichte $P_\mu\left(\frac{\varrho\mathfrak{v}}{c}; i\varrho\right)$:

$$\nabla_\sigma M_{\mu\sigma} = P_\mu. \tag{77}$$

Die Entwicklung von (77) nach den Summenzeigern σ ergibt vier Gleichungen, welche in gewöhnlicher Schreibweise den Maxwell-Lorentzschen Gleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\varrho\mathfrak{v}}{c}$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho$$

entsprechen.

Die antitensorische Erhöhung von $M_{\mu\nu}$ [vgl. (71)] verschwindet:

$$\nabla_\sigma M_{\mu\nu} = \nabla_\sigma M_{\mu\nu} + \nabla_\mu M_{\nu\sigma} + \nabla_\nu M_{\sigma\mu} = 0. \tag{78}$$

Die linke Seite von (78) stellt einen Antitensor 3. Ordnung dar, welcher nach früherem 24 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen besitzt, von denen aber nur vier numerisch verschieden sind. Das Nullsetzen dieser vier nach (78) entwickelten Bestimmungsgrößen entspricht in gewöhnlicher Schreibweise den Gleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0\,.$$

Mit Einführung der Ergänzung ließe sich (78) in Analogie zu (67) durch

$$\nabla_\sigma M^*_{\mu\sigma} = 0 \tag{79}$$

ersetzen.

Die Vierkraft

$$F\left\{\mathfrak{F} = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right]\right\};\ \frac{i}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{F})\right\},$$

ergibt sich als das innere Produkt der Vierdichte und des Feldtensors:

$$F_\sigma = P_\mu M_{\sigma\mu}. \tag{80}$$

F_σ läßt sich auch, wie im folgenden gezeigt werden soll, als Erniedrigung eines Tensors 2. Ordnung darstellen, welcher als „Spannungs-Energie-Tensor" in der R. T. eine wichtige Rolle spielt. — Wir setzen in (80) nach (77)

$$P_\mu = \nabla_\nu M_{\mu\nu}$$

ein und erhalten

$$F_\sigma = M_{\sigma\mu} \nabla_\nu M_{\mu\nu} = \nabla_\nu (M_{\sigma\mu} M_{\mu\nu}) - M_{\mu\nu} \nabla_\nu M_{\sigma\mu}.$$

Wenn im letzten Gliede die Summenzeiger μ und ν vertauscht werden, resultiert ein gleichwertiger Ausdruck, so daß es auch in der Form

$$\begin{aligned} - M_{\mu\nu} \nabla_\nu M_{\sigma\mu} &= -\tfrac{1}{2}(M_{\mu\nu} \nabla_\nu M_{\sigma\mu} + M_{\nu\mu} \nabla_\mu M_{\sigma\nu}) \\ &= -\tfrac{1}{2} M_{\mu\nu} (\nabla_\nu M_{\sigma\mu} + \nabla_\mu M_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Nach (78) ist aber der Ausdruck in der runden Klammer gleich $-\nabla_\sigma M_{\mu\nu}$, so daß

$$- M_{\mu\nu} \nabla_\nu M_{\sigma\mu} = \tfrac{1}{2} M_{\mu\nu} \nabla_\sigma M_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4} \nabla_\sigma (M_{\mu\nu} M_{\mu\nu})$$

und damit

$$F_\sigma = \nabla_\nu (M_{\sigma\mu} M_{\mu\nu}) + \tfrac{1}{4} \nabla_\sigma (M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}). \tag{81}$$

In dem ersten Glied der rechten Seite ist über die Summenzeiger ν, μ zu summieren, wobei ∇_ν alle Werte von

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ bis } \nabla_4 = \frac{\partial}{i c \partial t}$$

annimmt; unter diesen Werten befindet sich auch das ∇_σ des zweiten Gliedes. Mit Einführung des speziellen Tensors 2. Ordnung $\delta_{\sigma\nu}$ [vgl. (14)] lassen sich die beiden genannten Glieder zusammenfassen:

$$F_\sigma = \nabla_\nu (M_{\sigma\mu} M_{\mu\nu} + \tfrac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}). \tag{81a}$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß F_σ als Erniedrigung eines Tensors 2. Ordnung in der Form

$$F_\sigma = \nabla_\nu \overline{T}_{\sigma\nu} \tag{81b}$$

dargestellt werden kann, wobei

$$\overline{T}_{\sigma\nu} = - M_{\sigma\mu} M_{\nu\mu} + \tfrac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}. \tag{82}$$

Diese Bildung ist der gesuchte Spannungs-Energie-Tensor für den leeren Raum; $\overline{T}_{\sigma\nu}$ ist symmetrisch (durch Überstreichung des Symbols bezeichnet), da die Vertauschung der Ordnungszeiger σ, ν die Bestimmungsgrößen ungeändert läßt.

Das zweite Glied der rechten Seite von (82) kommt nur für jene Bestimmungsgrößen von $\overline{T}_{\sigma\nu}$ in Betracht, welche gleiche Zeiger besitzen ($\overline{T}_{11}$, $\overline{T}_{22}$, $\overline{T}_{33}$ und $\overline{T}_{44}$); hierbei ist $\delta_{\sigma\nu} = 1$. Für alle anderen Bestimmungsgrößen verschwindet das genannte Glied, da $\delta_{\sigma\nu} = 0$.

Laue setzt den Spannungs-Energie-Tensor der Form

$$\overline{T}_{\sigma\nu} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{M}^*_{\sigma\mu}\boldsymbol{M}^*_{\nu\mu} - \boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\boldsymbol{M}_{\nu\mu}) \tag{82a}$$

entsprechend an, welche mit (82) identisch ist, da die Ausrechnung die Beziehung

$$\boldsymbol{M}^*_{\sigma\mu}\boldsymbol{M}^*_{\nu\mu} = -\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\boldsymbol{M}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{2}\delta_{\sigma\nu}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta} \tag{83}$$

ergibt.

17. *Elektrodynamik ponderabler Körper.* — Beim Vorhandensein ponderabler Körper wird das elektromagnetische Feld durch die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ beschrieben, deren Komponenten als die numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen zweier Antitensoren 2. Ordnung, nämlich des „Feldtensors“

$$\boldsymbol{M}_{\mu\nu}(\mathfrak{B};\ -i\mathfrak{E})$$

und des „Verschiebungstensors“

$$\boldsymbol{V}_{\mu\nu}(\mathfrak{H};\ -i\mathfrak{D})$$

angesehen werden können.

Die Erniedrigung des Feldtensors bestimmt den Viererstrom

$$P_\mu\left\{\frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{v});\ i\varrho\right\}:$$

$$\nabla_\sigma \boldsymbol{M}_{\mu\sigma} = P_\mu. \tag{84}$$

In gewöhnlicher Schreibweise entsprechen den vier Gleichungen (84) die durch den Konvektionsstrom ergänzten Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{v})$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho\,.$$

Die antitensorische Erhöhung des Verschiebungstensors verschwindet:

$$\nabla_\sigma \boldsymbol{V}_{\mu\nu} = \nabla_\sigma \boldsymbol{V}_{\mu\nu} + \nabla_\mu \boldsymbol{V}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \boldsymbol{V}_{\sigma\mu}; \tag{85}$$

im Sinne der Bemerkungen zu (78) entwickelt, ergibt (85) die Gleichungen

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$$

und

$$\text{div}\,\mathfrak{B} = 0\ .$$

Um die für isotrope Körper nach der Maxwellschen Theorie geltenden Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$$

und

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$$

in vierdimensionaler Schreibweise auszudrücken, führen wir mit Benutzung der Vierergeschwindigkeit Y_σ vier neue Tensorbildungen ein. Die Bestimmungsgrößen von Y_σ sind[1]):

$$(86)\qquad \begin{cases} Y_{(1,2,3)} = \dfrac{\mathfrak{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \varkappa\,\mathfrak{q}, \\ Y_4 = \dfrac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = i\varkappa, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(87)\qquad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{v}}{c};\quad q = \frac{v}{c}$$

und

$$(88)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} = \varkappa$$

gesetzt wurde. — Für das innere Produkt der Vierergeschwindigkeit mit sich selbst ergibt die Ausrechnung

$$(89)\qquad Y_\sigma Y_\sigma = -1\,.$$

Durch innere Multiplikation der Vierergeschwindigkeit mit dem Feldtensor erhalten wir den Vierervektor

$$90)\qquad E_\mu = Y_\sigma M_{\mu\sigma};$$

die Ausrechnung seiner Bestimmungsgrößen ergibt:

$$(90a)\qquad \begin{cases} E_{(1,2,3)} = \varkappa\{\mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}]\} = \varkappa\,\mathfrak{E}^*, \\ E_4 = i\varkappa(\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}) = i\varkappa(\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}^*), \end{cases}$$

wobei mit Laue[2])

1) Vgl. etwa M. v. Laue, l. c. p. 69.
2) p. 149.

(91) $$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}]$$

gesetzt ist („elektrische treibende Kraft") .

Die innere Multiplikation der Vierergeschwindigkeit mit dem Verschiebungstensor ergibt den Vierervektor

(92) $$D_\mu = Y_\sigma V_{\mu\sigma}$$

mit den Bestimmungsgrößen

(92a) $$\begin{cases} D_{(1,2,3)} = \varkappa\{\mathfrak{D} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}]\} = \varkappa\,\mathfrak{D}^*, \\ D_4 \quad\;\; = i\varkappa(\mathfrak{q}\,\mathfrak{D}) = i\varkappa(\mathfrak{q}\,\mathfrak{D}^*), \end{cases}$$

wobei

(93) $$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}] .$$

Für $\mathfrak{q} = 0$ (Ruhesystem) reduziert sich $E_{(1,2,3)}$ auf $\mathfrak{E}$, $D_{(1,2,3)}$ auf $\mathfrak{D}$, E_4 und D_4 verschwinden. Dieser Umstand legt es nahe, für isotrope Körper den Ansatz

(94) $$D_\mu = \varepsilon E_\mu$$

zu machen, welcher in gewöhnlicher Schreibweise die Beziehung

(94a) $$\mathfrak{D}^* = \varepsilon\,\mathfrak{E}^*$$

ausdrückt.

Das äußere Antitensorprodukt der Vierergeschwindigkeit mit dem Feldtensor führt auf den Antitensor 3. Ordnung

(95) $$B_{\sigma\mu\nu} = \underline{Y_\sigma M_{\mu\nu}} = Y_\sigma M_{\mu\nu} + Y_\mu M_{\nu\sigma} + Y_\nu M_{\sigma\mu}$$

mit 24 von Null verschiedenen (4 numerisch verschiedenen) Bestimmungsgrößen, welche nachstehend zusammengestellt sind:

(95a) $$\begin{cases} B_{234} = -B_{243} = B_{342} = -B_{324} = B_{423} = -B_{432} \\ \qquad\qquad = i\varkappa\mathfrak{B}_x^*, \\ B_{143} = -B_{134} = B_{431} = -B_{413} = B_{314} = -B_{341} \\ \qquad\qquad = i\varkappa\mathfrak{B}_y^*, \\ B_{412} = -B_{421} = B_{124} = -B_{142} = B_{241} = -B_{214} \\ \qquad\qquad = i\varkappa\mathfrak{B}_z^*, \\ B_{321} = -B_{312} = B_{213} = -B_{231} = B_{132} = -B_{123} \\ \qquad\qquad = -\varkappa(\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}^*) . \end{cases}$$

Dabei ist

(96) $$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - [\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}]$$

gesetzt. — Schließlich ergibt das äußere Antitensorprodukt der Vierergeschwindigkeit mit dem Verschiebungstensor den Antitensor 3. Ordnung

(97) $$H_{\sigma\mu\nu} = \underline{Y_\sigma V_{\mu\nu}} = Y_\sigma V_{\mu\nu} + Y_\mu M_{\nu\sigma} + Y_\nu M_{\sigma\mu},$$

mit den Bestimmungsgrößen

$$(97a)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{H}_{234} = i\varkappa \mathfrak{H}_x^*, \\ \boldsymbol{H}_{143} = i\varkappa \mathfrak{H}_y^*, \\ \boldsymbol{H}_{412} = i\varkappa \mathfrak{H}_z^*, \\ \boldsymbol{H}_{321} = -\varkappa (\mathfrak{q}\, \mathfrak{H}^*), \end{cases}$$

wobei

$$(98)\qquad \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - [\mathfrak{q}\, \mathfrak{D}] .$$

Die ersten drei numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen von $\boldsymbol{B}_{\sigma\mu\nu}$ reduzieren sich für $\mathfrak{q} = 0$ nach (95a) auf die Komponenten von $\mathfrak{B}$, die von $\boldsymbol{H}_{\sigma\mu\nu}$ nach (97a) auf die Komponenten von $\mathfrak{H}$, so daß in Analogie zu (94) der Ansatz

$$(99)\qquad \boldsymbol{B}_{abc} = \mu \boldsymbol{H}_{abc},$$

gemacht werden kann, welcher 24 Gleichungen zwischen den von Null verschiedenen Bestimmungsgrößen der Antitensoren $\boldsymbol{B}_{abc}$ und $\boldsymbol{H}_{abc}$ umfaßt; je sechs dieser Gleichungen sind aber identisch, so daß nur vier verschiedene Gleichungen übrigbleiben, welche in gewöhnlicher Schreibweise die Beziehung

$$\mathfrak{B}^* = \mu \mathfrak{H}^*$$

zum Ausdruck bringen.

Bei Einführung der Ergänzungen von $\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ und $\boldsymbol{V}_{\mu\nu}$ ließe sich (95) und (97) durch

$$(100)\qquad B_\mu = Y_\sigma \boldsymbol{M}^*_{\mu\sigma}$$

bzw.

$$(101)\qquad H_\mu = Y_\sigma \boldsymbol{V}^*_{\mu\sigma}$$

und (99) durch

$$(102)\qquad B_\mu = \mu H_\mu,$$

ersetzen.[1]) Es wird wohl dadurch die Einführung von Antitensoren 3. Ordnung vermieden, doch bedeutet dies keine Vereinfachung.

Mit Benutzung der vorstehend behandelten Bildungen läßt sich der Minkowskische Ruhestrahl[2]) in der Form

$$(103)\qquad \Omega_\sigma = Y_a E_b \boldsymbol{H}_{\sigma ab}$$

darstellen. Wir wollen hier als Beispiel die Bestimmungs-

1) Vgl. M. v. Laue, l. c. p. 150.

2) H. Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. B. G. Teubner 1910. p. 35.

größe Ω_1 tatsächlich ausrechnen. Auf der rechten Seite von (103) ist über alle Variationen der Summenzeiger a, b zu summieren. Da aber $\boldsymbol{H}_{\sigma a b}$ ein Antitensor ist, verschwinden alle Summanden, für die $a = b$, und auch jene, für die $a = b = \sigma$ ist; die übrigbleibenden Variationen der Summenzeiger sind daher: 23, 24, 32, 34, 42, 43, so daß

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= Y_2 E_3 H_{123} + Y_2 E_4 H_{124} + Y_3 E_2 H_{132} + Y_3 E_4 H_{134} \\ &\qquad + Y_4 E_2 H_{142} + Y_4 E_3 H_{143}, \\ &= (Y_2 E_3 - Y_3 E_2) H_{123} + (Y_2 E_4 - Y_4 E_2) H_{124} \\ &\qquad + (Y_3 E_4 - Y_4 E_3) H_{134}.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der früher angegebenen Werte für die Bestimmungsgrößen von Y_a, E_b und $\boldsymbol{H}_{\sigma a b}$ erhalten wir

$$\Omega_1 = \varkappa^3 \{[\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}^*]_x (\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}^*) - [\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}^*]_x (\mathfrak{q}\,\mathfrak{E}^*) + [\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]_x\};$$

analoge Ausdrücke ergeben sich für die Bestimmungsgrößen Ω_2 und Ω_3, die wir mit Ω_1 zu

$$\Omega_{(1,2,3)} = \varkappa^3 \{[\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,[\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]]] + [\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]\}$$

zusammenfassen. Wenn wir das dreifache Vektorprodukt in die Differenz

$$\mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]) - q^2\,[\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]$$

auflösen und die nach (88) geltende Beziehung

$$\varkappa^2 (1 - q^2) = 1 \tag{104}$$

berücksichtigen, wird schließlich

$$\begin{cases} \Omega_{(1,2,3)} = \varkappa\,[\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*] + \varkappa^3\,\mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]); \\ \Omega_4 \quad\;\; = i\varkappa^3 (\mathfrak{q}\,[\mathfrak{E}^*\,\mathfrak{H}^*]), \end{cases} \tag{103 a}$$

ergibt sich analog. — Für $\mathfrak{q} = 0$ reduziert sich $\Omega_{(1,2,3)}$ auf $[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]$, den durch die Lichtgeschwindigkeit c dividierten Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]$.

Der Minkowskische Ruhestrahl ließe sich nach (67) auch in der Form

$$\Omega_i = Y_k \boldsymbol{S}_{ik}^*$$

schreiben, wobei

$$\boldsymbol{S}_{ik}^* = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{I}_{iklm} \underline{E_l H_m}.$$

Eine dem Ruhestrahl analoge Bildung ist der Vierervektor

$$\varepsilon \mu\, \Omega_\sigma = Y_a D_b \boldsymbol{V}_{\sigma a b}; \tag{105}$$

die Bestimmungsgrößen desselben ergeben sich aus den Gleichungen (103a), wenn in ihnen $\mathfrak{E}^*$ durch $\mathfrak{D}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ durch $\mathfrak{B}^*$ ersetzt wird. Von Wichtigkeit ist ferner die Bildung

$$\Omega_\sigma' = (\varepsilon\mu - 1)\,\Omega_\sigma = Y_a(D_b B_{\sigma ab} - E_b H_{\sigma ab}) \tag{106}$$

mit den Bestimmungsgrößen

$$\begin{cases} \Omega'_{(1,2,3)} = \varkappa\{[\mathfrak{D}^*\mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^*\mathfrak{H}^*]\} + \varkappa^3 \mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{D}^*\mathfrak{B}^*] \\ \qquad\qquad - [\mathfrak{E}^*\mathfrak{H}^*]), \\ \Omega_4' \quad = i\varkappa^3(\mathfrak{q}\,,\,[\mathfrak{D}^*\mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^*\mathfrak{H}^*]). \end{cases} \tag{106a}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{W} = \varkappa^2\{[\mathfrak{D}^*\mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^*\mathfrak{H}^*] + \varkappa^2\,\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\,,\,[\mathfrak{D}^*\mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^*\mathfrak{H}^*])\};$$

damit wird

$$\begin{cases} \Omega'_{(1,2,3)} = \dfrac{\mathfrak{W}}{\varkappa}, \\ \Omega'_4 \quad = \dfrac{i}{\varkappa}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{W}). \end{cases} \tag{107}$$

18. *Der Spannungs-Energie-Tensor für ponderable Körper.* — In (82) haben wir den Spannungs-Energie-Tensor für den leeren Raum in der Form

$$\overline{T}_{\sigma\nu} = -\,\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\,\boldsymbol{M}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\,\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}$$

abgeleitet, welcher dort durch den Feldtensor $\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ bestimmt ist. In der Elektrodynamik ponderabler Körper haben wir jedoch zwischen dem Feldtensor $\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ und dem Verschiebungstensor $\boldsymbol{V}_{\mu\nu}$ zu unterscheiden, und fragt es sich, wie in diesem Falle der Spannungs-Energie-Tensor anzusetzen ist. Man könnte zunächst daran denken, den Ansatz (82) in

$$T''_{\sigma\nu} = -\,\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\,\boldsymbol{V}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\,\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{V}_{\alpha\beta} \tag{108}$$

oder

$$T'''_{\sigma\nu} = T''_{\nu\sigma} = -\,\boldsymbol{V}_{\sigma\mu}\,\boldsymbol{M}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{4}\,\delta_{\sigma\nu}\,\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{V}_{\alpha\beta}, \tag{109}$$

abzuändern; die ersten Glieder auf der rechten Seite von (108) und (109) sind nicht gleich, da sie sich durch vertauschte Ordnungszeiger unterscheiden (konjugierte Tensoren).

Die Ansätze (108) und (109) haben den „Schönheitsfehler", daß sie nicht symmetrisch sind; wir erhalten einen symmetrischen Ansatz in ihrer halben Summe

$$(110)\quad \begin{cases} \overline{T}'_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}(T''_{\sigma\nu} + T'''_{\sigma\nu}) \\ \quad = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\boldsymbol{V}_{\nu\mu} + \boldsymbol{M}_{\nu\mu}\boldsymbol{V}_{\sigma\mu}) + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_{\alpha\beta}. \end{cases}$$

Der Ausdruck in der runden Klammer ist das gemischte symmetrische Produkt $\overline{\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\boldsymbol{V}_{\nu\mu}}$ [vgl. (58)], so daß wir auch

$$(110a)\qquad \overline{T}'_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\boldsymbol{V}_{\nu\mu}} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_{\alpha\beta}$$

schreiben können.

Die Ansätze (108), (109) und (110) gehen zwar in (82) über, wenn $\boldsymbol{V}_{\mu\nu} = \boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ gesetzt wird, so daß sie in dieser Hinsicht gleichwertig sind. Dies genügt aber noch nicht, da keiner dieser Ansätze die Geschwindigkeit der ponderablen Körper enthält. Grammel hat nun gezeigt[1]), daß die genannten drei Ansätze durch Zusatzglieder ergänzt werden müssen, damit ihre nach (81b) gebildeten Erniedrigungen befriedigende Ausdrücke für die Viererkraft ergeben. Am Schlusse dieser Arbeit wird bemerkt:

„Der Unterschied zwischen den drei Ansätzen macht sich ... erst bemerkbar, wenn man es mit veränderlicher Geschwindigkeit der Materie zu tun hat. Allerdings nehmen Impuls- und Energiesatz schon für gleichförmig bewegte Körper bei den drei Ansätzen verschiedene Formen an."

Das letztere ist nun in Wirklichkeit nicht der Fall, sondern es sind die nach Grammel ergänzten Tensoransätze, wie weiter unten gezeigt wird, vollkommen identisch.

Wir wollen daher im folgenden von dem symmetrischen Ansatz (110) ausgehen, den Grammel durch das (halbe) äußere symmetrische Produkt der Vierervektoren Y_σ und Ω'_ν [vgl. (106)]

$$(111)\qquad \overline{Y_\sigma \Omega'_\nu} = Y_\sigma \Omega'_\nu + Y_\nu \Omega'_\sigma$$

ergänzt. Der Spannungs-Energie-Tensor für ponderable Körper ergibt sich dann in der Form

$$(112)\quad \overline{T}_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{M}_{\sigma\mu}\boldsymbol{V}_{\nu\mu}} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overline{Y_\sigma \Omega'_\nu};$$

seine Bestimmungsgrößen sind

---

1) R. Grammel, Zur relativitätstheoretischen Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. 41. p. 570ff. 1913.

$$
\left\{
\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\right\} + \mathfrak{q}_x\mathfrak{W}_x \\
T_{22} &= \frac{1}{2}\left\{-\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\right\} + \mathfrak{q}_y\mathfrak{W}_y \\
T_{33} &= \frac{1}{2}\left\{-\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\right\} + \mathfrak{q}_z\mathfrak{W}_z \\
T_{44} &= \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\right\} - (\mathfrak{q}\mathfrak{W}) \\
T_{23} &= T_{32} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{W}_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{W}_y\right\} \\
T_{31} &= T_{13} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z + \mathfrak{q}_z\mathfrak{W}_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{W}_z\right\} \\
T_{12} &= T_{21} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x + \mathfrak{q}_x\mathfrak{W}_y + \mathfrak{q}_y\mathfrak{W}_x\right\} \\
T_{14} &= T_{41} = -\frac{i}{2}\left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x - \mathfrak{W}_x - \mathfrak{q}_x(\mathfrak{q}\mathfrak{W})\right\} \\
T_{24} &= T_{42} = -\frac{i}{2}\left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_y - \mathfrak{W}_y - \mathfrak{q}_y(\mathfrak{q}\mathfrak{W})\right\} \\
T_{34} &= T_{43} = -\frac{i}{2}\left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z + [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_z - \mathfrak{W}_z - \mathfrak{q}_z(\mathfrak{q}\mathfrak{W})\right\}.
\end{aligned}
\right. \tag{112a}
$$

Die Erniedrigung des Spannungs-Energie-Tensors (112) ist die Viererkraft für ponderable Körper

$$F_\sigma = \nabla_\nu \overline{T}_{\sigma\nu}. \tag{113}$$

19. Für die weiteren Entwicklungen sind einige Zwischenrechnungen erforderlich. — Wir betrachten zunächst das äußere Antitensorprodukt

$$\underline{Y_\sigma \Omega'_\nu} = Y_\sigma \Omega'_\nu - Y_\nu \Omega'_\sigma, \tag{114}$$

welches in verschiedener Weise umgeformt werden kann.

a) Wir setzen in (106)

$$\boldsymbol{D}_b = Y_c \boldsymbol{V}_{bc} \text{ [nach (92)]},$$
$$\boldsymbol{E}_b = Y_c \boldsymbol{M}_{bc} \text{ [nach (90)]},$$
$$\boldsymbol{B}_{\sigma ab} = \underline{Y_\sigma \boldsymbol{M}_{ab}} = Y_\sigma \boldsymbol{M}_{ab} + Y_a \boldsymbol{M}_{b\sigma} + Y_b \boldsymbol{M}_{\sigma a} \text{ [nach (95)]},$$
$$\boldsymbol{H}_{\sigma ab} = \underline{Y_\sigma \boldsymbol{V}_{ab}} = Y_\sigma \boldsymbol{V}_{ab} + Y_a \boldsymbol{V}_{b\sigma} + Y_b \boldsymbol{V}_{\sigma a} \text{ [nach (97)]},$$

und erhalten

$$\Omega_\sigma' = Y_a Y_c \boldsymbol{V}_{bc} Y_\sigma \boldsymbol{M}_{ab} + Y_a Y_c \boldsymbol{V}_{bc} Y_a \boldsymbol{M}_{b\sigma} + Y_a Y_c \boldsymbol{V}_{bc} Y_b \boldsymbol{M}_{\sigma a}$$
$$- Y_a Y_c \boldsymbol{M}_{bc} Y_\sigma \boldsymbol{V}_{ab} - Y_a Y_c \boldsymbol{M}_{bc} Y_a \boldsymbol{V}_{b\sigma} - Y_a Y_c \boldsymbol{M}_{bc} Y_b \boldsymbol{V}_{\sigma a}.$$

Die ersten zwei untereinander stehenden Glieder sind, wie sich durch Vertauschung der Summenzeiger a und c ergibt, numerisch gleich und heben sich bei der Subtraktion weg; die beiden letzten Glieder enthalten die nach (75) verschwindenden Ausdrücke

$$Y_b Y_c \boldsymbol{V}_{bc} \quad \text{bzw.} \quad Y_b Y_c \boldsymbol{M}_{bc}$$

und sind daher selbst Null. Wenn wir in den zwei übrigbleibenden Gliedern nach (89)

$$Y_a Y_a = -1$$

setzen, wird

$$(115) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_\sigma' &= - Y_c \boldsymbol{V}_{bc} \boldsymbol{M}_{b\sigma} + Y_c \boldsymbol{M}_{bc} \boldsymbol{V}_{b\sigma} \\ &= \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{M}_{\sigma b} - \boldsymbol{E}_b \boldsymbol{V}_{\sigma b}. \end{aligned} \right.$$

Wir schreiben nun die folgenden drei Gleichungen untereinander:

$$Y_\sigma \Omega_\nu' = Y_c \boldsymbol{V}_{bc} Y_\sigma \boldsymbol{M}_{\nu b} - Y_c \boldsymbol{M}_{bc} Y_\sigma \boldsymbol{V}_{\nu b}$$
$$- Y_\nu \Omega_\sigma' = Y_c \boldsymbol{V}_{bc} Y_\nu \boldsymbol{M}_{b\sigma} - Y_c \boldsymbol{M}_{bc} Y_\nu \boldsymbol{V}_{b\sigma}$$
$$0 = Y_c \boldsymbol{V}_{bc} Y_b \boldsymbol{M}_{\sigma\nu} - Y_c \boldsymbol{M}_{bc} Y_b \boldsymbol{V}_{\sigma\nu}.$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben sich durch äußere Multiplikation von (115) mit der Vierergeschwindigkeit, die dritte ist wegen (89) erfüllt; ihre Summe ergibt

$$(116) \quad Y_\sigma \Omega_\nu' - Y_\nu \Omega_\sigma' = Y_c \boldsymbol{V}_{bc} \underline{Y_\sigma \boldsymbol{M}_{\nu b}} - Y_c \boldsymbol{M}_{bc} \underline{Y_\sigma \boldsymbol{V}_{\nu b}}$$

oder

$$(116\,a) \quad \underline{Y_\sigma \Omega_\nu'} = \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{B}_{\sigma\nu b} - \boldsymbol{E}_b \boldsymbol{H}_{\sigma\nu b} = (\varepsilon\mu - 1) \boldsymbol{E}_b \boldsymbol{H}_{\sigma\nu b}.$$

b) Um eine andere Darstellung für das äußere Antitensorprodukt $\underline{Y_\sigma \Omega_\nu'}$ zu gewinnen, gehen wir von dem gemischten Produkt

$$\boldsymbol{H}_{\nu bc} \boldsymbol{B}_{\sigma bc} = \underline{Y_\nu \boldsymbol{V}_{bc}} \, \underline{Y_\sigma \boldsymbol{M}_{bc}}$$

aus und entwickeln darin zunächst $\underline{Y_\nu \boldsymbol{V}_{bc}}$ nach (97):

$$(117)\quad \left\{ \begin{aligned} H_{\nu bc} B_{\sigma bc} = {} & Y_\nu V_{bc} \underline{Y_\sigma M_{bc}} + Y_b V_{c\nu} \underline{Y_\sigma M_{bc}} \\ & + Y_c V_{\nu b} \underline{Y_\sigma M_{bc}} . \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied der rechten Seite gibt bei der Entwicklung des Antitensorprodukts

$$Y_\nu V_{bc} Y_\sigma M_{bc} + Y_\nu V_{bc} Y_b M_{c\sigma} + Y_\nu V_{bc} Y_c M_{\sigma b};$$

die beiden letzten Glieder des vorstehenden Ausdruckes sind gleich (ergibt sich durch Vertauschung der Summenzeiger b und c) und können zu

$$2 Y_\nu V_{bc} Y_b M_{c\sigma} = -2 D_c Y_\nu M_{c\sigma}$$

zusammengefaßt werden.

Die beiden letzten Glieder von (117) sind ebenfalls gleich; wir fassen sie zu

$$2 Y_b V_{c\nu} \underline{Y_\sigma M_{bc}}$$

zusammen und entwickeln $\underline{Y_\sigma M_{bc}}$:

$$\begin{aligned} 2 Y_b V_{c\nu} Y_\sigma M_{bc} + 2 Y_b V_{c\nu} Y_b M_{c\sigma} + 2 Y_b V_{c\nu} Y_c M_{\sigma b} \\ = 2 E_c Y_\sigma V_{\nu c} - 2 M_{\sigma c} V_{\nu c} - 2\varepsilon E_\sigma E_\nu . \end{aligned}$$

Wenn wir die umgeformten Glieder der rechten Seite von (117) zusammenfassen und auf der linken Seite

$$B_{\sigma bc} = \mu H_{\sigma bc}$$

setzen, erhalten wir

$$(117a)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu H_{\nu bc} H_{\sigma bc} = {} & -2 D_c Y_\nu M_{c\sigma} + 2 E_c Y_\sigma V_{\nu c} \\ & - 2 M_{\sigma c} V_{\nu c} + Y_\nu Y_\sigma M_{bc} V_{bc} - 2\varepsilon E_\sigma E_\nu . \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns nun aus (117a) durch Vertauschung der Ordnungszeiger ν und σ eine zweite Gleichung gebildet, welche wir von der angeschriebenen subtrahieren. Dabei heben sich die linken Seiten und die beiden letzten Glieder der rechten Seiten weg; es bleibt übrig

$$\begin{aligned} 0 = {} & -D_c (Y_\sigma M_{\nu c} + Y_\nu M_{c\sigma}) + E_c (Y_\sigma V_{\nu c} + Y_\nu V_{c\sigma}) \\ & - (M_{\sigma c} V_{\nu c} - M_{\nu c} V_{\sigma c}) . \end{aligned}$$

Die Klammerausdrücke der ersten zwei Glieder auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung ergänzen wir durch

$$-D_c Y_c M_{\sigma\nu} = -Y_b V_{cb} Y_c M_{\sigma\nu} = 0 \text{ [wegen (75)]},$$

bzw.

$$E_c Y_c V_{\sigma\nu} = Y_b M_{cb} Y_c V_{\sigma\nu} = 0 ,$$

zu Antitensorprodukten und bringen sie auf die linke Seite:

$$(118)\qquad D_\varepsilon \underline{Y_\sigma M_{\nu\varepsilon}} - E_\varepsilon \underline{Y_\sigma V_{\nu\varepsilon}} = -(M_{\sigma\varepsilon} V_{\nu\varepsilon} - M_{\nu\varepsilon} V_{\sigma\varepsilon})$$

oder

$$(118a)\qquad D_\varepsilon B_{\sigma\nu\varepsilon} - E_\varepsilon H_{\sigma\nu\varepsilon} = -\underline{M_{\sigma\varepsilon} V_{\nu\varepsilon}}.$$

Da die linke Seite von (118a) nach (116a) dem Antitensorprodukt $\underline{Y_\sigma \Omega_\nu'}$ gleich ist, resultiert schließlich die wichtige Beziehung

$$(119)\qquad \boxed{\underline{Y_\sigma \Omega_\nu'} = -\underline{M_{\sigma\varepsilon} V_{\nu\varepsilon}}}.$$

Die den Werten $\sigma\nu = 23$, 31 und 12 entsprechenden Ausrechnungen von (119) lassen sich in gewöhnlicher Schreibweise zu

$$(120)\qquad [\mathfrak{q}\,\mathfrak{W}] = [\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}] + [\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}],$$

jene für $\sigma\nu = 14$, 24, 34 zu

$$(121)\qquad -i\{\mathfrak{W} - \mathfrak{q}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{W})\} = -i\{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\},$$

zusammenfassen. Aus der letzten Gleichung ergibt sich für den in (107) eingeführten Vektor $\mathfrak{W}$ die Ausdrucksform

$$(122)\qquad \mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{W}),$$

in Übereinstimmung mit Abraham.[1])

Da

$$\begin{aligned}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{W}) &= (\mathfrak{q}, [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]) + q^2\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{W}) \\ &= \varkappa^2\,(\mathfrak{q}, [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]),\end{aligned}$$

wird auch

$$(122a)\qquad \mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] + \varkappa^2\,\mathfrak{q}\,(\mathfrak{q}, [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]).$$

Aus (120) und (121) folgt auch die auf einem anderen Wege ziemlich umständlich zu beweisende Beziehung

$$(123)\qquad (\mathfrak{q}, [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]) = [\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}] + [\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}].$$

20. *Die Ermittlung der Viererkraft für ponderable Körper.* — Um zunächst zu zeigen, daß die nach Grammel ergänzten Tensoransätze identisch sind, schreiben wir die Gleichungen (112) und (119) untereinander:

$$(124)\qquad \begin{cases} \bar{T}_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2} M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu} - \frac{1}{2} M_{\nu\mu} V_{\sigma\mu} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2} Y_\sigma \Omega_\nu' + \frac{1}{2} Y_\nu \Omega_\sigma', \\ 0 = -\frac{1}{2} M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu} + \frac{1}{2} M_{\nu\mu} V_{\sigma\mu} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2} Y_\sigma \Omega_\nu' + \frac{1}{2} Y_\nu \Omega_\sigma'; \end{cases}$$

ihre Summe

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. Bd. B. G. Teubner 1914. p. 311.

(124a) $\overline{T}_{\sigma\nu} = - M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M'_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + Y_\nu \Omega'_\sigma$

entspricht dem durch das Zusatzglied $Y_\nu \Omega'_\sigma$ ergänzten Ansatz (108) (Grammel bezeichnet den ergänzten Ansatz mit S''[1]), ihre Differenz

(124b) $\overline{T}_{\sigma\nu} = - M_{\nu\mu} V_{\sigma\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + Y_\sigma \Omega'_\nu ,$

dem durch $Y_\sigma \Omega'_\nu$ ergänzten Ansatz (109) (bei Grammel S_c'').[2])

Die drei Grammelschen Ansätze sind daher vollständig gleichwertig und unterscheiden sich nur durch die Schreibweise. In (124) kommt die Symmetrie des Ansatzes unmittelbar zum Ausdruck, während dies in (124a) und (124b) nicht der Fall ist.

Ein anderer Weg für die Ermittlung des Spannungs-Energie-Tensors für ponderable Körper, welcher dem Sinne der sp. R. T. besser entspricht, besteht darin, daß man einen durch die Erfahrung bestätigten Ansatz für ruhende Körper „auf Bewegung" transformiert. Dieser Weg ist aber schon für den Fall, daß die Bewegung parallel zu einer Achse des Ruhesystems angenommen wird, ziemlich umständlich; die dabei erhaltenen Ausdrücke für die Tensorbestimmungsgrößen gestatten auch keine eindeutigen Schlüsse auf anders gerichtete Bewegungen.

Die Viererkraft ist nach (113)

$$F_\sigma = \nabla_\nu \overline{T}_{\sigma\nu} .$$

Aus formalen Gründen wählen wir für $\overline{T}_{\sigma\nu}$ die Schreibweise (124a); bei der Ausführung der differentiellen Operation erhalten wir

(125) $$F_\sigma = - M_{\sigma\mu} \nabla_\nu V_{\nu\mu} + Y_\nu \nabla_\nu \Omega'_\sigma + Z_\sigma ,$$

wobei

(126) $$Z_\sigma = - V_{\nu\mu} \nabla_\nu M_{\sigma\mu} + \frac{1}{4} \nabla_\sigma (M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}) .$$

Umformung von Z_σ. — Das erste Glied der rechten Seite von (126) läßt sich ähnlich wie im Abschnitt 16 der Ausdruck $- M_{\nu\mu} \nabla_\nu M_{\sigma\mu}$ auf die Form

$$- \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \nabla_\sigma M_{\mu\nu}$$

bringen. Für die Umformung des zweiten Gliedes ziehen wir das innere Produkt

---

1) R. Grammel, l. c. p. 576, zweite Gleichung (31).
2) p. 576, dritte Gleichung (31).

$$H_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta\gamma} = \underline{Y_\alpha V_{\beta\gamma}}\, \underline{Y_\alpha M_{\beta\gamma}}$$

heran; wenn wir $\underline{Y_\alpha V_{\beta\gamma}}$ entwickeln, resultieren drei gleichwertige Summanden, so daß wir schreiben können:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta\gamma} &= 3 Y_\alpha V_{\beta\gamma} \underline{Y_\alpha M_{\beta\gamma}} \\ &= 3 Y_\alpha V_{\beta\gamma} Y_\alpha M_{\beta\gamma} + 3 Y_\alpha V_{\beta\gamma} Y_\beta M_{\gamma\alpha} \\ &\qquad + 3 Y_\alpha V_{\beta\gamma} Y_\gamma M_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Im ersten Gliede dieser Entwicklung ist $Y_\alpha Y_\alpha = -1$ zu setzen, die beiden letzten Glieder sind gleich und lassen sich zu

$$-6 Y_\beta V_{\gamma\beta} Y_\alpha M_{\gamma\alpha} = -6 D_\gamma E_\gamma$$

zusammenfassen; wir erhalten dann die Beziehung

(127) $$H_{\alpha\beta\gamma} \mu H_{\alpha\beta\gamma} = -3 V_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - 6 \varepsilon E_\alpha E_\alpha$$

und daraus

(128) $$M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} = -2 \varepsilon E_\alpha E_\alpha - \tfrac{1}{3} \mu H_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}.$$

Das letzte Glied von (128) kann mit Einführung des Vierervektors H_α [vgl. (101)] auch in der Form

$$-2 \mu H_\alpha H_\alpha$$

geschrieben werden.

Die Gleichung (128) ermöglicht nun die Umformung des zweiten Gliedes von Z_σ:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} \nabla_\sigma (M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}) &= -\tfrac{1}{2} E_\alpha E_\alpha \nabla_\sigma \varepsilon - \tfrac{1}{2} H_\alpha H_\alpha \nabla_\sigma \mu \\ &\quad - \varepsilon E_\alpha \nabla_\sigma E_\alpha - \tfrac{1}{6} H_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\sigma (\mu H_{\alpha\beta\gamma}). \end{aligned}$$

In dem letzten Gliede des vorstehenden Ausdrucks ist μ bei der Differentiation als konstant zu betrachten. Aus (127) folgt weiter

$$-\varepsilon E_\alpha \nabla_\sigma E_\alpha - \tfrac{1}{6} H_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\sigma (\mu H_{\alpha\beta\gamma}) = \tfrac{1}{2} V_{\alpha\beta} \nabla_\sigma M_{\alpha\beta},$$

welcher Ausdruck sich mit dem für das erste Glied von Z_σ erhaltenen weghebt. Es ist demnach

(126a) $$Z_\sigma = -\tfrac{1}{2} E_\alpha E_\alpha \nabla_\sigma \varepsilon - \tfrac{1}{2} H_\alpha H_\alpha \nabla_\sigma \mu$$

und damit

(125a) $$\left\{ \boxed{\begin{aligned} F_\sigma = &- M_{\sigma\mu} \nabla_\nu V_{\nu\mu} + Y_\nu \nabla_\nu \Omega_\sigma' - \tfrac{1}{2} E_\alpha E_\alpha \nabla_\sigma \varepsilon \\ &- \tfrac{1}{2} H_\alpha H_\alpha \nabla_\sigma \mu. \end{aligned}} \right.$$

Dies ist der vollständige Ausdruck der Viererkraft für beschleunigungsfrei bewegte isotrope Körper. Für homogene

Körper verschwinden die Erhöhungen $\nabla_\sigma \varepsilon$ und $\nabla_\sigma \mu$; es ist dann $Z_\sigma = 0$ und

$$F_\sigma = - \boldsymbol{M}_{\sigma\mu} \nabla_\nu \boldsymbol{V}_{\nu\mu} + I_\nu \nabla_\nu \Omega_\sigma' . \tag{129}$$

Die Ausrechnung der Bestimmungsgrößen von F_σ in (125a) ergibt in gewöhnlicher Schreibweise die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} F_{(1,2,3)} &= \varrho \mathfrak{E}^* + \tfrac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \tfrac{1}{c}\left\{(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{W} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right\} \\ &\quad - \tfrac{\varkappa^2}{2}\left\{\mathfrak{E}^{*2} - \tfrac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*)^2\right\}\nabla\varepsilon \\ &\quad - \tfrac{\varkappa^2}{2}\left\{\mathfrak{H}^{*2} - \tfrac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}^*)^2\right\}\nabla\mu \\ F_4 &= \tfrac{i}{c}\left\{\varrho(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*) + (\mathfrak{E}\mathfrak{J}) + \tfrac{1}{c}\left\{\left(\mathfrak{v},(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{W}\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right)\right\} + \tfrac{\varkappa^2}{2}\left\{\mathfrak{E}^{*2} - \tfrac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*)^2\right\}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \tfrac{\varkappa^2}{2}\left\{\mathfrak{H}^{*2} - \tfrac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}^*)^2\right\}\frac{\partial \mu}{\partial t}\right\}; \end{aligned}\right. \tag{125b}$$

dabei ist nach (91), (98) und (122)

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \tfrac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}],$$

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - \tfrac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}],$$

$$\mathfrak{W} = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \tfrac{\varkappa^2}{c^2}\mathfrak{v}\left(\mathfrak{v},[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\right).$$

Für homogene Körper verschwinden in (125b) die Gradienten $\nabla\varepsilon$ und $\nabla\mu$; für die zusammengefaßten Bestimmungsgrößen F_1, F_2 und F_3 der Viererkraft resultiert dann der Ausdruck

$$F_{(1,2,3)} = \varrho \mathfrak{E}^* + \tfrac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \tfrac{1}{c}\left\{(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{W} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right\},$$

welchen auch Abraham abgeleitet hat.[1])

1) M. Abraham, l. c. p. 314.

(Eingegangen 6. Juli 1918.)

2. *Spektrale Intensitätsverschiebung und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein magnetisches Feld;*

von W. Steubing.

Einleitung.

In einer kurzen Mitteilung[1]), die einige Zeit vor Ausbruch des Krieges erschien, gab der Verfasser Kenntnis von einem eigenartigen Effekt, den man beobachtet, wenn man fluoreszierenden Joddampf zwischen die Pole eines kräftigen Elektromagneten bringt. Es zeigt sich nämlich eine deutliche Intensitätsabnahme des Fluoreszenzlichtes, unabhängig von der Art der Anregung, die durch das kontinuierliche Spektrum einer Bogenlampe oder der Sonne, sowie durch einzelne Spektrallinien, z. B. von der Quecksilberlampe, erfolgen kann.

Im ersten Falle erhält man das bekannte Bandenspektrum des Joddampfes, im zweiten, als Teile desselben, bestimmte Linien oder Liniengruppen des nach R. W. Wood so benannten „Resonanzspektrums".

Die Hauptergebnisse einer Reihe von vorläufigen Versuchen, die in der erwähnten Mitteilung zusammengefaßt waren, zeigten, daß das Phänomen nichts mit Zeemaneffekt zu tun hatte, daß es unabhängig von der Orientierung des Feldes war, ferner, daß merkbare Absorptionsänderungen nicht auftraten, endlich, daß analoge Wirkungen bei den Dämpfen anderer fluoreszierender Elemente nicht zu erhalten waren. Rohe photometrische Messungen, bei denen auf die spektrale Zusammensetzung des Fluoreszenzlichtes keine Rücksicht genommen war, ergaben für die beobachtete Schwächung eine maximale Intensitätsabnahme um ca. 35 Proz. bei einem Magnetfelde von ca. 14000 Gauss.

1) Verhandl. d. deutsch.-phys. Ges. 1913. p. 1181.

Inzwischen sind meine Versuche von R. W. Wood[1]), der sich das Studium der Jodfluoreszenz besonders zur Aufgabe gemacht hat, wiederholt worden. Wood stellte fest, da er über einen erheblich kräftigeren Magneten verfügte, daß er bei einem Magnetfelde von 30000 Gauss eine Schwächung von 90 Proz. erhielt, wenn die Dampfdichte des Joddampfes auf 0° erniedrigt war, daß bei höherer Temperatur die Wirkung erheblich abnahm[2]), und er schätzt das zur völligen Vernichtung der Fluoreszenz erforderliche Magnetfeld auf 50000 Gauss. Zahlreiche Versuche, zu einer Erklärung des Phänomens zu kommen, blieben ergebnislos und bestätigen im übrigen nur meine obigen Angaben über das Fehlen von Absorptionswirkungen und Einflüssen der Feldrichtung. Durch den Ausbruch des Krieges mußte ich zunächst meine weiteren Versuche aussetzen und konnte aus diesem Grunde erst später, unter erheblicher Verzögerung und mannigfachen Schwierigkeiten, die Arbeit beenden.

Hauptteil.

Um die beobachtete Erscheinung zu erklären bzw. auf *bekannte* Tatsachen zurückzuführen, bieten sich folgende Möglichkeiten dar:

I. Das Magnetfeld kann Änderungen in der Absorption hervorrufen, d. h. es kann erstens durch Steigerung der Absorption des anregenden Lichtes im Fluoreszenzgefäße eine Verminderung des Fluoreszenzlichtes eintreten, und zweitens durch Steigerung des Absorptionsvermögens für das Fluoreszenzlicht selbst, Absorptionswirkungen des Magnetfeldes also, die einzeln oder zusammen sowohl eine allgemeine Schwächung des Fluoreszenzlichtes wie eine Farbenänderung (durch Verschiedenheit des Absorptionsindex mit der Frequenz) hervorrufen könnten.

II. Das Magnetfeld kann den Dampfzustand des fluoreszierenden Dampfes ändern, da bekanntlich die Fluoreszenzhelligkeit und -befähigung eines Gases und Dampfes außer von dem Drucke bzw. der Temperatur auch von dem Molekular-

1) R. W. Wood. Philos. Mag. 1914. p. 1016 ff.

2) Daß ein eigentlicher Temperatureffekt hier nicht vorliegt, darüber vgl. p. 86—89.

zustande (Zahl, Art der fluoreszenzfähigen Moleküle) in hohem Grade abhängig ist.

Zur Prüfung dieser beiden Möglichkeiten wurden zunächst die eingangs angeführten Absorptionsversuche, die keine Änderung der Gesamtabsorption, weder für das erregende noch für das erzeugte Fluoreszenzlicht ergeben hatten, mit veränderter Anordnung, mit stärkeren Feldern und bei verschiedenen Dampfdichten wiederholt. Die Untersuchung bereitet insofern Schwierigkeit, als es nicht möglich ist, genügend ausgedehnte Felder von größerer Intensität zu verwenden, was wiederum nötig ist, um größere Schichtdicken bei niedrigen Dampfdrucken des Jods zu erhalten. Denn die weiteren Versuche ergaben, daß der Effekt mit abnehmender Dampfdichte zunahm. *Mit Sicherheit ging jedoch aus allen Versuchen hervor, daß auf Grund von Absorptionsänderungen eine Erklärung der Erscheinung nicht zu geben war.*

Die geringfügigen Variationen der Absorption in den verschiedenen Spektralbezirken mit verringerter Dampfdichte werden weiterhin — bei den Spektralaufnahmen — angeführt werden. Es sei als wichtig hervorgehoben, daß der Effekt auch bei spektraler Untersuchung nichts mit Absorptionserscheinungen zu tun hat, daß sich also das der Spektrallage nach im allgemeinen mit dem Absorptionsbandenspektrum identische Fluoreszenzbandenspektrum des Jods in Emission grundsätzlich verschieden von ersterem verhält, wenn es in einem Magnetfelde erzeugt wird. *Man hat es hier lediglich mit einem Emissionseffekte zu tun.*

Es war weiterhin zu prüfen, ob das Jod im Dampfzustande irgend besonderen magnetischen Einflüssen unterlag. Die bekannten magnetischen Konstanten des festen Jods ergaben keinerlei Besonderheiten vor anderen ähnlichen Körpern. Immerhin erschien es ratsam, zu versuchen, ob nicht etwa eintretende Dissoziation des Joddampfes oder Ähnliches im Magnetfelde zu beobachten war. Joddampf dissoziiert bekanntlich bei höheren Temperaturen erheblich, und da Versuche an anderen Elementen gezeigt haben, daß die Fluoreszenzfähigkeit eines Elementes an einen bestimmten Molekularzustand gebunden ist, wurden Versuche in dieser Richtung angestellt. Dazu sei noch hervorgehoben, daß Joddampf bei Zimmertemperatur lebhaft fluoresziert, daß aber bei höherer

Temperatur diese Fähigkeit abnimmt und erlischt, auch wenn die Dampfmenge annähernd konstant gehalten wird.

Indes verliefen die ganzen zeitraubenden Versuche, die ich hier unternahm (Prüfung auf Dissoziationswärme usw.), ergebnislos, und da sich im weiteren Verlaufe der Arbeit, besonders durch die spektralen Beobachtungen, mit Sicherheit ergab, daß die Wirkung des Magnetfeldes von ganz anderer Natur ist, als ich zunächst vermutete, so mag von der Wiedergabe der Einzelheiten abgesehen werden. Auch R. W. Wood hat in der erwähnten Abhandlung nach magnetischen Einflüssen auf den Dampfzustand gesucht — er vermutete ein Heraustreiben des Dampfes bei niedrigen Temperaturen aus dem Interferrikum —, aber ebensowenig Erfolg dabei gehabt, was nach den im folgenden angegebenen Resultaten ohne weiteres verständlich ist, da er ebenso wie ich in obigen Versuchen die magnetische Beeinflussung in falscher Richtung suchte.

Eine andere Erklärung für die verminderte Fluoreszenz ist nur auf zweierlei Weise möglich, wenn man von dem Absorptionseinfluß, der — wie erwähnt — bei dem Effekte keine besondere Rolle spielt, absieht. Entweder nimmt die Intensität des Fluoreszenzlichtes ab, weil weniger fluoreszenzfähige Moleküle als Träger des Bandenspektrums vorhanden sind, oder aber, die Emission des einzelnen Moleküls wird gehemmt, so daß die Schwingungen aller fluoreszierenden Moleküle gleichmäßig, gewissermaßen wie im Zeemaneffekt, beeinflußt, d. h. in diesem Falle, geschwächt werden. Ist letzteres der Fall, so ist es wahrscheinlich, daß auch der Charakter des emittierten Spektrums eine Änderung erleidet. Jedenfalls ist ohne spektrale Untersuchung eine Entscheidung über eine solche Einwirkung unmöglich.

Es liegt nahe, zunächst nur an die erstere Möglichkeit zu glauben, zumal wenn man berücksichtigt, wie empfindlich die Fluoreszenz von Gasen gegen Beimischung fremder Gase oder Verunreinigungen ist. Es genügen unter Umständen geringe Zusätze besonders von elektronegativen Gasen, um die Fluoreszenz des betreffenden Dampfes zu verringern oder zu vernichten. Zu erwähnen ist dabei auch die Umwandlung des monochromatisch angeregten Resonanzspektrums in das bei kontinuierlicher Anregung erzeugte Bandenspektrum.

Ich erinnere an die bezüglichen Arbeiten von R. W. Wood und Franck, dem Verfasser u. a. In allen diesen Fällen kann man nur an eine Beeinflussung der fluoreszierenden Jodmoleküle durch Zusammenstöße mit den betreffenden Gasmolekeln denken, und soweit es sich um Verringerung der Fluoreszenzintensität und ihre Vernichtung handelt, ist sie zu verstehen durch Verringerung der Anzahl fluoreszierender Moleküle (d. i. durch Verlust ihrer Fähigkeit, das betreffende Spektrum zu emittieren unter Wirkung der molekularen elektrischen Felder o. ä.) und auch wohl ausnahmslos von allen Autoren in diesem Sinne gedeutet worden.

Da alle bisherigen Versuche keinerlei Anhaltspunkte gaben, die Abnahme des Fluoreszenzlichtes zu erklären durch Änderungen im Dampfzustande, d. i. durch verringerte Zahl fluoreszierender Moleküle sowie durch geänderte Absorption, wurde zur genaueren spektralen Untersuchung des Fluoreszenzlichtes im magnetischen Felde geschritten.

Es war zu prüfen:

1. Die Abhängigkeit der Fluoreszenzschwächung von der spektralen Lage und bei verschiedenen magnetischen Feldstärken.

2. Die Abhängigkeit der Fluoreszenzschwächung bei bestimmten magnetischen Feldern von der Dampfdichte.

3. Etwa vorhandener Einfluß der Temperatur neben der Dampfdichte (gesättigter und überhitzter Dampf).

4. Abhängigkeit der Fluoreszenzschwächung von der Art und Stärke des erregenden Lichtes (normales Bandenspektrum und Resonanzspektrum).

5. Änderungen in der Struktur und Lage des Fluoreszenzspektrums bei variiertem Felde und variierter Dampfdichte.

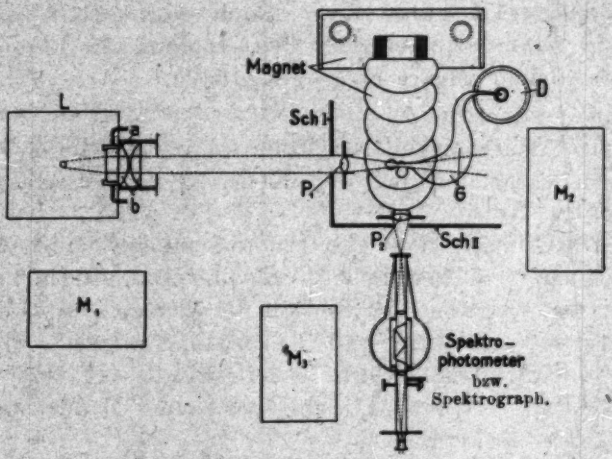
Nebenbei schien es wünschenswert, den etwa außer dieser Erscheinung auftretenden Zeemaneffekt, und da inzwischen Hr. Stark seine Methode des elektrischen Feldes in leuchtenden Gasen und Dämpfen mit so schönem Erfolge angewendet und ausgearbeitet hatte, nach vorhandenem Einfluß eines elektrischen Feldes statt des magnetischen auf die Fluoreszenz des Joddampfes zu suchen. Letzterer schien mir um so mehr zu erwarten, als ja die Wirkung molekularer elektrischer Felder auf die fluoreszierenden Moleküle bei Zusammenstößen beobachtet war.

Spektrale Untersuchung der magnetischen Schwächung des Fluoreszenzlichtes.

Zur spektralphotometrischen Untersuchung kam die subjektive Beobachtung und die spektrographische Messung zur Anwendung. Auf Energiemessungen mit Thermosäule, Bolometer oder lichtelektrischer Zelle wurde mangels genügender Empfindlichkeit nach Anstellung von Probeversuchen verzichtet.

Versuchsanordnung.

Der für subjektive und objektive Messungen gleiche Aufbau erhellt aus folgendem Schema (Fig. 1). Darin bedeuten L das lichtdichte Gehäuse, in dem die Lichtquelle stand,



Grundriß der Versuchsanordnung

Fig. 1.

A den von fließendem Wasser durchströmten Wärmefilter und B den Kondensator. M bedeutet den Magneten, der vertikal montiert war (Feld-senkrecht verlaufend). Zwischen den Polen befand sich das evakuierte, mit Joddampf gefüllte Gefäß G, dessen U-förmig endendes Schwanzstück in die Dewarflasche D tauchte. P_1 und P_2 sind Projektionslinsen, deren erste das Erregungslicht im Jodgefäße genau im Interferrikum konzentrierte, deren zweite den Fluoreszenzkegel auf den Spalt des Spektralphotometers bzw. Spektrographen

scharf abbildete. M_1, M_2, M_3 sind die zur Regulierung und Kontrolle dienenden Widerstände und Meßinstrumente bei Lichtquelle, Magnet und Spektrophotometer. Überflüssiges Licht wurde durch die Schirme Sch_1 und Sch_2 abgeblendet, deren Öffnungen gerade groß genug waren, um den Erregungslichtkegel und das Abbildungsbüschel durchzulassen.

A. Die Lichtquellen.

Zur kontinuierlichen Erregung konnte das Sonnenlicht wegen der Lage des Arbeitsraumes und der Ungunst der Aachener Witterungsverhältnisse nicht verwendet werden. Statt dessen wurde teils der Kohlebogen, teils eine neuerdings von der Osramgesellschaft hergestellte Halbwattprojektionsglühlampe von 4000 HK. benutzt. Letztere hat bei dem Vorteil konstanten Brennens den Nachteil geringerer Intensität und schwieriger Herstellung eines guten Strahlenganges, wegen der größeren Flächenausdehnung der Leuchtquelle (als Leuchtquelle diente eine im Zickzack gewundene Drahtspirale innerhalb eines Rechteckes von ca. $2 \times 2{,}5$ cm Fläche). Infolge dieser geringen Intensität waren die Ablesungsfehler bei den spektralphotometrischen Messungen reichlich doppelt so groß wie bei Anregung mit Bogenlicht, und in lichtärmeren Teilen des Bandenspektrums oder solchen, wo die Augenempfindlichkeit zu gering ist (rot), waren die okularen Messungen kaum durchführbar. Auf spektrographische Aufnahmen damit wurde wegen zu großen Expositionszeiten, die bedeutende Fehlerquellen in sich schließen, verzichtet. — Mit der selbstregulierenden Bogenlampe wurde eine befriedigende Konstanz erzielt (vgl. die diesbezüglichen Angaben von Hallwachs[1]) zur Erzielung konstanten Bogenlichtes). Immerhin störten bei den subjektiven Beobachtungen gelegentliche Zuckungen — wohl veranlaßt durch Unreinigkeiten oder Fehler der Kohlen —, weil sie die Augenempfindlichkeit beeinflußten, sogar wenn als Vergleichslicht die Lampe selbst geeignet abgeblendet herangezogen wurde. Um absolute Konstanz der Stromquellen zu haben, wurde in der Hauptsache der Strom den Institutsbatterien, die anderweitig nicht in Anspruch genommen waren, entnommen und die Messungen in späten

1) W. Hallwachs, Phys. Zeitschr. 5. p. 489.

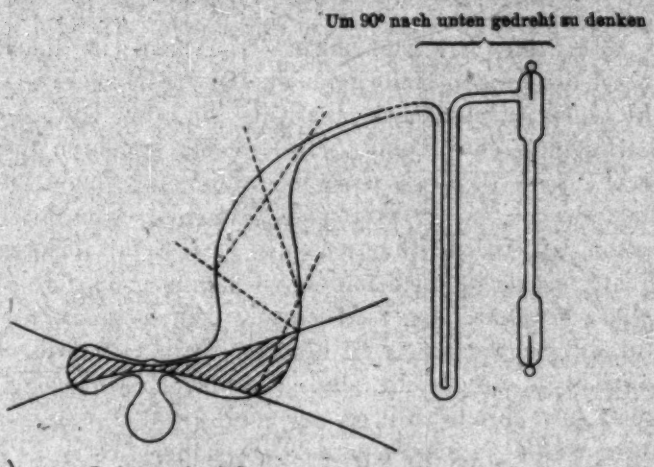
Abend- und Nachtstunden durchgeführt. Bei den subjektiven Versuchen kontrollierte ein zweiter Beobachter die Meßinstrumente.

Zur monochromatischen Erregung diente eine Quarz-Quecksilberlampe von Heraeus, die zur Projektion mit Längsdurchsicht aufgestellt wurde. Ein an die Lampe gepaßter Metallschirm, der nur die Endfläche des horizontalen Leuchtrohres freiließ, ermöglichte die Projektion ohne Nebenbilder. Indes gelang es nicht — zum Unterschied zu den oben erwähnten Lichtquellen — zerstreutes Licht ganz auszuschließen. Zur Erzielung genügender Helligkeit mußte eine besonders große Kondensorlinse verwendet werden, die in dem engwandigen Gefäße störendes Nebenlicht erzeugte. Doch spielen geringe Beträge bei Aufnahme des spektral zerlegten Fluoreszenzlichtes keine Rolle, da das Resonanzspektrum aus Linien von anderer Wellenlänge besteht. abgesehen von denjenigen, in denen das Spektrum angeregt wird. (Bei Quecksilber λ 5461 bzw. 5270 und 5791). In diesen Linien selbst jedes zerstreute Licht zu beseitigen, scheint kaum möglich zu sein, da auch R. W. Wood besonders hervorhebt, es sei ihm bei seinen Versuchen am Resonanzspektrum nicht gelungen — Versuche, bei denen nicht wie hier durch den geringen Polabstand des Magneten ein Gefäß von bestimmten engen Dimensionen vorgeschrieben wurde. Ich mußte daher bei Intensitätsvergleichen im Resonanzspektrum diese intensivsten Linien ausschließen. — Eine große Empfindlichkeit der Quarzlampe gegen Zugluft, die mir auffiel, veranlaßte mich, sie sorgfältig dagegen zu schützen, um konstante Belastung zu haben.

B. Das Joddampfgefäß.

Gewählt wurde für die Untersuchung im Magnetfelde ein Gefäß von anderer Form, als sie in meiner ersten Arbeit beschrieben wurde, um das zerstreute Licht möglichst ganz auszuschließen. Bei der früher gewählten Kreuzform mit Abschlußkugeln wurde ein erheblicher Teil des Bogenlichtes an der hohlspiegelartig wirkenden Rückwand beim Austritt aus dem Gefäße zurückgeworfen. Daher wurde bei der neuen Form die Austrittswandung des Gefäßes schrägstehend — sackartig — angefertigt, so daß die Zurückwerfung des Lichtes nach der Seite hin erfolgte.

Fig. 2 zeigt die ohne weiteres wohlverständliche Form des Rohres; der Strahlengang ist punktiert angedeutet. So erschien bei genauer Justierung der Fluoreszenzkegel völlig auf dunklem Hintergrunde, wenn in der Spektroskoprichtung beobachtet wurde. Die Probe wurde auch spektrographisch vorgenommen, indem mit weitgeöffnetem Spalt und doppelt als normal benutzter Expositionszeit Aufnahmen gemacht



Joddampfgefäß von oben gesehen

Fig. 2.

wurden, während der Joddampf durch Kohlensäureschnee kondensiert war. So ließ sich das Fehlen störenden Lichtes, das die Resultate im Spektrographen hätte fälschen können, einwandfrei nachweisen. Die beiden Kugeln am Eintritt des Beleuchtungskegels und in der Beobachtungsrichtung als Fenster waren fast schlierenfrei geblasen und von nahezu gleicher Größe; ihre Dimensionen wie auch die des Gefäßes sind aus der Figur zu entnehmen.

Die sackartige Erweiterung endete in einem U-Rohre, das in den Hals einer Dewarflasche führte. Ein seitlicher Ansatz trug endlich noch ein kleines Geisslerrohr, um das abgeschmolzene Gefäß von Zeit zu Zeit auf Reinheit und Güte des Vakuums bei kondensiertem Jod zu prüfen. Im Gefäße befand sich ein Überschuß von Jod, so daß bei jeder Temperatur Sättigung gesichert war. Das Jod selbst war reinstes, durch Resublimation gewonnen (bezogen von Kahlbaum, Berlin) und zuvor noch durch mehrfache Sublimation

im Vakuum von mir gasfrei gemacht (wegen der Hygroskopie des Jods stets notwendig). Um stundenlang konstante Dampfdrucke im Jodgefäße erhalten zu können, wurde der U-Ansatz in der Dewarflasche von großem Inhalte in ein Wasserbad getaucht, dessen Temperatur an einem $^1/_{10}{}^0$-Thermometer abgelesen wurde.

C. Der Magnet.

Da mir Hr. Geheimrat Grotrian in liebenswürdiger Weise den großen Halbringmagneten von Hartmann & Braun des Elektrotechnischen Instituts für die Untersuchung zur Verfügung stellte, konnte ich bei einem größeren Interferrikum (ca. 7 mm), wie es das Joddampfgefäß erforderte, bis zu Feldern von ca. 22000 Gauss gelangen. Um gleichzeitig bequem den Beleuchtungskegel in das Gefäß bringen und den Fluoreszenzkegel beobachten zu können, da ferner, wie eingangs erwähnt, die Feldrichtung keinen merkbaren Einfluß auf die Schwächung der Fluoreszenz hat, wurde der Magnet vertikal so aufgestellt, daß das oben beschriebene Jodgefäß horizontal durchstrahlt wurde und rechtwinklig zur Beleuchtungsrichtung gemessen werden konnte. Das Feld verlief also parallel zur Spaltrichtung des Spektroskopes bzw. Spektrographen. Ein kräftiges Messinggestell hielt zwischen seinen Säulen das Jodgefäß in richtiger Lage und fixierte den Polabstand des Magnetes. Die Pole hatten die übliche Form eines abgestumpften Kegels von ca. 120°. Durchmesser des Kegeldeckels ca. 6 mm. Vor und nach beendeten Versuchen wurden die Feldstärken in diesem Interferrikum für die benutzten Stromstärken mittels Wismutspiralen (bei richtiger Temperatur) und Induktionsspulen bestimmt. Bei den langfristigen Expositionszeiten wurde über eine Feldstärke von 20000 Gauss nicht hinweggegangen, um keine unzulässige Erhitzung zu bekommen.

D. Spektralphotometer.

Das benutzte Spektralphotometer war besonders zu Meßzwecken an sehr lichtschwachen Objekten von der Firma F. Schmidt & Haensch, Berlin, nach Angaben von J. Stark gebaut und unterscheidet sich insofern von den meisten üblichen Spektrophotometern, als der Apparat aus zwei vollständig

getrennten Teilen besteht, die für sich verwendbar sind, nämlich dem großen, recht lichtstarken Geradsichtspektroskope, auf dem abnehmbar der eigentliche Photometrierapparat sitzt, der die Vergleichsquelle — ein Glühlämpchen in Kugel — und die Abschwächvorrichtung enthält. Ein ganz ähnlicher Apparat, erbaut von der gleichen Firma, ist seinerzeit von F. von Hauer und J. von Kowalski in der Physikalischen Zeitschrift 1914, p. 822, beschrieben worden, und die dortige Abbildung Fig. 1b entspricht völlig dem hier verwendeten Apparate. Der einzige Unterschied besteht darin, daß das Spektrophotometer der genannten Autoren die Lichtschwächung in bekannter Weise durch drehbare Nikols bewirkt, während an dem von mir benutzten Instrumente die Abschwächung durch eine große, exakt gearbeitete Irisblende erfolgt, die eine Teilung direkt nach Lichtmengen trug. Da der Apparat noch nicht in Gebrauch gewesen war, schien es erforderlich, ihn auf Zuverlässigkeit, Genauigkeit der Ablesungen und besondere Fehler zu prüfen. Dies geschah auf der optischen Bank des Instituts durch Messung mit geeichten Lichtquellen mit Abstandsphotometrie. Ich fand, daß die Meßvorrichtung recht gleichmäßig arbeitete. Auch ein „toter Gang" der Irisblende war nicht festzustellen. Da die Genauigkeit der Einstellung bei großen und kleinen Blendenwerten geringer ist, verlegte ich die Messung durch entsprechende Regulierung der Glühbirne in das Gebiet sicherster Ablesung. Die als Vergleichsquelle dienende kleine Glühbirne lag während der Untersuchungen, die, wie eingangs erwähnt, in späten Abend- und Nachtstunden vorgenommen wurden, an der 10-Volt-Batterie des Instituts von 300 Amperestunden Kapazität. Während dieser Zeit wurde die Batterie anderweitig nicht gebraucht. Zur Kontrolle war ein Präzisionsvoltmeter parallel zur Lampe geschaltet. Die Regulierung wurde — da die gewöhnlichen Schieberheostaten wegen schlechter Kontakte hierzu nicht verwendbar sind — mit einem besonders hierzu verfertigten Drahtwiderstand vorgenommen, der beliebig feine Verschiebung erlaubte und mit festschraubbaren Kontakten störungsfrei arbeitete.

Die Eichung des Spektrophotometers auf Wellenlängen geschah in bekannter Weise mittels einer Heliumröhre.

E. Der Spektrograph.

Die photographischen Aufnahmen wurden mit einem Apparate gemacht, der von dem Institutsmechaniker E. Feldhausen nach meinen Angaben gebaut wurde. Des Hauptgewicht bei dem Bau war dabei auf große Lichtstärke und leicht veränderliche Optik gelegt. Der Spektrograph, dessen Grundriß aus nachstehender Figur zu ersehen ist, war im Prinzip einem Spektrometer nachgebildet. Sein Gesamtgewicht dürfte ca. 110 kg betragen. Das schwere gußeiserne

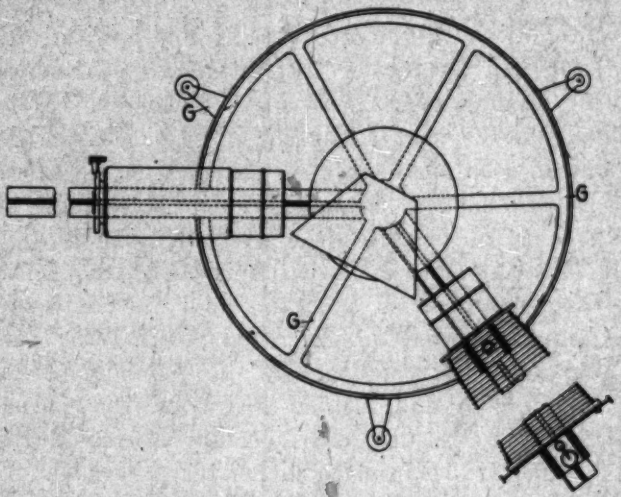


Fig. 3.

Grundgestell G von 80 cm Durchmesser ruht auf drei in der Höhe verstellbaren Fußschrauben, die eine leichte Horizontalstellung und Höhenregulierung vor dem Untersuchungsobjekte ermöglichen. Der Kollimatorarm mit dem Grundgestell fest verbunden, trägt eine solide, schlittenartige Führung, auf der der Kollimator selbst sowie zwei Stative zum Halten von Projektionslinsen oder anderen Nebenapparaten in Richtung der optischen Achse verschoben werden können. Der Dispersionskörper ruht auf einem sorgfältig justierten, in der Höhe beliebig einstellbaren Spektrometertisch, dessen 25 cm große Platte sich gegen eine kleinere mit drei Regulierschrauben auswechseln läßt, und der Kameraarm von nahezu 1 m Länge läßt sich unter jedem beliebigen Winkel gegen die Kollimator-

achse am Grundgestelle festklemmen. Ein Teilkreis mit Noniusablesung auf 6 Minuten gestattet die Festlegung des Winkels um eine gegebene Einstellung rasch wechseln zu können. Der Kameraarm besitzt gleichfalls eine Längenteilung in Millimetern um die Lage von Objektiv- und Kameraträger, ihre gegenseitigen Abstände usw. bestimmen zu können. Die Träger sind gegeneinander leicht in der Schlittenverschiebung beweglich. Eine bequeme Feinverschiebung am Kassettenträger erlaubt rasche Scharfeinstellung mit dem Auge und photographisch durch den Nonius auf der Längenteilung. Objektiv- und Kameraträger sind lichtdicht durch leicht auswechselbare Balgen verbunden. Der Kameraträger gestattet die Verwendung dreier Plattenformate (13:18, 9:12, 6:9). Eine Vertikalverschiebung zu Serienaufnahmen auf derselben Platte ist vorhanden. Ein dritter im Bedarfsfalle einzusetzender Träger zwischen Kameraobjektiv und Kassettenträger ermöglicht das Einsetzen eines Teleobjektives, wodurch sich die Normalbrennweite des Kameraobjektives (also die lineare Ausdehnung des Spektrums) nötigenfalls um das Fünffache verlängern ließe. Der Kollimator — als Ganzes in seiner Führung beweglich — besitzt einen unsymmetrischen Spalt mit exakter Trommel, deren Teile 0,0025 mm angeben. Unmittelbar hinter dem Spalt sitzt ein Kompoundsektorenverschluß der Firma Deckel in München, wohl der zurzeit exakteste aller regulierbaren Objektivverschlüsse (zwischen 1 und $^1/_{250}$ Sek.). Als Kollimator- und Kameraobjektiv verwendete ich die lichtstärksten Tessare von Zeiss von 30 cm Brennweite und Öffnungsverhältnis 1:3,5. Sie besitzen gerade als Spektrographenobjektive große Vorteile. Der geringe Bildwinkel, der sie in der Praxis mehr als Porträtobjektive empfiehlt, schadet am Spektrographen, wo man stets nur kleine Winkel im Spektrum umfaßt, gar nicht; hinsichtlich ihrer astigmatischen und chromatischen Korrektion, auf welche es besonders beim Kollimatorobjektiv ankommt, werden sie von keinem anderen Typ übertroffen; ihr einziger Nachteil, der bei ihrer Lichtstärke unvermeidbar ist, ist eine größere Blendendifferenz, d. h. bei voller Öffnung liegt die größte Bildschärfe näher dem Objektivscheitel wie bei Abblendung auf etwa $F:9$ unter Ausschaltung der Randstrahlen. Um die hierfür nötige Korrektion der Brennweite bei geblendetem

Objektive rasch vornehmen zu können, besitzt das Kollimatorrohr noch eine mikrometrische Verschiebung, die sichere Veränderung des Abstandes auf $^1/_{100}$ mm genau gestattet. Als Dispersionskörper dient ein großes Kompoundprisma (sog. Rutherfordprisma) von 75 mm Höhe, 135 mm Länge der brechenden Flächen, geliefert von der Firma R. Fues, Berlin. Mit ihm kommt die Lichtstärke des Spektrographen gut zum Ausdruck. Um aber für die langwelligen Teile des Spektrums mit größerer Dispersion arbeiten zu können, ist die Auswechselbarkeit gegen ein Plangitter vorgesehen. Da mir ein solches hier nicht zur Verfügung stand, auch nicht anderweitig zu erhalten war, verwendete ich für die Gitteraufnahmen ein Wallace-Kopiegitter, bezogen durch Karl Zeiss, Jena, das ich nach einem von Gehrcke und Reichenheim[1]) erprobten Verfahren durch Kathodenzerstäubung von Platin in ein gut brauchbares Reflexionsgitter verwandelte. Das Gitter, praktisch nahezu geisterfrei, hatte infolge seiner hohen Strichzahl (25000 lines to the inch) gute Dispersion und in der ersten Ordnung gute Helligkeit. Freilich war es — schon infolge der kleinen Gitterfläche — (30×50 mm geteilte Fläche) viel lichtschwächer als das Prisma und kam nur für lichtstärkere Objekte zur Untersuchung in Frage. Gitter und Prisma sind leicht auswechselbar auf dem Spektrographentisch zu montieren und durch passende Blechgehäuse lichtdicht mit Kollimator und Kamerateil zu verbinden. Endlich sei bemerkt, daß sowohl beim Kollimator- wie Kameraobjektiv geeignete Einsätze vorhanden sind, um mit anderen Objektiven, evtl. auch mit Quarzoptik, den Apparat benutzen zu können. Ein Schieber, der an Stelle der Kassetten im Kassettenträger eingeschoben werden kann, in den verschiedene Okulare — auch ein Okularspalt — gesetzt werden können, dient zu okularen Beobachtungen im Spektrum. Zur Projektion der Lichtquelle auf den Spalt ist eine aplanatische, photographisch korrigierte Lupe von Steinheil mit dem Öffnungsverhältnis 1 : 2 bestimmt; denn nur mit einem entsprechend lichtstärkeren Objektive ist es natürlich möglich, die große Lichtstärke von $F : 3{,}5$ des Kollimators auszunutzen und diesen bei der Projektion auf den Spalt einigermaßen zu füllen.

1) E. Gehrcke u. Reichenheim, Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. 1909. p. 311.

F. Die spektrophotometrischen Messungen.

Wie p. 59 bemerkt, galt es zunächst, den Verlauf der Fluoreszenzschwächung bei verschiedenen Feldern in den einzelnen Spektralbezirken festzustellen.

Nach sorgfältigster Justierung (= engste und hellste Stelle des Fluoreszenzkegels in der Mitte zwischen den Polschuhen, genaue zentrale Abbildung dieser Stelle auf den Spalt des Spektrophotometers) wurde die Glühbirne des Photometers abgestimmt auf maximale Helligkeit des im Apparate erhaltenen Fluoreszenzlichtes durch den Vorschaltwiderstand, alsdann die Weite von Objektiv- und Okularspalt so eng genommen, wie es die zur Messung notwendige Helligkeit erlaubte, auf den für das Auge hellsten Spektralbezirk im Apparate (gelbgrün) eingestellt und bei konstant gehaltener Erregungsintensität, Vergleichslichtquelle und Dampfdichte photometriert.

Über ersteres ist das Nötige angeführt. Für die konstante Dampfdichte sorgte ein Wasserbad in der Dewarflasche, dessen Temperatur stundenlang auf $^2/_{10}{}^0$ konstant blieb, falls die Temperaturdifferenz zwischen Zimmer und Wasserbad nicht erheblich war. In letzterem Falle wurde für rechtzeitige Erneuerung des Bades gesorgt. Die Mehrzahl der Messungen fand bei Zimmertemperatur statt, d. h. Wasserbad ca. 1° C unter der letzteren. Die Dispersion des Spektroskops ist groß genug, um die einzelnen Banden des Spektrums getrennt erkennen zu lassen, aber die Helligkeit einer einzelnen Bande nicht genügend, um einen so schmalen Bezirk photometrieren zu können. Der im Gelbgrün gemessene Bezirk umfaßte ca. 140 A.-E., d. h. ungefähr die Banden von λ 5850 λ bis 5490. Der Objektivspalt hatte dabei 0,8 mm Weite.

Da die einzelnen Banden in diesem Bezirke annähernd gleiche Helligkeit besaßen, bereitet eine Photometrierung dieser verwaschen aussehenden Banden (infolge der Spaltweite) gegen das entsprechende Stück kontinuierlichen Spektrums der Glühbirne keine Schwierigkeit, wenn nur die Justierung zuvor so erfolgt ist, daß Vergleichsspektrum und Bandenspektrum eng nebeneinander liegen. Während ich persönlich, um mit ausgeruhtem Auge ungeblendet photometrieren zu können, nur die Einstellung der Photometrierblende besorgte, las ein zweiter Beobachter die Zahlenangabe der Blende ab und kontrollierte die einzelnen Meßinstrumente.

Die Messungen selbst wurden in der Weise durchgeführt, daß zunächst eine Reihe Ablesungen bei ungeschwächter Fluoreszenz vorgenommen wurden, alsdann nach Einschaltung des Magnetstromes für wachsende Felder um ca. 2500 Gauss steigend bis zum Maximalwerte von 22000 Gauss. Bei jeder Feldstärke wurden mindestens fünf Ablesungen gemacht. Vom Höchstwerte rückwärts in derselben Weise bis zum Magnetstrome 0. So kontrollierte die zweite Meßreihe stets die erste. In dieser Art wurden an aufeinanderfolgenden Tagen eine Reihe von Messungen bei verschiedenen Temperaturen zwischen 17° und 23° C vorgenommen, die gleiches Ergebnis hatten.

Es folgte aus ihnen, daß die Lichtabnahme nicht proportional der Feldstärke erfolgte, wenn man das Intensitätsverhältnis in Abhängigkeit der Feldstärke graphisch eintrug, sondern nach einer Exponentialfunktion, was am deutlichsten hervortritt, wenn man die Fluoreszenzschwächung als log. Lichtmenge-Feld aufträgt. Vgl. Fig. 4, Kurve *a* (ausgezogene Linie).

Die Messungen bei den verschiedenen oben angeführten Temperaturen scheinen sich zu decken. Die Meßfehler sind jedenfalls zu groß, um Unterschiede erkennen zu lassen. Anders bei 0° im Dewargefäß, also bei wesentlich geringerer Dampfdichte. Leider war indes die Fluoreszenzhelligkeit zu gering, um bei verschiedenen Feldern mit genügender Sicherheit messen zu können. *Es ergab sich nur, daß der Mittelwert der einzelnen Ablesungen erheblich tiefer lag wie bei gleich starkem Felde bei höherer Temperatur* (über 15° C).

Als zweiter Punkt war die Abhängigkeit der Schwächung von der Wellenlänge festzustellen. Wie erwähnt, waren in benachbarten Banden keine Intensitätsunterschiede beim Einschalten des Feldes zu bemerken; da nach kürzeren Wellen die Intensität rasch abklingt, blieb nur die Möglichkeit, im hellsten Teile des Rot zu messen. Wie die späteren Spektrogramme zeigen, ist hier die relative Intensität des Fluoreszenzspektrums sogar erheblich größer wie im Gelbgrün, die Empfindlichkeit des Auges aber soviel geringer, daß die Einstellung auf gleiche Helligkeit viel unsicherer wird.

Es fanden sich aber übereinstimmend nach den einzelnen Meßreihen Werte, die im Rot eine weit geringere Schwächung ergaben, bei sonst analogen Bedingungen wie im Gelbgrün. (In

Fig. 4, Kurve *b* sind Anfangs- und Minimalwert der Fluoreszenzhelligkeit als punktierte Kurve eingetragen).

Da größere Genauigkeit wegen der auf p. 61 erwähnten Schwierigkeit nicht zu erzielen war, die Untersuchung des dritten Punktes: Einfluß der Temperatur neben der Dampfdichte, aus diesem Grunde aussichtslos war und ich von der Konstanz der Halbwattprojektionslampe größere Genauigkeit erhoffte, wurden die Meßreihen zunächst bei derselben Temperatur mit ihr wiederholt. Über die Nachteile dieser Messung

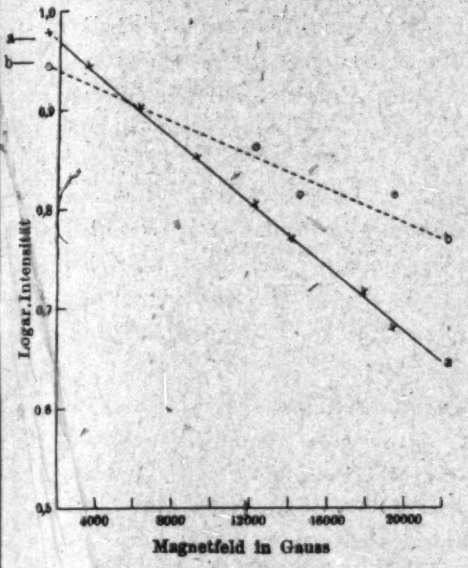


Fig. 4.

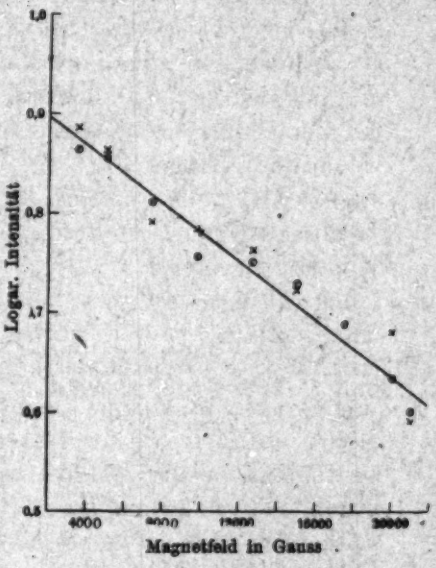


Fig. 5.

ist ebenfalls p. 61 gesprochen. Überraschenderweise ergaben zahlreiche Versuchsreihen zwar das gleiche Resultat, daß die Schwärzung sich gleichfalls am besten durch eine geradlinige Kurve log. Intensität-Feldstärke darstellen ließ, daß aber die Kurve bei sonst gleichen Bedingungen flacher geneigt war wie bei den Messungen mit Bogenlicht (bezogen auf gleiche Wellenlängenbezirke und gleiche Magnetfelder).

Dieser Neigungsunterschied der Kurve würde bedeuten, daß die Fluoreszenz mit einer spezifisch schwächer leuchtenden Lichtquelle, wie sie die Glühbirne gegenüber dem Bogenlicht darstellt, dem schwächenden Einflusse des Magneten in geringerem Grade unterliegt.

Als Beispiel sind zwei Messungen mit der Halbwattprojektionslampe eingetragen, deren eine bei 28° C, deren andere bei 24° im Wasserbade aufgenommen wurden, während die Zimmertemperatur im ersten Falle 25°, im zweiten 27° betrug (Fig. 5).

Der gemessene Spektralbezirk umfaßt das gleiche Intervall wie bei Kurve 4*a*. Wie man sieht, schwanken die aus je vier Ablesungen gebildeten Mittelwerte infolge der angeführten Meßschwierigkeiten so erheblich, daß eine genauere Festlegung der Kurve unmöglich ist. Da die Meßfehler ihrerseits durch die Schwäche des Lichtes bzw. die Empfindlichkeitsgrenze des Auges bedingt sind, war es ausgeschlossen, etwa Messungen mit dieser Lampe in anderen Spektralbezirken und bei niedrigeren Dampfdrucken des Jod, also bei niedrigeren Temperaturen, anzustellen, in denen die Fluoreszenzhelligkeit wesentlich geringer ist.

Es kann aber keinem Zweifel unterliegen, wenn man die Messungen mit Bogenlicht als Anregung und die mit der Halbwattlampe vergleicht, daß zwischen beiden ein systematischer Unterschied besteht, und man müßte den Resultaten Zwang antun, wollte man z. B. die Kurve 4a (Bogenlichtmessung) mit Kurve 5 (Halbwattlampe) gleichlaufend ziehen.

Es machte mir viel Schwierigkeiten, eine Erklärung für diesen auffälligen Unterschied im Gange beider Messungen zu finden, da die Meßmethoden und -apparate die gleichen waren und ein prinzipieller Fehler nicht auffindbar war. Daß tatsächlich nicht in Versuchsfehlern, sondern in der verschieden starken Beleuchtungsintensität beider Lichtquellen die Ursache lag, weil dadurch das Magnetfeld im einen Falle einen geringeren Effekt auf die fluoreszierenden Moleküle ausübt, wurde durch die späteren spektrographischen Versuche sichergestellt.

Mit der Quecksilberlampe als Erregungsquelle im Spektrophotometer Messungen durchzuführen, war unmöglich, da die meisten Resonanzlinien zu lichtschwach waren, ferner das kontinuierliche Spektrum der Glühbirne zum Vergleich nicht geeignet ist.

Als Ergebnis der spektrophotometrischen Messung bleibt bestehen:

1. Der Logarithmus der Fluoreszenzlichtmenge nimmt proportional dem Magnetfelde ab.

2. Die Fluoreszenzabnahme ist im Gelbgrün des Spektrums stärker als im Rot.

3. Die Fluoreszenzschwächung zeigt in Temperaturintervallen zwischen 15° und 25° keine Änderung mit Temperatur und Dampfdichte; stärkere Schwächung ist bei 0° bemerkbar.

4. Die Fluoreszenzschwächung ist stärker bei Anregung der Fluoreszenz mit Bogenlicht als mit der 4000kerzigen Halbwattprojektionslampe.

G. Spektrographische Aufnahmen.

Die spektrographischen Aufnahmen wurden in der gleichen, p. 60 skizzierten Versuchsanordnung gemacht, indem der gleichfalls sorgfältig justierte Spektrograph an die Stelle des Spektrophotometers trat. — Der Apparat war zuvor unter Benutzung des Rutherfordprismas so eingestellt worden, daß er maximale, gleichmäßige Helligkeit in dem zur Untersuchung bestimmten Spektralbezirke besaß, d. h. von ca. λ 5000 bis 6000 A.-E. Außerdem wurde die Dispersion durch Drehen des Prismas aus der Minimumstellung so weit gesteigert, als dies ohne große Schädigung der optischen Abbildungsschärfe und -helligkeit zu erreichen war. Die Dispersion betrug bei der gewählten Einstellung: 2,5 A.-E. pro 0,1 mm.

Besonderer Wert wurde auf geeignetes Plattenmaterial gelegt. Da es sich bei diesen Aufnahmen einmal um sehr lichtschwache Spektra handelte, außerdem es besonders auf das Studium spektraler Intensitätsunterschiede ankam, war es erforderlich, eine Platte zu wählen, die neben hoher Allgemeinempfindlichkeit das ganze untersuchte Spektrum annähernd gleichmäßig wiedergab, in einem photographisch sehr ungünstigen Gebiete (Grün-Rot inkl.), ferner gute Schwärzungsabstufung (Gradation) besaß und schleierfrei arbeitete.

Von käuflichen, rotempfindlichen Platten war mir die gute englische Spektralplatte von Wratten & Wrainright wegen des Krieges nicht zugänglich. Die deutsche panchromatische Platte von Perutz (Perchromoplatte sensibilisiert mit Äthylrot) erwies sich als ganz ungeeignet, obschon ich die Platten frisch von der Fabrik kommen ließ. Ihre Empfindlichkeit war ungenügend, und vor allem arbeitete sie so fleckig,

daß sie für vorliegenden Zweck nicht in Betracht kam. Ich mußte also selbst sensibilisierte Trockenplatten (sogen. Badeplatten, nicht in der Emulsion gefärbte) benutzen und entschied mich nach einigen Versuchen für Pinachrom als Sensibilisator. Dieser Farbstoff verleiht den Platten eine bemerkenswert gleichmäßige Empfindlichkeit für alle Farben bis zum Rot, obschon er im Rot selbst nicht so weit und kräftig sensibilisiert wie andere verwandte Farbstoffe. Andere Farbstoffe besitzen aber meist ein Minimum der Empfindlichkeit, das mitten in dem Untersuchungsspektrum liegt und deshalb sehr störend wirken würde. Ich verzichtete aber lieber auf das äußere Rot zugunsten eines gleichmäßigen Spektrums von 500 $\mu\mu$ an.

Da durchaus nicht alle Plattenfabrikate sich gleich gut zum sensibilisieren eignen, anderseits eine möglichst hohe Empfindlichkeit nötig war, prüfte ich den größten Teil der bekannten hochempfindlichen Plattensorten (Agfa, Schleussner, Perutz, Hauff, Sachs und einige andere) auf ihr Verhalten und fand die Hauff Ultrarapidplatte, der übrigens die entsprechende Sachsplatte wenig nachstand, sehr geeignet. Die Hauffplatte (alle Pakete wurden in größerer Sendung frisch von der Fabrik bezogen) zeigten neben ihrer sehr großen Empfindlichkeit eine vorzügliche Gleichmäßigkeit der Schicht, Schleierfreiheit (wie sie z. B. die Lumièreplatte „Sensibilité extrême", violettes Etikett, bei früheren Versuchen nie gezeigt hatte), gute Gradation und war auch nach der Sensibilisierung mit Pinachrom hochempfindlich und schleierfrei.

Es wurde stets eine größere Anzahl Platten präpariert, nach bekanntem Rezept in alkoholischer Lösung und im Luftstrome eines Ventilators getrocknet. Über das weitere Verhalten der Platten vgl. den späteren Abschnitt (p. 94).

Die Aufnahmen wurden zunächst mit Bogenlicht als fluoreszenzerregender Lichtquelle ausgeführt. Nach ihrer Beendigung in der p. 62 geschilderten Anordnung mit der Quecksilberlampe.

Während der ganzen Expositionszeit wurde soweit möglich die Zimmertemperatur konstant gehalten. — Zur Regulierung diente neben der unregelmäßig wirkenden Dampfheizung ein Gasofen.

Der Dampfdruck des Joddampfes ließ sich durch das Bad in der Dewarflasche konstant halten; zur Kontrolle der Zimmertemperatur bei den langfristigen Aufnahmen verwendete ich einen Thermographen.

Die weitaus meisten Aufnahmen mit Bogenlicht dauerten 4 Stunden. Nach dieser Zeit mußte die Institutsbatterie frisch aufgeladen werden.

Damit während der Expositionszeit nicht größere Erwärmung des Magneten eintrat, wurde dieser nie sehr stark belastet, und ich begnügte mich bei den Aufnahmen mit einer Höchstfeldstärke von 20000 Gauss. Außerdem lief während der ganzen Aufnahmezeit ein Ventilator, der einen kräftigen Luftstrom gegen den Magneten blies und so auch dafür sorgte, daß das Joddampfgefäß — abgesehen von dem im Dewargefäße gekühlten Ansatz — stets in einem Luftstrome von Zimmertemperatur war.

Um mit diesen Expositionszeiten auszukommen, wurde der Spalt des Spektrographen auf 0,1 mm Öffnung gestellt. Wie aus der Dispersionsangabe folgt, waren die Banden dabei noch deutlich genug getrennt, um die Intensitätsvergleiche in jedem Teile des Spektrums vornehmen zu können. Doch sei ausdrücklich hervorgehoben, daß auch entsprechend längere Aufnahmen mit ganz engem Spalt (0,02 mm) gemacht wurden, vor allem, um über Punkt 5: Strukturveränderung und Lage der Banden bzw. Resonanzlinien, Aufschluß zu gewinnen. Das gleiche gilt von den Aufnahmen des Resonanzsprektums mit der Quecksilberlampe, für das hier die normale Expositionszeit 12 Stunden betrug. So lange Expositionszeiten sind wegen der möglichen Erschütterungen — von Temperaturschwankungen abgesehen, die nach Möglichkeit korrigiert wurden — natürlich bedenklich, soweit es sich um feine Linienzerlegungen u. dgl. handelt; doch können sie bei diesen Aufnahmen mit Spalt 0,2 die Ergebnisse nicht beeinflussen. Zudem war der Spektrograph durch sein großes Eigengewicht, seine feste Fundierung auf der Steinplatte des Zimmers ziemlich gesichert gegen Erschütterungen.

Da es unmöglich war, gleichzeitig die Fluoreszenzaufnahmen mit und ohne Magnetfeld auf die gleiche Platte zu machen, mußte eine Reihe von Bedingungen erfüllt sein, um die Spektra

hinsichtlich ihrer Intensitätsverteilung gegeneinander vergleichen zu können.

Es war erforderlich:

1. Die zur Fluoreszenzerregung dienende Lichtquelle (Bogen- oder Quecksilberlampe) mußte während gleichen Expositionszeiten mit konstanter Helligkeit brennen. Über das hierfür erforderliche „Einbrennen der Lampe", Kontrolle am Volt- und Amperemeter, Schutz der Quecksilberlampe gegen Luftströmung gilt das gleiche wie bei den okularen Messungen. Die kurzen Zuckungen der Bogenlampe, die bei letzteren Messungen störend empfunden wurden, spielen bei den Aufnahmen keine Rolle, da die Schwankungen nach Bruchteilen von Sekunden zählen und gegenüber einer mittleren Brennzeit von 4 Stunden die Gesamtlichtmenge nicht beeinflussen.

2. Der Dampfdruck des Jods mußte während der Aufnahme konstant bzw. die Temperatur und Dichte bekannt sein. Auch hierüber ist das Notwendige bereits gesagt. Zwischen den einzelnen Aufnahmen wurde noch die Reinheit des Jods bzw. die Güte des Vakuums im Gefäße mittels der angeschmolzenen kleinen Geisslerröhre geprüft.

3. Das magnetische Feld mußte in gleicher Stärke gehalten werden. Dies wurde bei niedrigen Stromstärken, zu denen der Strom der 10-Volt-Batterie des Institutes diente, die dann weiter nicht benutzt wurde, leicht erreicht. Bei großen Feldern und hohen Stromstärken, zu denen das Netz der Hochschulzentrale herangezogen werden mußte, ließen sich Schwankungen infolge wechselnder Spannung nicht vermeiden. Da aber bei diesen Strömen der Magnet der Sättigung nahe war, machten selbst Schwankungen bis 0,5 Amp. wenig aus. Jedenfalls wurden Abweichungen über 5 Proz. der Feldstärke nicht beobachtet. Mit den Expositionen wurde erst begonnen, wenn nach Erwärmung der Widerstände und des Magneten stationärer Zustand erreicht war.

4. Die zu vergleichenden Aufnahmen mußten auf gleicher Platte gemacht werden; denn nur so ist genügende Gewähr für gleiche Entwicklungsschwärzung usw. gegeben. Daß im übrigen alle Aufnahmen auf der gleichen Plattensorte möglichst einer Emulsion entstammend gemacht wurden, ist bereits angeführt. Alle Platten wurden mit Rodinal 1 : 10 mit ab-

gemessener kleiner Bromkalimenge 5 Minuten nach der Uhr entwickelt. Von Temperaturschwankungen wird dieser Entwickler wenig beeinflußt, und so ist auch die Schleierschwärzung fast auf allen Platten die gleiche. Ebenso die Gradation, die vom gewählten Entwickler abhängig ist.

Dabei waren die Expositionszeiten so zu wählen, daß zu vergleichende Spektra noch im Gebiete der Normalschwärzung (Normalexposition) liegen. Daß die Gradation im ganzen untersuchten Spektralbezirke keine großen Differenzen zeigte, ist schon p. 74 hervorgehoben worden. Das Gebiet, in dem das Sensibilisierungsvermögen des Pinachroms im Rot rasch abklingt ($\lambda > 6000$), wurde zur Beurteilung nicht mitherangezogen. ebenso wie die über- und unterexponierten Teile des Spektrums. Hierüber, sowie über gewisse bei den langfristigen Aufnahmen mit Quecksilberlicht auftretende Schwierigkeiten, wird im letzten Abschnitte p. 94 zu sprechen sein.

H. Auswertung der Spektrogramme.

Die stets im Luftstrome des Ventilators (nie wegen Dichteänderung im Alkohol) getrockneten Platten, wurden mit dem Hartmannschen Mikrophotometer ausgemessen.

Der benutzte Photometerkeil verläuft im Gebiete der Normalexposition so gleichmäßig, daß die Photometerkeilwerte nahezu proportional den wirklichen Schwärzungen zu setzen sind, und deshalb sind in den folgenden Kurven erstere als Ordinaten statt der wahren Schwärzungen benutzt. Die eingetragenen Werte für die Schwärzungen sind das Mittel aus wenigstens drei Ablesungen. Der mittlere Meßfehler wird eine halbe Einheit des Photometerkeils nicht übersteigen.

Zur Erleichterung der Ausmessung wurden, obschon die Lage der Fluoreszenzbanden und -linien hinreichend genau bekannt ist, die Hg-Linien als Fixpunkte zum Vergleiche in jedes Spektrogramm hineingeworfen.

Die Lage der Resonanzlinien ist neuerdings von R. W. Wood[1]) mittels eines großen Gitters genau bestimmt worden, und die seiner Arbeit beigegebene Reproduktion gibt eine gute Vorstellung des Spektrums, obschon die enormen Intensitätsunterschiede in den einzelnen Linien nicht so hervortreten, wie ich dies auf meinen Spektrogrammen bemerkte. Eine

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 1911. p. 469 u. Phil. Mag. 1912. p. 673.

ebenfalls gute Wiedergabe für das Aussehen des vollständigen Bandenspektrums nach R. W. Wood findet sich im Phil. Mag. Wie man hierauf deutlich sieht, besteht das Spektrum aus einer Reihe deutlich getrennter Banden, die nur zwischen λ 550—655 $\mu\mu$ etwas unregelmäßig durcheinandergreifen und daher hier schwieriger zu messen sind.

Ich habe auf Abbildung der Spektrogramme verzichtet, da die Intensitätsverteilung und -änderung sich graphisch klarer darstellen läßt. Da es aber bei okularer Mikrophotometrie unmöglich ist, ein so ausgedehntes Bandenspektrum vollständig zu photometrieren — leider stand mir ein Kochsches registrierendes Instrument nicht zur Verfügung und war auch jetzt nicht zu beschaffen —, so mußte ich mich damit begnügen, in jeder Bande die Hauptschwärzung zu bestimmen und diese Bezirke gleicher Wellenlänge in den einzelnen Spektren miteinander zu vergleichen. Auch so gingen die mikrophotometrischen Einzelablesungen noch bis zu Tausend.

Auf diese Weise sind die weiterhin folgenden Intensitätskurven jedes Spektrums entstanden und der Übersichtlichkeit halber durch eine Linie miteinander verbunden, obschon natürlich diese Schwärzungen nicht kontinuierlich einander folgen.

Die Kurven geben das Schwärzungsbild der Platte, wie es sich dem Auge darbietet, anschaulich wieder. Voraussetzung für die Möglichkeit solcher „Intensitätskurven" ist, daß die Spektra nicht durch das Magnetfeld eine Strukturänderung erfahren, indem etwa bestimmte Linien oder Liniengruppen ausfallen, verschoben, gespalten oder ungleich geschwächt werden; dies war aber, wie sorgfältige Vergleiche zeigten, (vgl. p. 99) nirgends der Fall.

Die Messung der Resonanzlinien gestaltet sich einfach. Ihre Darstellung durch eine analoge Intensitätsschwärzungskurve ist aber wegen der enormen Intensitätsunterschiede der einzelnen Linien undurchführbar; die Kurven würden sich derartig voller Maxima und Minima schneiden, daß der Überblick verloren ginge.

Ich habe deshalb nur in einem Falle (Fig. 12) die wirklich gemessenen Werte für einzelne Linien eingetragen, ohne sie untereinander zu verbinden und lediglich, um einen Vergleich in der Intensitätsverteilung und dem ganz verschiedenen Aussehen des Banden- und des Resonanzspektrums zu ermög-

lichen. Im übrigen habe ich beim Resonanzspektrum direkt die Schwärzungs*differenzen* in gleichen Linien der Spektra mit und ohne Feld eingetragen und diese geradlinig miteinander verbunden (Figg. 12, 13, 14).

Man sieht so, da es ja nur auf die Intensitätsunterschiede (Schwärzungsdifferenzen) der Linien bei verschiedenen Magnetfeldern ankommt, wie sich die Intensität in den einzelnen Teilen des Spektrums verschieden stark ändert, ebenso die Änderungen mit der Dampfdichte und Temperatur.

In den Kurven des Resonanzspektrums fehlen vollständig die Hauptlinien (die mit den anregenden Quecksilberlinien zusammenfallen). Sie sind infolge zerstreuten Lichtes (vgl. p. 62) soviel stärker und nicht meßbar, daß sie für jeden Vergleich ausscheiden müssen.

J. Resultate.

Die im folgenden wiedergegebenen Kurven (Figg. 6—14) stellen den Intensitätsverlauf der Spektren dar:

1. Bei verschiedenem Magnetfelde.
2. Bei verschiedenem Dampfdrucke und verschiedener Temperatur.
3. Bei verschiedener Anregung (Bogenlicht und Quecksilberlicht).

Außerdem ist zum Vergleiche für den Intensitätsverlauf gezeigt, wie das magnetisch nicht veränderte Spektrum auf den benutzten Platten bei variierter Expositionszeit und Beleuchtungsintensität zum Ausdrucke kommt, um zu beweisen, daß die gemessenen Abweichungen vom normalen Verlaufe nicht ihren Grund in Eigenschaften der benutzten sensibilisierten Platten haben (Fig. 11).

Die in einer jeden Tafel zusammengestellten Kurven sind — soweit nicht ausdrücklich anders bemerkt — auf ein und derselben Platte aufgenommen; ausnahmslos gilt dies von den vollständigen bei Anregung mit Bogenlicht erhaltenen Bandenspektren. Für die Quecksilberaufnahmen sei noch auf den folgenden Abschnitt verwiesen.

Die Kurven auf Fig. 6 zeigen den Verlauf des Spektrums bei konstanter Temperatur im Dewargefäße von 19,8° C und annähernd konstanter Zimmertemperatur von 21°. Der Joddampf ist also nahezu gesättigt.

Kurve *a* stellt den Verlauf bei magnetisch unbeeinflußtem Spektrum dar. Wie man sieht, liegt die maximale Intensität zwischen λ 5800—6000, also im Gelbrot. Der rasche Intensitätsabfall von λ 6100 ab dürfte mit der Abnahme der Plattenempfindlichkeit (Ende des Sensibilisierungsbandes) zusammenhängen. Dieser Teil ebenso wie das Gebiet über λ 5400 (wegen Unterbelichtung) ist von der Diskussion auszuschließen.

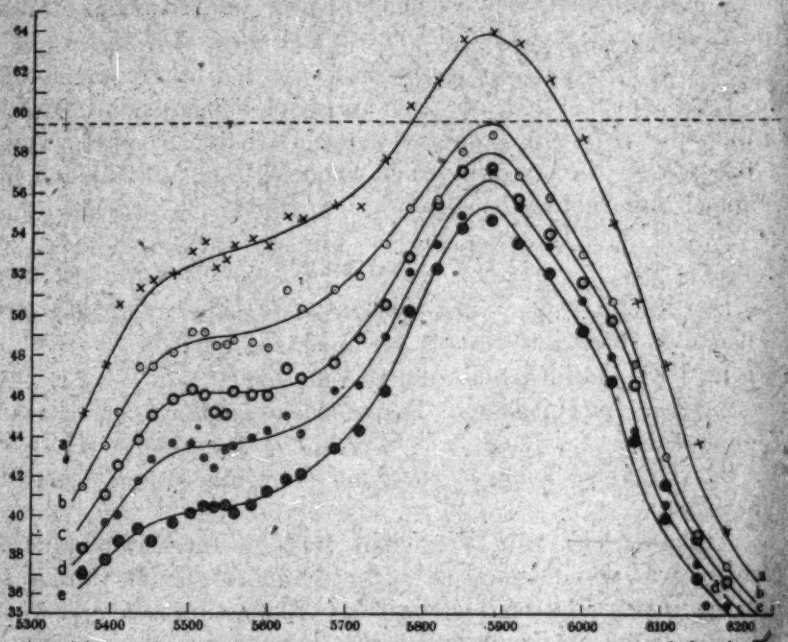


Fig. 6.

Kurve *b* stellt den Verlauf bei einem Magnetfelde von 5000 Gauss, *c* bei 10000 Gauss, *d* bei 15000 Gauss, *e* bei 20000 Gauss dar.

Wie man sieht, ist die Schwärzungsabnahme annähernd proportional dem Magnetfelde. Berücksichtigt man, daß man in diesem Gebiete der Normalexposition die Schwärzung dem Logarithmus der wirksamen Lichtmenge proportional zu setzen hat, so ergibt sich die völlige Übereinstimmung mit okularen Messungen im Spektralphotometer.

Ferner sieht man deutlich, wie im Gebiete kürzerer Wellen λ 5400—5700 die Schwärzung viel stärker erfolgt als im Rot, was sich ebenso bei den okularen Messungen gezeigt hatte.

Zwischen Kurve *a* und *b* ist scheinbar beim Einsetzen des Magnetfeldes auch im Rot die Schwächung von gleichem Betrage wie im Grün und daher im Vergleiche mit stärkeren Feldern anfangs die Schwächung viel größer; doch ist diese Wirkung nicht reell, wie Vergleiche mit anderen Platten zeigen; denn der rote Teil der Kurve *a* liegt schon außerhalb des Gebietes der Normalschwärzung (Grenze durch punktierte Linie in Fig. 6) und darf nicht mehr zu genauem Vergleiche herangezogen werden, weil hier die Photometerkeilwerte nicht mehr der Schwärzung proportional verlaufen.

Es war mir nicht möglich, auf einer Platte die Spektra ohne und mit verschiedenem Felde so zu erhalten, daß alle Spektra noch ganz im Gebiete der Normalschwärzung liegen.

Aufnahmen vom Spektrum ohne und mit schwachem Felde, entsprechend (Kurve *a* und *b* bzw. *c*) kürzer exponiert, zeigen, daß *auch Kurve a im Gebiete der Normalschwärzung genau gleichen Verlauf wie b, c, d, e im Rot besitzt* und der Schwärzungsunterschied im Rot entsprechend kleiner als im Grün ist, wie es der Vergleich der Kurven *b, c, d, e* zeigt.

Man könnte vielleicht die verschiedene Schwächung im Rot und Grün mit dem Verhalten der benutzten Platte in Verbindung bringen, und zwar so, daß die Gradation im Gelbgrün (λ 5400—5700) so viel stärker erscheint wie im Gebiete längerer Wellen, daß mit allgemein abnehmender Lichtintensität die Schwärzung beim Gebiete kürzerer Wellen rascher abklingt wie im langwelligen Spektrum.

Die Gradation ist zwar verschieden, aber in entgegengesetztem Sinne; auch sind die Unterschiede so gering, daß sie den Charakter des Spektrums nicht merkbar verändern.

Zur Erläuterung dient Fig. 10, p. 86.

Hier sieht man in den drei ausgezogenen Kurven *a, b, c* das Fluoreszenzspektrum ohne Magnetfeld, aber verschieden lange auf die gleiche Platte exponiert. Wie man sieht, verlaufen die drei Kurven verschiedener Intensität nahezu parallel.

Gleiche Kurven erhält man, wenn man die Intensität nicht variiert durch Änderung der Expositionszeit, sondern durch verkleinerte Lichtmenge, d. i. durch Abblendung des Kollimatorobjektives.

Zwischen diesen Kurven ist eine vierte *d* eingetragen, die das Fluoreszenzspektrum bei einem Magnetfelde von 20000 Gauss zeigt. Man sieht deutlich den steileren Anstieg im Gebiete langer Wellen oder, anders ausgedrückt, die stärkere Schwächung des Fluoreszenzlichtes im kurzwelligeren Spektrum, wo die Kurven weit auseinander gehen, während sie sich im Rot nahezu berühren.

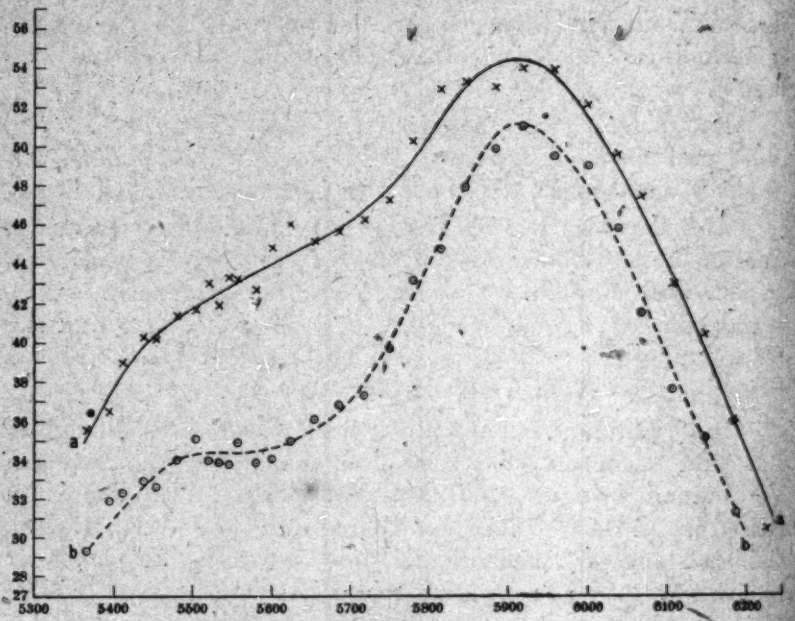


Fig. 7.

Figg. 7, 8, 9, 10 dienen zum Vergleiche für den Einfluß von Temperatur und Dampfdichte.

Durch die angewendete Methode: Kühlung des Ansatzes des Jodgefäßes in der Dewarflasche und Erhaltung auf bestimmter Temperatur, ist zwar ein bestimmter Druck des Dampfes im Gefäße gewährleistet, da dieser immer der kühlsten Stelle eines Raumes entspricht; es fragt sich aber, ob die mehr oder weniger große Überhitzung des Dampfes in den wärmeren Stellen irgendwie von Einfluß auf die Größe des magnetischen Effektes sei. Und diese Untersuchung ist erforderlich, weil es nicht möglich war, das ganze im Magnet-

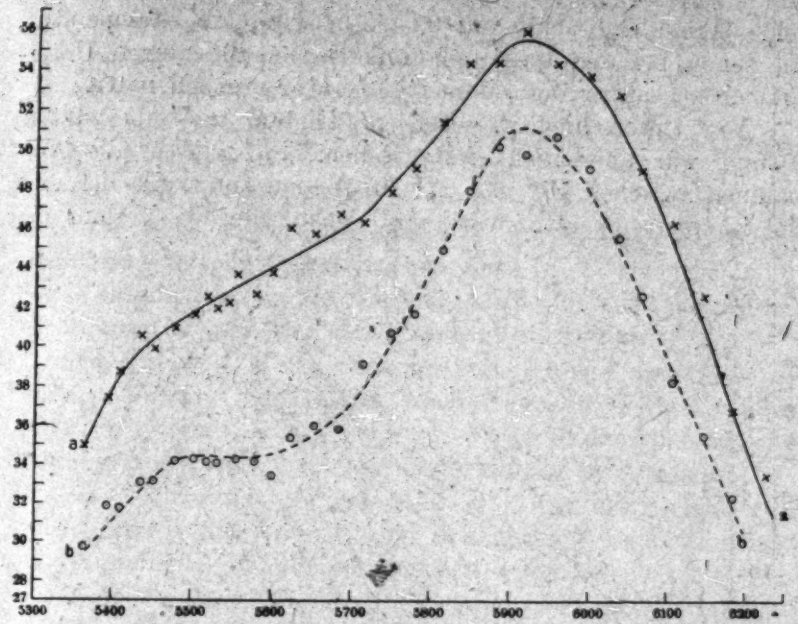


Fig. 8. λ in A.-E.

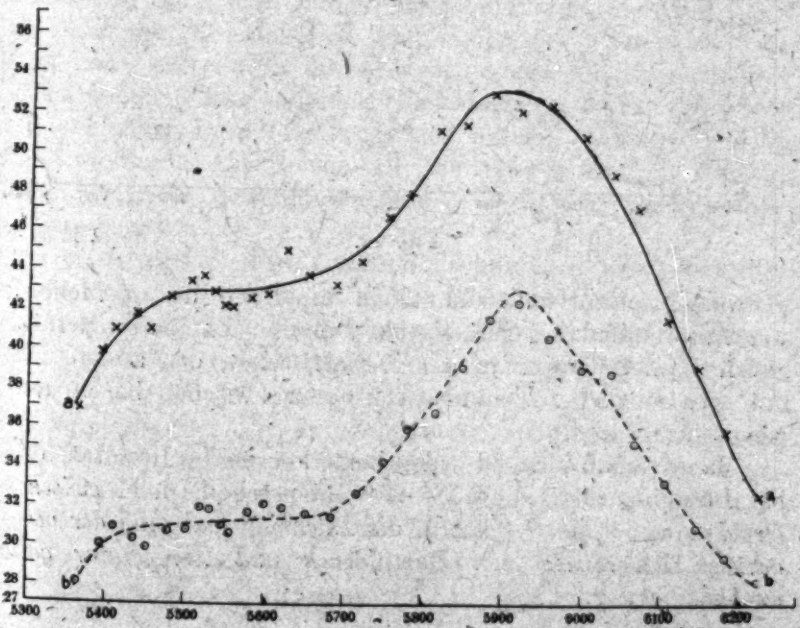


Fig. 9. λ in A.-E.

felde befindliche Gefäß auf 0° zu bringen, eine Temperatur, die schon bei den spektrophotometrischen Messungen Unterschiede gegenüber der Zimmertemperatur ergeben hatte.

Ein Unterschied zwischen gesättigtem und überhitztem Dampf war aber nicht festzustellen. So zeigten alle Aufnahmen zwischen 15° und 27° (in diesem Intervalle ließ sich die Zimmertemperatur variieren) genau gleichen Verlauf der

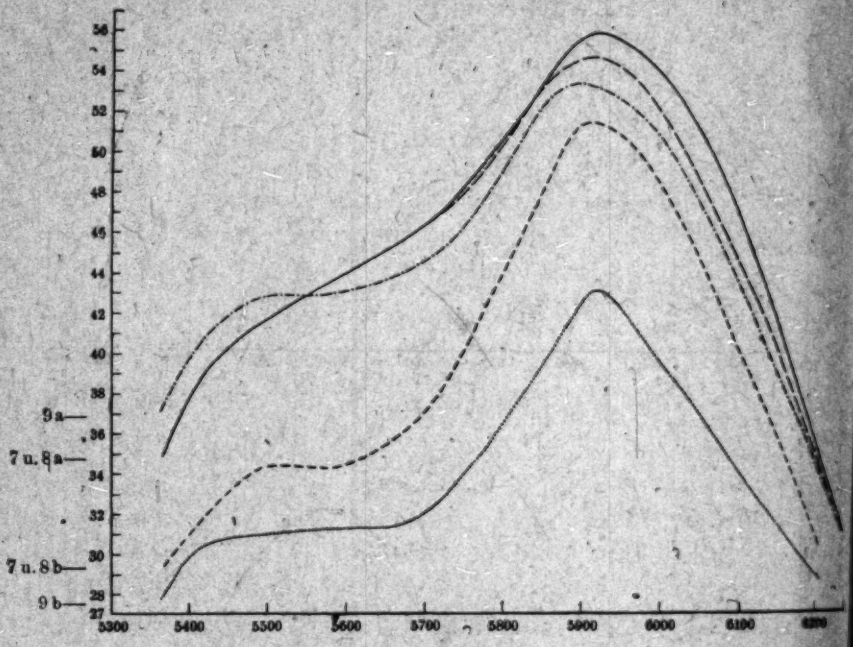


Fig. 10.

Schwächung (mit und ohne Feld innerhalb der Meßfehler), wenn sie einmal bei gesättigtem Dampfe (Zimmertemperatur gleich Badtemperatur in der Dewarflasche), das andere Mal mit größtmöglicher Temperaturdifferenz zwischen beiden aufgenommen waren.

Ja es ergab sich das sehr bemerkenswerte Resultat, daß bei Dampfdrucken, die 15°—20° entsprechen, d. h. *zwischen Drucken von 0,13—0,4 mm*[1]), *die Intensitätsänderung der beobachteten Fluoreszenz von Dampfdruck und Temperatur ganz unabhängig war.*

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 1914. p. 533.

Fig. 8 gibt die Fluoreszenz und Schwächung an überhitztem Dampf von 25°, Fig. 7 an gesättigtem Dampf von 20° wieder.

Dagegen ist zwischen 0° und 15° (Druck ca. 0,03—0,13 mm) der Effekt viel größer.

Die Kurven in Figg. 7, 8, 9 entstammen einer Platte, sind aber getrennt gezeichnet, um die Beobachtungswerte für jede Kurve getrennt erkennen zu lassen.

In Fig. 10 sind die Kurven noch einmal zusammengefaßt unter Fortlassung der einzelnen Meßpunkte.

Die Kurven 7*a*, 8*a*, 9*a* sind alle ohne Magnetfeld erhalten, aber mit verschieden langer Exposition, um sie in möglichst gleicher Schwärzung zu erhalten, da natürlich die Fluoreszenzhelligkeit von dem Dampfdrucke abhängig ist.

Die Kurven 7*b*, 8*b*, 9*b* sind alle mit Magnetfeld von 20000 Gauss aufgenommen, aber mit gleicher Expositionszeit und Dampfdruck wie die zugehörigen *a*-Kurven.

Beim Vergleich der drei *a*-Kurven sieht man zunächst, daß 7*a* und 8*a* im grünen Teile identisch verlaufen, d. h. im äußeren Grün schwache Intensität besitzen, die dann ziemlich steil zum Rot ansteigt, und zwar stärker noch bei 8 als bei 7, was sich durch die Absorption des Fluoreszenzlichtes im Joddampfe (durchlaufene Schichtdicke ca. 3 cm, vgl. p. 68) mit steigender Dampfdichte einfach erklärt. (Man vergleiche die betreffende Arbeit von R. W. Wood über Messungen und Absorption des Fluoreszenzlichtes in den verschiedenen Spektralbezirken).[1])

Da 8 bei 25°, also höherem Dampfdruck als 7 bei 20°, aufgenommen ist, wird das Grün stärker absorbiert wie das Rot, und noch deutlicher zeigt sich dieser Absorptionsunterschied zwischen den Kurven 8*a* und 7*a* einerseits und 9*a* andererseits.

Letzteres bei 0° aufgenommene Spektrum besitzt im Grün verhältnismäßig so schwache Absorption, daß der kurzwellige Teil der Kurve oberhalb der beiden anderen verläuft (vgl. Fig. 10), sie dann schneidet und im Rot unter den anderen bleibt.

Es ist bemerkenswert, daß diese an sich geringen Intensitätsunterschiede im Charakter des Spektrums (sie liegen

1) l. c.

innerhalb der einzelnen Meßfehler) in den Kurven zum Ausdrucke kommen.

Auffallend ist aber die magnetische Wirkung: der Vergleich zwischen den Kurven *b*.

Zunächst ist wieder die stärkere Schwächung mehr im Grün als im Rot, bei 8 und 7 besonders erkennbar. *Während aber diese beiden um den gleichen Bruchteil ihrer Gesamtintensität*

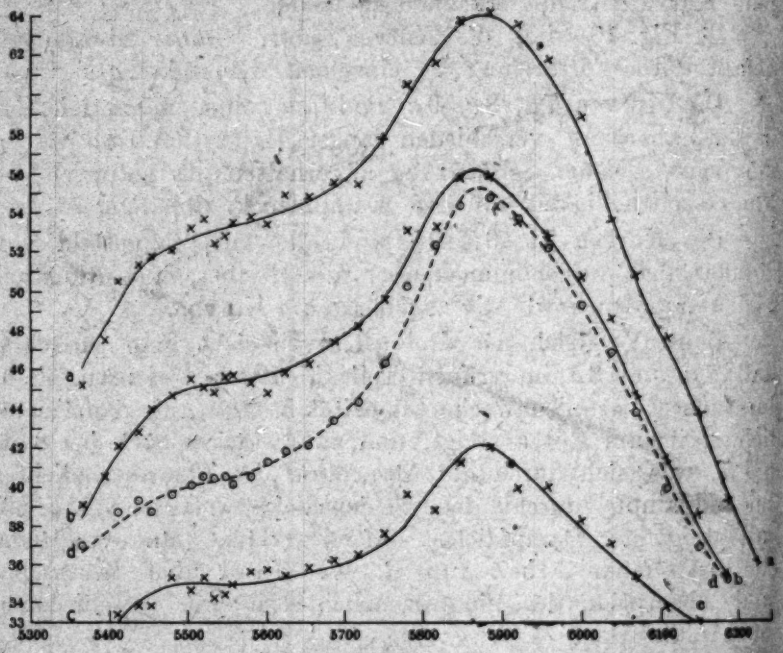


Fig. 11. λ in A.-E.

— trotz ihrer verschiedenen Dampfdrucke und verschiedenen Absoluthelligkeit — durch ein Feld von 20000 Gauss geschwächt werden, ist die prozentuale Schwächung bei 9 viel größer.

Eine einfache Erklärung dieses Unterschiedes zwischen den Kurven 8*b*, 7*b* einerseits und 9*b* andererseits läßt sich aus Temperatur- und Dichteänderungen allein nicht geben; *denn es ist nicht ersichtlich, warum die Änderung der Temperatur zwischen 0 und 15° und dadurch bewirkte Vermehrung der Dichte um ca. das Drei- bis Vierfache erheblichen Einfluß auf die magnetische Schwächung haben soll, nicht aber eine entsprechende Änderung der Temperatur von 15 bis 27° mit*

analoger Dichtevermehrung um das Dreifache, wobei noch keinerlei Unterschiede zwischen gesättigtem und überhitztem Dampf bemerkbar sind.

Die Erscheinung wird aber verständlich, wenn man die vorliegenden Versuchsbedingungen betrachtet.

Die Helligkeit jeder beobachtbaren Fluoreszenz in Dämpfen oder Lösungen hängt bei gewählten, unverändert bleibenden Schichtdicken von drei Faktoren ab.

1. Von der Helligkeit oder spezifischen Intensität der Erregungsquelle.

2. Von der Konzentration oder Anzahl fluoreszierender Moleküle.

3. Von der hiervon wieder abhängigen Absorption des erregenden und erregten Lichtes.

Solange der Dampfdruck sehr niedrig und die Anzahl fluoreszenzfähiger Moleküle gering ist, ist auch die Absorption des erregenden Lichtes gering und die Fluoreszenzhelligkeit aus ersterem Grunde schwach.

Mit wachsender Dampfdichte wächst die Molekülzahl, die Absorption des erregenden Lichtes und die Helligkeit der Fluoreszenz an der Beobachtungsstelle bis zu einem Optimum, das überschritten wird, wenn die wachsende Zahl fluoreszierender Moleküle nicht mehr der durch Absorption bedingten Intensitätsminderung des erregenden Lichtes das Gleichgewicht hält.

Von da aber sinkt die Fluoreszenzhelligkeit rasch ab und kann nur noch kräftig erhalten werden, wenn man die Schichtdicke verkleinert, um die Absorption dadurch zu kompensieren — vorausgesetzt, daß die Anregungsintensität unverändert bleibt.

Man kann dies auch anders ausdrücken:

Bei niedrigen Dampfdrucken nimmt jedes vorhandene Molekül so viel von der Energie des erregenden Lichtes auf, wie es von der spezifischen Intensität dieser Lichtquelle absorbieren kann, leuchtet also selbst mit einer gewissen Maximalhelligkeit, und die Amplituden bei der Emission des Spektrums haben einen gewissen Maximalwert.

Mit wachsender Dampfdichte wächst zwar die Anzahl fluoreszierender Moleküle und damit die Gesamthelligkeit;

gleichzeitig verliert aber das erregende Licht so viel durch vermehrte Absorption, daß auf das einzelne fluoreszierende Molekül ein geringerer Teil der Energie kommt, und dieses daher auch nicht in gleichem Maße wie im ersten Falle zum Selbstleuchten und Schwingen kommt.

„Es nimmt gewissermaßen die spezifische Leuchtkraft pro Molekül ab."

In unserem Falle hat das erregende Licht eine Dicke von 3 cm zu durchlaufen, ehe der Kegel im Interferrikum konzentriert wird. Bei 0° C ist die Dampfdichte (ca. 0,03 mm) noch so gering, wie sich durch einfache Versuche zeigen läßt, daß alle Moleküle ungefähr maximal erregt werden. Oberhalb 15° steigt aber die Dampfdichte sehr rasch an und zunächst auch noch mit ihr die Gesamthelligkeit, um bei ca. 26°—27° ihr Maximum zu erreichen; von da ab nimmt die Fluoreszenzhelligkeit rasch ab mit steigender Dampfdichte. R. W. Wood[1]) gibt in seiner Arbeit photometrische Messungen dieser Gesamthelligkeit und stellt den Verlauf graphisch dar.

Nimmt man nun an (vgl. p. 59, Einleitung), daß das Magnetfeld nicht die Dampfdichte und Zahl der fluoreszierenden Moleküle ändert — dann wäre wohl mit wachsender Dampfdichte eine größere Wirkung des Feldes wahrscheinlicher —, sondern daß die Schwingungen des einzelnen Moleküls geschwächt werden, so ist verständlich, daß die Wirkung bei so niedrigem Dampfdrucke eine andere ist wie bei höherem, und wenn hier die Schwächung bei 0° viel stärker hervortritt, so würde das heißen, *daß das magnetische Feld das einzelne Molekül um so stärker beeinflußt, je größere Amplituden bei der Fluoreszenzemission auftreten*, eine Folgerung, die im Einklang steht mit den obigen Beobachtungen (p. 72), daß photometrisch gemessen die Fluoreszenzschwächung stärker war bei sonst gleichen Dampfdrucken und Feldern, wenn mit der spezifisch helleren Bogenlampe als mit der Halbwattprojektionslampe die Fluoreszenz erregt wurde.

Natürlich ist auch hier vorausgesetzt, daß tatsächlich die Absorptionsverhältnisse von dem Magnetfelde nicht beeinflußt werden.

Bemerkt sei noch, daß R. W. Wood in der zitierten Arbeit[2])

1) l. c.

2) R. W. Wood, Phil. Mag. 1914. p. 1016.

angibt, bei höheren Temperaturen über 40°, obschon die Fluoreszenz noch deutlich war, habe er kaum eine Schwächung erhalten. (Vgl. auch Eingang p. 56.)

Ich verzichtete darauf, bei solchen Temperaturen zu messen, da dies ohne erhebliche Änderung der Versuchsanordnung nicht durchführbar war und ein solches Resultat nach Obigem wahrscheinlich und erklärlich ist.

Es schien wünschenswert, das erhaltene Resultat über den Einfluß des Feldes bei verschiedener Anregung noch anderweitig zu stützen. Mit schwächeren Lichtquellen zu arbeiten oder etwa das Bogenlicht durch Absorptionströge zu schwächen, war wegen der gesteigerten technischen Schwierigkeiten bei den dazu erforderlichen langen Expositionszeiten untunlich (die Batterien mußten dann zwischendurch aufs neue geladen werden u. a. m.), und auf das Sonnenlicht als hellere Lichtquelle, wo gesteigerte Wirkung zu erwarten wäre, mußte ich, wie schon bemerkt, verzichten.

Es kam zur Entscheidung dieser Frage noch das Resonanzspektrum in Frage. Die zur Erregung brauchbaren Quecksilberlinien besitzen eine so sehr viel größere Energie wie analoge Wellenlängenbezirke des kontinuierlichen Spektrums jeder Lichtquelle, daß man bei ihnen eine besonders große Wirkung erwarten mußte.

Ferner zeigt das Resonanzspektrum in der ganzen Intensitätsverteilung einen so besonderen Charakter, neben starken Linien treten ganz schwache auf, daß man erwarten kann, hier besonders gutes Material für die Untersuchung zu finden, *welche Rolle die Intensität in den einzelnen Frequenzen auf die Größe des Effektes spielt.*

Daß man über die Entstehungsart und die Eigentümlichkeiten dieses Resonanzspektrums nichts Genaues weiß, hat wohl weniger Bedeutung, da es nicht darauf ankommt, auf welche Art die Schwingungen entstehen, sondern nur darauf, ob sie mit großer oder kleiner Intensität (Amplitude) erfolgen.

Fig. 12 gibt ein Bild des Resonanzspektrums, in dem in gleicher Art wie bei den früheren Kurven (nur daß die Meßwerte nicht zu einer Kurve vereinigt sind) die gemessenen Schwärzungen ohne Feld und mit Magnetfeld von 20000 Gauss eingetragen sind.

Die Schwärzungen liegen zwischen Unter- und Überexposition.

Die Schwärzungen ohne Feld sind durch ⊕, mit Feld durch × in der Figur für jede einzelne Resonanzlinie bezeichnet, die Differenzen aus beiden durch ◉ gekennzeichnet.

Man sieht die enormen Intensitätsunterschiede der Linien im ganzen Spektrum und die Unmöglichkeit, sie übersichtlich in eine Kurve zusammenzufassen. Unterhalb der Werte selbst befinden sich geradlinig zu Kurven verbunden *die Schwärzungsdifferenzen zwischen Linien gleicher Wellenlänge in beiden Spektra*, um ein Maß für die magnetische Wirkung zu geben, und zwar sind für sich verbunden die Schwärzungsdifferenzen bei den starken Linien *a* (Schwärzungskeilwerte größer als 30) und bei den schwachen *b* (Keilwerte zwischen 22 und 30), und zwar nur der Übersichtlichkeit halber.

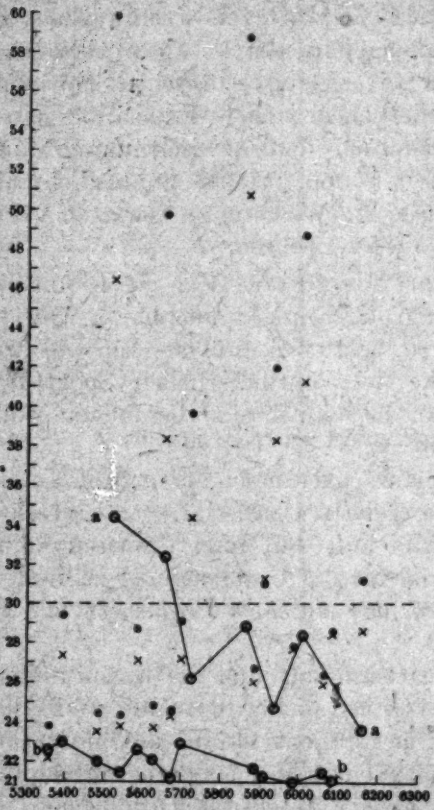


Fig. 12.

(In den folgenden Kurven Figg. 13 und 14 sind die schwachen Linien, weil durchweg unterexponiert, ganz fortgelassen.)

Die Differenzkurve *a* zeigt ebenso wie *b*, *daß die Schwächung mit wachsender Wellenlänge abnimmt, genau wie bei den vollständigen Bandenspektren*.

Ferner zeigt besonders *a*, wie die magnetische Schwächung — von der spektralen Lage der Linien abgesehen — *um so stärker hervortritt, je intensiver die einzelne Linie erscheint, d. h. je größer die Schwingungsamplituden in allen Frequenzen,*

ein Resultat, das sich also vollständig mit dem zuvor erörterten deckt.

Bei den schwachen Linien ist die magnetische Wirkung zum Teil so gering, daß sie wegen der Meßfehler überhaupt nicht mehr sicher festzustellen ist.

Im übrigen ist der Gang des Effektes bei allen Aufnahmen der gleiche wie im vollständigen, mit Bogenlicht erregten Fluoreszenzspektrum, soweit das später besprochene Verhalten der Platten die Feststellung erlaubte.

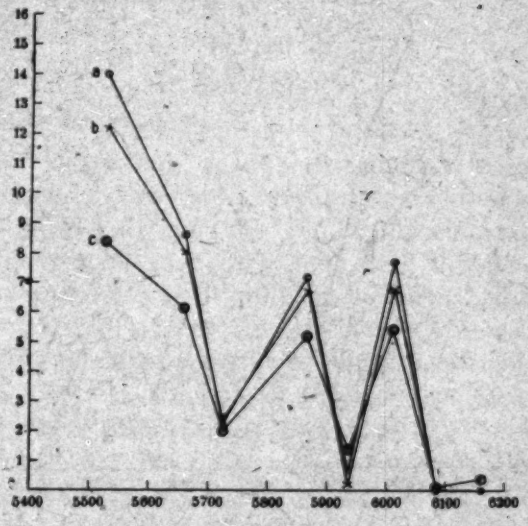


Fig. 18.

So zeigen die Schwärzungsdifferenzen der magnetischen Wirkung bei 20° und 25° keine Unterschiede. Desgleichen sind Kurven bei gesättigtem und ungesättigtem Dampfe identisch und die Schwärzungsdifferenzen bei verschiedenem Felde zeigen proportionalen Gang.

Das letztere erläutert die Fig. 18, die die Unterschiede bei Feldern von 20000 gegen 15000 Gauss *c*, von 20000 gegen 10000 Gauss *b* und von 20000 gegen 5000 Gauss *a* darstellt. Bei gleicher Temperatur (20°) und Bedingungen wie die analogen Aufnahmen des vollständigen Bandenspektrums.

Während aber bei Temperaturen über 15° keine Unterschiede in den Kurven hervortreten (genau wie zuvor p. 84), zeigt sich wieder bei 0° C eine bedeutend größere Wirkung, wie die folgende Fig. 14 erkennen läßt. (Kurve *a* Schwärzungsdifferenz bei 0°, Kurve *b* bei 18°.)

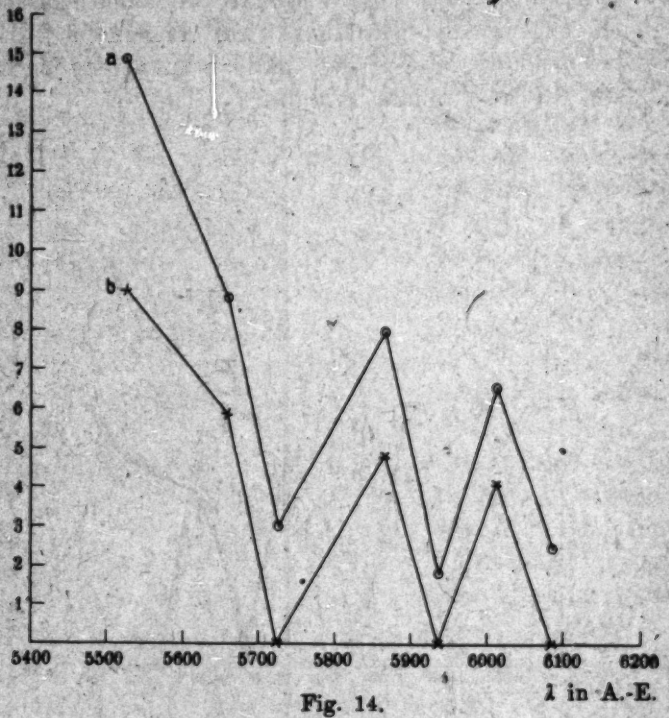


Fig. 14.

Es ergeben übereinstimmend die spektrographischen Aufnahmen und Ausmessungen bei Anregung der Fluoreszenz mit Bogenlicht und mit Quecksilberlicht folgendes:

I. *Die Schwächung durch das Magnetfeld ist verschieden im Spektrum, und zwar sind Linien und Banden im Gebiete kürzerer Wellenlänge stärker geschwächt wie nach längeren Wellen hin, so daß also eine spektrale Intensitätsverschiebung mit dem Magnetfelde verbunden ist.*

II. *Die Schwächung für verschieden starke Felder zeigt eine dem Magnetfelde proportionale Schwärzungsabnahme im Gebiete der Normalexposition, in dem die Schwärzung proportional dem Logarithmus der einwirkenden Lichtmenge ist.*

III. *Strukturänderungen im Bau des Banden- und Resonanzspektrums sind nicht nachweisbar.*

IV. *Die Temperatur und Dampfdichte haben keinen Einfluß auf die Größe und Art der magnetischen Einwirkung, soweit sekundäre Einwirkungen durch Absorption ausgeschlossen sind.*

V. *Das Magnetfeld äußert um so stärkere Wirkung, je intensiver die Fluoreszenzerregung pro Molekül durch die äußere Lichtquelle erfolgt bzw. je größer die Schwingungsamplituden in den einzelnen Frequenzen des Fluoreszenzspektrums sind.*

Diese Resultate stehen in Punkt 1, 2 und 5 in Übereinstimmung mit den durch okulare Photometrie gewonnenen Ergebnissen.

K. Fehlerquellen.

I. Polarisation.

Bei der Beurteilung der spektrophotometrischen und spektrographischen Messungen darf eine Erscheinung nicht unbeachtet bleiben, die von R. W. Wood aufgefunden und untersucht worden ist. Letzterer fand, daß Joddampf, wenn die Anregung zur Fluoreszenz mit polarisiertem Lichte erfolgt, seinerseits im Gegensatze zu den meisten Fluoreszenzerscheinungen wieder teilweise polarisiertes Licht ausstrahlt.[1])

Er beobachtete und maß die Erscheinung mit Savartscher Platte und Fresnelschem Biprisma. Dabei stellte er ferner fest, daß auch bei Beleuchtung mit natürlichem Lichte ein geringer Bruchteil des Fluoreszenzlichtes (4—6 Proz.) noch polarisiert war, ein Anteil, der sich einfacher Beobachtung mittels Nikolschem Prisma und bloßem Auge entzieht. Es war mir auch bei den spektrophotometrischen Messungen nicht möglich, einen Einfluß eines zwischengeschalteten Nicols festzustellen.

Solange aber über den Vorgang bei der Emission des Fluoreszenzlichtes nichts Genaues bekannt ist, ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß unter dem richtenden Einflusse des Magnetfeldes auch dieser polarisierte Bruchteil eine besondere Änderung erfährt, daß dieser ferner durch die Optik des Spektrographen bei den mehrfachen

1) R. W. Wood, Phil. Mag. Juli 1908 u. Phil. Mag. 1911. p. 478; vgl. auch Phys. Zeitschr. 1913. p. 1200.

Reflexionen und Brechungen in den Prismenflächen verschieden stark geschwächt und dadurch die spektrale Intensitätsverteilung in den Spektrogrammen beeinflußt würde.

Eine spektrographische Untersuchung des Polarisationszustandes in den einzelnen Teilen des Spektrums, etwa durch Zerlegung mittels Wollastonprisma o. dgl., ist durch die Lichtschwäche und die bei den längeren Expositionen vermehrten Fehlerquellen nicht durchführbar. Ob aber der Polarisationszustand bei der spektralen Intensitätsverteilung im Magnetfelde mitspielte, wurde auf zweierlei Weise nachgeprüft.

A. Es wurden wie immer Aufnahmen mit und ohne Magnetfeld auf eine Platte gemacht und zum Vergleich das Spektrum nochmals mit gleicher Feldstärke, aber nach Zwischenschaltung einer drehenden 1,8 mm dicken Quarzplatte zwischen Spalt und Projektionslinse aufgenommen. Um gleiche Schwärzungen in den Spektra zu erhalten, wurde der Lichtverlust an der Quarzplatte (berechnet nach den Fresnelschen Formeln) durch entsprechend vermehrte Expositionszeit ausgeglichen.

Die Spektra zeigten aber völlig identischen Schwärzungsverlauf.

B. Bei dem zweiten Versuche wurde das Prisma im Apparate durch das p. 68 geschilderte, metallisch reflektierende Plangitter ersetzt und mit ihm Aufnahmen ohne und mit Magnetfeld gemacht.

Die Aufnahmen waren wegen der Lichtschwäche des Gitters (verglichen mit dem Prisma) sehr schwierig; doch gelang es, zwei brauchbare Aufnahmen zu erhalten, die zeigten, *daß der Intensitätsverlauf mit und ohne Magnetfeld der gleiche war, wie ihn die mit dem Prisma erhaltenen Aufnahmen zeigen.*

Daraus folgt, daß die aus den Spektrogrammen erhaltenen Intensitätskurven unabhängig von der Optik der Versuchsanordnung sind und daß der etwa vorhandene polarisierte Bruchteil des Fluoreszenzlichtes auf Größe und Verlauf der magnetischen Einwirkung nicht maßgebend ist.

II. Verhalten der photographischen Platten.

Es mag sonderbar erscheinen, daß bei der Auswertung der Spektrogramme die mikrophotometrischen Messungen mehr

zur qualitativen als quantitativen Photometrie des Spektrums herangezogen sind.

Das hat seinen Grund in dem besonderen Verhalten der benutzten Platten, das quantitative Folgerungen sehr erschwert.

Um aus gemessenen Schwärzungen die zugehörigen Intensitäten ermitteln zu können bzw. um das Intensitätsverhältnis aus den Schwärzungswerten anzugeben, muß die Schwärzung als Funktion der Lichtmenge (Intensität × Zeit) bekannt sein. Diesem Zwecke dienen die Schwärzungsgesetze.

So hat Schwarzschild in seinem bekannten Gesetze die Abweichung von der photographischen Reziprozitätsregel ($i_1 . t_1 = i_2 . t_2$), die für genauere Messungen völlig versagt, durch die Formel $s = i . t^p$ ausgedrückt, worin s die „latente" Schwärzung bedeutet und p eine für die betreffende Plattensorte bestimmte Konstante ist.

Die entwickelte Schwärzung S ist also als Funktion dieser latenten Schwärzung s anzusehen, und hat man die Schwärzungskurve (Schwärzung-log. Zeit-Kurve) für die betreffende Platte ermittelt, ebenso den Exponenten p durch Versuche mit zwei in bekanntem Verhältnisse stehenden Intensitäten, so kann man für eine gegebene Schwärzung aus der Abszisse der Schwärzungskurve, der Expositionszeit und dem Exponenten p die zugehörige Intensität bzw. das Intensitätsverhältnis zweier Schwärzungen angeben.

Will man dies zunächst für unzerlegtes Licht gültige Gesetz zur spektralen Photometrie benutzen, so setzt das voraus, daß Schwärzungskurve und Konstante p der betreffenden Platte nicht ihrerseits Funktionen der Wellenlänge sind, ferner, daß der Gültigkeitsbereich des Gesetzes hinsichtlich der Schwärzungsfunktion genau bekannt ist.

Da hierüber keine zuverlässigen, zum Teil widerspruchsvolle Angaben vorlagen, untersuchte J. Stark genauer die Bedingungen zur spektralen Photometrie. Ausgehend von den Gesetzen von Hurter und Druffield, stellte er für eine hochempfindliche, nicht sensibilisierte Plattensorte (Lumière) durch weitgehende Variation von Expositionszeit und Intensität die Schwärzungsfunktion S in Abhängigkeit von der Wellenlänge nach der Formel $S = \log . (k . i^m . t^n)$ fest und beschränkte den Gültigkeitsbereich auf das Gebiet der

Normalexposition, in welchem er bemerkenswerte Konstanz des Intensitäts- und Zeitexponenten fand.

Es lagen somit für vorliegende Arbeit genügend Unterlagen vor, die Schwärzung quantitativ zur Messung des Effektes in jeder Wellenlänge auszunutzen. Dem stand folgende Schwierigkeit entgegen.

Die Schwärzungsgesetze nehmen nach einmaliger Bestimmung der Konstanten (p oder n, m) an Platten einer Emulsion deren Unveränderlichkeit für längere Dauer an oder — vorsichtiger ausgedrückt — sie nehmen wenigstens an, daß innerhalb einer Platte während der Expositionszeit das belichtete und unbelichtete Bromsilberkorn keinerlei Änderung erfährt.

Dies war aber, wie sich bei den langfristigen Aufnahmen bei Quecksilberlicht zeigte, bei diesen Platten keineswegs der Fall. Vielmehr ließ sich bei sehr langen Expositionen beobachten, daß durch fortschreitende „Reifung" der Emulsion die Empfindlichkeit und die Konstanten der Platte Änderungen erfuhren.

Macht man nämlich auf ein und dieselbe Platte Aufnahmen gemessener Zeitdauer mit einer konstanten Lichtquelle (spektral zerlegt oder unzerlegt) in Zwischenräumen von zwei Tagen, während in der Zwischenzeit die Quecksilberlampe zeitweilig oder dauernd brennt, so findet man auf der entwickelten Platte verschiedene Schwärzungen für gleiche Werte von $i \cdot t$.

Die Schwärzungen auf der Platte nehmen anfangs wenig, später mehr zu, ohne daß auf der Platte Schleierbildung eintritt, bis endlich bei langer Dauer dieses Versuches (über 14 Tage) die Platte kräftig zu schleiern beginnt, kraftlos wird — kurz, verdorben erscheint.

Die Gründe hierfür sind zweifache. In erster Linie trägt die Ozonbildung der Quecksilberlampe die Schuld, in zweiter Linie wirkt hohe Temperatur.

Wie schon aus älterer Zeit bekannt ist, wirken manche Stoffe, darunter Ozon, auf die photographische Platte ein. Bei schwacher Einwirkung analog schwacher Vorbelichtung, bei stärkerer Einwirkung ähnlich den Entwicklern.

Außerdem spielt aber die Zimmertemperatur eine große Rolle.

Es zeigte sich nämlich, daß bei niederer Temperatur (Zimmer unter 18°) Platten derselben Emulsion und Sensibilisierung nach längerem Liegen in offener Kassette im Apparate kaum verändert waren, während bei höherer Temperatur, *über 20° bei gleicher Zeitdauer*, solche Platten schon stärksten Schleier hatten. Andererseits waren Platten, die bei ununterbrochen tätiger Quecksilberlampe, eingewickelt in verschlossener Pappschachtel, in demselben Raume lagen, nur wenig verändert, während eine vor Lichtwirkung geschützte, aber im Apparate mit der Zimmerluft in freier Berührung befindliche Platte stark schleierte.

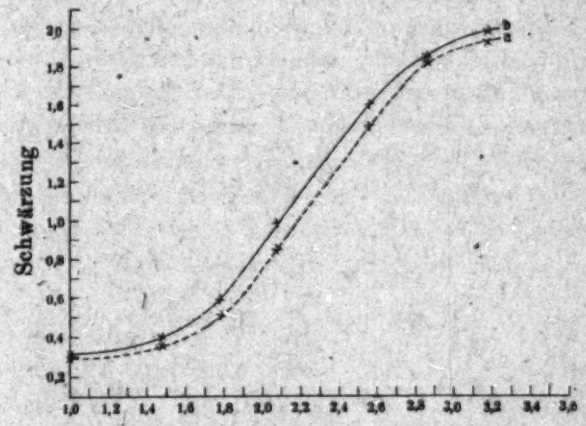


Fig. 15.

Dieses Verhalten der Platten — das für alle langfristigen Aufnahmen bei stark ultravioletten Lichtquellen wohl zu beachten sein dürfte — konnte unter Umständen die ganzen Messungen in vorliegender Arbeit gefährden, und darum wurden die Platten genauer untersucht.

Zunächst ergab sich aber, daß bei den verhältnismäßig kurzen, rasch aufeinanderfolgenden Aufnahmen mit Bogenlicht keine nennenswerten Änderungen, selbst bei hoher Zimmertemperatur, zu befürchten waren.

Ferner fand ich, daß auch bei den Quecksilberaufnahmen innerhalb der größten von mir verwendeten Expositionszeiten (5 Tage) *die Gradation konstant blieb für eine gegebene Wellenlänge.*

Es zeigte sich nur eine Parallelverschiebung der Schwärzungskurve, wie dies Fig. 15 erkennen läßt.

Die beiden Kurven sind bei ausgewählt ungünstigen Verhältnissen aufgenommen, wie sie für die Aufnahmen kaum vorkamen, d. h. die Zimmertemperatur sank nicht unter 25°, die Quecksilberlampe brannte außer kurzen, zur Batterieladungen erforderlichen Pausen dauernd, während die Platte offen in der Kassette des Apparates lag.

Zu Beginn (Kurve *a*) und zu Ende (Kurve *b*) dieser fünftägigen Versuchszeit wurden durch Variation der Expositionszeit die Schwärzungswerte erhalten.

Man sieht, daß das latent geschwärzte Bromsilber unverändert blieb und nur das unbelichtet gebliebene in dieser Zeit an Empfindlichkeit zugenommen hatte, ohne seine spezifischen Eigenschaften zu verändern. Die Platte ließ sich noch ohne große Schleier entwickeln.

Da also die Änderung — wenigstens unter den angegebenen Verhältnissen — nur in einer Parallelverschiebung besteht, *ist die Intensitätsverteilung der einzelnen Spektralaufnahmen als gesichert anzusehen*, nicht dagegen die absolute Schwärzungshöhe jeder einzelnen Kurve.

Aber durch Kontrollversuche ließ sich auch hierfür eine gewisse Sicherheit erhalten. Soweit bei den Aufnahmen bei höherer Temperatur (höher als 18°), wie vorerwähnt, diese Schwärzungsschiebung anzunehmen war, wiederholte ich die Aufnahme mit und ohne Feld auf einer Platte in der Weise, daß mit einer Aufnahme ohne Feld begonnen wurde, dann eine solche mit Feld kam, darauf wieder eine ohne, worauf die Schwärzungen miteinander verglichen und aus gleichen Aufnahmen der Mittelwert genommen wurde.

Auf diese Weise wurden die Aufnahmen kontrolliert und ergaben die im vorhergehenden Abschnitte besprochenen Resultate.

Ferner bestimmte ich die Exponenten der Platten für zwei Wellenlängen und fand die erwartete Änderung.

Legt man die Starksche Formel der Spektralphotometrie zugrunde, so ergibt sich das Intensitätsverhältnis aus den Schwärzungen bei gleicher Expositionszeit, wie dies hier der Fall ist, als

$$i_1/i_2 = e^{\frac{s_2 - s_1}{m}},$$

oder, wenn die Schwärzungsdifferenz ca. 0,3 beträgt, macht eine 10proz. Änderung von m (im Mittel 0,55), dessen Wert genauer nicht zu erhalten ist, schon eine Änderung im Intensitätsverhältnis von 5 Proz. aus, wobei die Meßfehler in der Schwärzungsdifferenz noch nicht in Anrechnung gebracht sind. Eine genauere Bestimmung der Konstanten ist aber nach Obigem ein aussichtsloses Beginnen.

Ich verzichtete daher darauf, genauere Werte aus der photographischen Schwärzung zu nehmen, als sie das spektrophotometrische Verfahren lieferte, zumal in der Erwägung, daß *quantitative Vergleiche*: *Schwächung als Funktion des Feldes und Extrapolation aus den gemessenen Werten, auf Verschwinden der Fluoreszenz*, wie dies R. W. Wood getan hat, *nur bedingten Wert haben, weil die Schwächung nach allem zuvor angeführtem nicht allein eine Funktion des Feldes und der Dampfdichte ist, sondern in erster Linie eine Funktion der Anregung der Fluoreszenz* oder besser der Schwingungen im Molekül ist und daher *quantitative Vergleiche zwischen Erregungsenergie* und Verbrauch pro Molekül vorausgehen müßten.

Die photographische Untersuchung wurde nicht auf anderes Plattenmaterial ausgedehnt, da, wie p. 74 angegeben, weniger empfindliche Platten die Untersuchung erschwert, wenn nicht unmöglich gemacht hätten. Es ist anzunehmen, daß die beobachteten Erscheinungen auch bei anderen Platten — bei weniger empfindlichen und nicht sensibilisierten wohl in geringerem Grade — anzutreffen sein werden, wobei noch Rücksicht auf die Sensibilisierungsart zu nehmen wäre. Jedenfalls wäre eine genauere Untersuchung für spektrophotometrische Vergleiche aus Schwärzungsmessungen durchaus wünschenswert, ebenso ob sich nicht eine Methode daraus gewinnen läßt, die Plattenempfindlichkeit bis zum Maximum zu steigern für Aufnahmen lichtschwächster Objekte, ähnlich wie dies schon durch die Vorbelichtung geschehen ist.

L. Zum Zeeman- und Starkeffekt.

Über etwaige Strukturänderungen des Spektrums im Magnetfelde ist schon berichtet worden, daß solche weder im Banden- noch im Resonanzspektrum bei dieser Dispersion

erkennbar waren. Damit war die Möglichkeit der mikrophotometrischen Vergleiche gegeben.

Es ist natürlich von Interesse, zu entscheiden, ob außer der hier untersuchten magnetischen Wirkung noch ein Zeemaneffekt im Spektrum auftritt. Die Schwierigkeit der Untersuchung liegt darin, daß die magnetische Schwächung des Spektrums die Anwendung hoher Dispersion durch Gitter ausschließt, und R. W. Wood hat deshalb vor längerer Zeit eine Untersuchung auf Zeemaneffekt, bei der ihm die magnetische Schwächung entgangen war, mit dem Gitter aufgeben müssen.[1])

In einer späteren Arbeit, bei der er den inversen Zeemaneffekt untersuchte, fand er, daß ein solcher nicht vorhanden war, wenigstens hätte er bei Feldern von 20000 Gauss kleiner als 0,01 A.-E. sein müssen.

Bei dem in vorliegender Untersuchung benutzten Prismenspektrographen betrug die Dispersion ca. 2,5 A.-E. pro 0,1 mm; selbst bei engstem Spalt (0,02 mm) wären natürlich nur größere Effekte sichtbar gewesen, evtl. Verbreiterungen der Linien, die nicht andeutungsweise gefunden wurden. Ich möchte es aber für wahrscheinlich halten, zumal im Hinblick des Fehlens im inversen Effekte, daß diese magnetische Wirkung im Bandenspektrum des Jod, wie in der Mehrzahl der Bandenspektren, gar nicht vorhanden ist.

Daneben erhebt sich die Frage, ob statt der magnetischen vielleicht eine elektrische Zerlegung der Linien auftreten kann.

Es zeigte sich zunächst, daß das elektrische Feld auf die Intensität der Fluoreszenz nicht den schwächenden Einfluß ausübt wie das magnetische, und es mag hier kurz die Anordnung beschrieben werden, die ich wählte, um die Fluoreszenz nach der Starkschen Methode zu untersuchen. Die folgende Fig. 16 gibt die Form des verwendeten Joddampfgefäßes an. Es besteht in der Hauptsache aus zwei schlierenfrei geblasenen Kugeln A und B von 5,5 cm Durchmesser, die in der Mitte zusammengepaßt sind, indem die vordere A zum Eintritt des Lichtkegels, die hintere zum Austritt dient, während an der Stelle der engsten Einschnürung der Fluoreszenzkegel beobachtet wird.

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 1911. p. 471.

Hier stehen im Abstande von ca. 1,5 mm sich zwei parallel in die Wand eingeschmolzene Platinbleche gegenüber, die also die vordere Kugel von der hinteren lichtdicht trennen würden, wenn nicht eine zentrale Bohrung in der Mitte Platz genug für den engen Beleuchtungskegel ließ (vgl. Fig. 16, punktierter Strahlengang).

Damit aber beim Anlegen des Feldes an die Bleche, die mit eingeschmolzenen Zuführungen nach außen versehen sind,

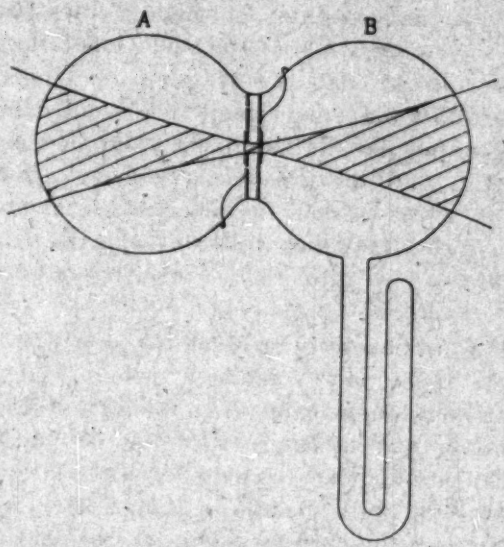


Fig. 16.

nicht in der Öffnung die Entladung eintritt, sind die Öffnungen durch aufgeschmolzene dünne Glasplättchen luftdicht abgeschlossen, während zum Ausgleich des Gasdruckes die Platinbleche eine Reihe feiner Öffnungen tragen. Durch einen Kühlansatz wird in bekannter Weise der Dampfdruck wie nötig reguliert.

Ich fand so, daß man bei dem gewählten Elektrodenabstande bis zu einer Dampfspannung von ca. 0,06 mm (Temp. 10°—11°) gehen konnte, ohne daß die Entladung beim Anlegen der Hochspannungsmaschine einsetzte. Das erhaltene Feld hatte eine Größe von ca. 18000 Volt/cm.

Um einen möglichst intensiven, gut begrenzten Licht-

kegel zu bekommen, wurde die Untersuchung bei Sonnenlicht im Hörsaale des Institutes vorgenommen.

Ich konnte keinerlei Intensitsänderungen, ebensowenig Strukturänderungen feststellen, wobei allerdings zu beachten ist, daß die Beobachtung nur mit dem Geradsichtsspektroskop, nicht spektrographisch vorgenommen worden ist.

Schluß.

Als Hauptergebnis der Arbeit möchte ich es hinstellen, daß sich die magnetische Schwächung der Jodfluoreszenz nicht auf bestimmte Vorgänge und Vorstellungen zurückführen läßt, sondern daß es sich hier um eine bislang nicht beobachtete Wirkung eines Magnetfeldes auf die Elektronenschwingungen bei der Emission eines Bandenspektrums handelt, derartig, daß die einzelnen Schwingungen geschwächt werden, und zwar stärker in höheren wie in niederen Frequenzen, ferner, daß das äußere magnetische Feld um so stärker einwirkt, je größer die Schwingungsamplituden bei der Emission sind.

Die hier beobachtete Schwächung des Fluoreszenzlichtes hat also gar nichts mit Vorgängen gemein, wie sie sonst bei Fluoreszenzerscheinungen auftreten, wo die Beimischung fremder Gase, Einfluß von Lösungsmitteln u. ä. die Fluoreszenzfähigkeit des betreffenden Körpers vermindern oder vernichten.

Daraus folgt weiter, daß die magnetische Wirkung mit der eigentlichen Fluoreszenz wenig zu tun hat, vielmehr ist der gleiche Effekt zu erwarten, wenn das gleiche Bandenspektrum auf anderem Wege, etwa im elektrischen Strome, zur Emission gebracht wird. Und zwar ist auf Grund der zuvor festgestellten Tatsache, daß die magnetische Schwächung bei sonst gleichen Bedingungen (Dampfdichte usw.) um so stärker erfolgt, mit je größerer Energie pro Molekül die Emission stattfindet, anzunehmen, daß das elektrisch angeregte Bandenspektrum durch wesentlich schwächere Magnetfelder entsprechend geschwächt wird, vielleicht sogar, daß die Emission durch das Magnetfeld ganz unterdrückt wird, wenn man bedenkt, daß zur Anregung des Bandenspektrums unter normalen Bedingungen im elektrischen Strome ganz andere Energiemengen ins Spiel treten wie bei der Fluoreszenz durch Lichtabsorption.

Da das Jodbandenspektrum nicht nur in Fluoreszenz zu erhalten ist, sondern mit dem im Glimmstrome in der positiven Säule erhaltenen im allgemeinen als identisch angesehen wird, so ist die experimentelle Prüfung obiger Schlüsse möglich.

Zugleich wird zu untersuchen sein, ob das Phänomen nur eine Eigentümlichkeit des Jods ist oder ob es auch bei anderen Elementen und Verbindungen auftritt.

Es kann nach diesem auch nicht auffallen, daß der Effekt bei anderen fluoreszierenden Körpern nicht beobachtet worden ist und meine in der vorigen Arbeit[1]) mitgeteilten, an anderen fluoreszierenden Elementen angestellten Versuche negatives Resultat hatten.

Selbst wenn andere Elemente in ihren Bandenspektren dem gleichen magnetischen Einflusse unterliegen sollten, wird die Größe dieser magnetischen Wirkung eine andere sein, und diese hängt von der Stärke des Magnetfeldes einerseits und der Amplitude der Schwingungen andererseits ab, braucht also im Fluoreszenzspektrum bei Magnetfeldern bis 20000 Gauss noch gar nicht wahrnehmbar zu sein und kann erst unter anderen Bedingungen auftreten.

Ich möchte nicht verfehlen, Hrn. Geheimrat Grotrian für die Überlassung seines Elektromagneten meinen Dank nochmals auszusprechen.

Besonderen Dank schulde ich aber der „Rheinischen Gesellschaft für wissenschaftliche Forschung" in Bonn, durch deren Unterstützung mir die Durchführung dieser Arbeit überhaupt ermöglicht wurde.

Aachen, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, Februar 1918.

Zusatz. — Inzwischen haben weitere Versuche die Richtigkeit obiger Schlüsse in soweit dargetan, als es mir gelungen ist, das Jodbandenspektrum in der positiven Säule des Glimmstromes (Hochspannungsgleichstrom) im Magnetfelde zu untersuchen und sowohl die Schwächung wie Vernichtung der Banden zu verfolgen (es genügen dazu schon ganz schwache Felder, wie nach Obigem zu erwarten war).

---

1) Vgl. Anm. p. 55.

Dies Verschwinden des Bandenspektrums ließ sich außerhalb des Magnetfeldes bei gleichen Bedingungen nicht willkürlich hervorrufen, etwa durch Änderung der Stromdichte in weiten Grenzen oder durch Vergrößerung des Potentialgefälles, wie sie als sekundäre Wirkungen des Magnetfeldes auf den Strom in Betracht kämen.

Mit Sicherheit möchte ich behaupten, daß dieses Bandenspektrum in Emission sich auf keine Weise in starken Magnetfeldern etwa auf Zeemaneffekt wird untersuchen lassen, weil es im Magnetfeld nicht existenzfähig ist.

Die Wirkung scheint nicht allein auf dieses Jodbandenspektrum beschränkt zu sein, sondern tritt auch bei einzelnen anderen Elementen auf, die typische Bandenspektra besitzen, natürlich nicht allgemein, denn z. B. der Stickstoff zeigt ebensowenig wie die Verbindungsspektra des Kohlenstoffes irgend welche Andeutung dieses Effektes in seinen verschiedenen Bandenspektren.

Die Resultate werden nach Abschluß der noch in Gang befindlichen Arbeit mitgeteilt werden.

Juli 1918.

(Eingegangen 29. Juli 1918.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

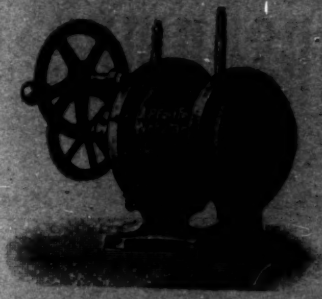
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

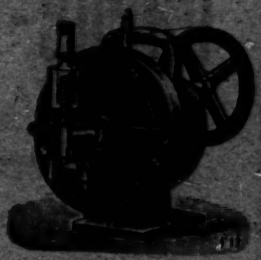
System Pfeiffer, D. R. P.



Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

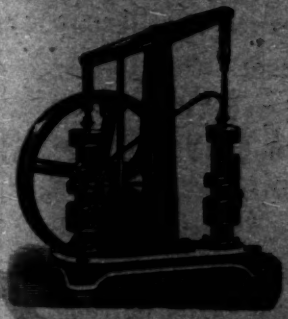
Neukonstruktionen nach Angabe.

System Gaede, D. R. P. angemeldet



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.**



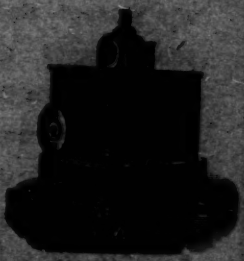
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

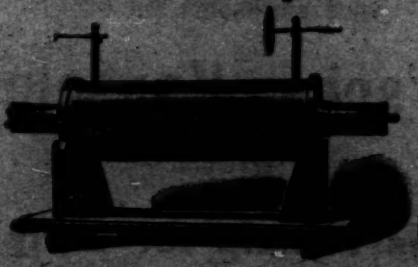
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. W. Arkadiew. Über die Absorption elektromagnetischer Wellen an zwei parallelen Drähten 105
2. R. Ambronn. Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron—Kalk—Silikatgläsern 139
3. Max Berek. Über den senkrechten Durchgang linear polarisierter ebener Wellen durch planparallele Platten durchsichtiger inaktiver Kristalle 165
4. E. Ehrenhaft und D. Konstantinowsky. Bemerkung zum Nachtrage der R. Bärschen Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität 199

1919. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. *Über die Absorption elektromagnetischer Wellen an zwei parallelen Drähten;* von *W. Arkadiew.*

§ 1. Einleitung.

Trotz der vielen Arbeiten, welche theoretisch die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen an Drähten behandeln, haben wir bisher noch keine experimentellen Untersuchungen dieser Erscheinungen, in denen irgendein ausführlicher und genauer quantitativer Vergleich zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen ausgeführt wäre. Die vorliegende Arbeit, welche eine weitere Untersuchung des schon früher von mir[1]) entdeckten Verschwindens der magnetischen Eigenschaften bei den kleinsten elektrischen Wellen darstellt und welche auf Veranlassung meines unvergeßlichen Lehrers, Hrn. Professor Dr. P. Lebedew, unternommen wurde, scheint die erwähnte Lücke einigermaßen auszufüllen.

§ 2. Theoretisches.

Mie[2]) hat den Weg zur exakten theoretischen Lösung der Frage über die Fortpflanzung ungedämpfter elektrischer Wellen an zwei parallelen unendlich langen Drähten erwiesen. Um diesen Vorgang quantitativ zu charakterisieren, sind zwei Größen notwendig: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stromphasen ω oder die Wellenlänge ωT, und der auf die Längeneinheit bezogene Absorptionskoeffizient der Amplitude k, welcher der Hälfte des Absorptionskoeffizienten der Energie γ gleich ist ($\gamma = 2k$). Bezeichnen wir die Energie der Wellen in dem Punkte x_1 durch E_1, so haben wir

$$E_1 = E \cdot e^{-\gamma(x_1 - x)}, \tag{1}$$

wo E die Energie im Punkte x bedeutet.

1) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 45. p. 133. 1914.
2) G. Mie, Ann. d. Phys. 2. p. 201. 1900.

Mie faßt in der üblichen Weise λ und $\varkappa$ in einen komplexen Ausdruck zusammen

$$\frac{2\pi}{\lambda} - ki = c,$$

welchen er durch c bezeichnet und aus der „Gleichung für Wellenlänge und Dämpfung" berechnet.

Diese Gleichung ist für einen speziellen Fall besonders einfach; nämlich wenn der Strom in jedem Drahte bezüglich seiner Achse symmetrisch verteilt ist und wenn nur der Leitungsstrom der Rückleitung in dem anderen Drahte mitwirkt: ist der Abstand der Drahtachsen a kleiner als ein gewisser Grenzwert, so beeinflußt jeder Draht die Stromverteilung in dem anderen; ist aber a größer als ein gewisser anderer Grenzwert, so fängt der den Drahtachsen parallele Verschiebungsstrom an, von merkbarem Einfluß zu werden.

Später werden wir sehen, daß die Geschwindigkeit und die Absorption von der Selbstinduktion L und von dem Widerstande W der Längeneinheit der Leitung abhängen; diese Größen werden unmittelbar durch die übermäßige Nähe der Drähte beeinflußt, was aus einer der Gleichungen (58) von Mie folgt. Dieser Einfluß ist durch Glieder ausgedrückt, welche das Verhältnis des Drahtradius ϱ zum Drahtabstande a enthalten. Die Formeln (62), welche Mie für die direkte Berechnung von W und L gibt, gestatten die Änderung ΔW und ΔL zu bestimmen[1]), welche diese Glieder mit hineinbringen. Diese Änderung erreicht ihr Maximum bei den schnellsten Schwingungen ($T = 0$) und beträgt dann

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2$$

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2}{\lg \frac{a}{\varrho}}.$$

Wenden wir uns den folgenden Formeln (10) und (11) zu, so finden wir, daß man γ mit einer Genauigkeit von 1 Proz. berechnen kann, wenn man den kleinsten Drahtabstand durch die Bedingung

1) Vgl. ausführlicher W. Arkadiew, Journ. d. Russ. Physik.-Chem. Ges., Physik. T. 44. p. 165. 1912.

$$(2) \qquad 2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 < 0{,}01 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\varrho} > 14$$

bestimmt.

Die zweite Bedingung ergibt sich aus der Beziehung[1]), daß

$$\left(\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} - c^2\right) 4a^2,$$

gegen Eins klein sein soll.

Diese Beziehung führt bei den Werten von λ_0, λ und $\gamma = 2k$, welche in unserem Falle statthaben, zur Fordernug

$$(3) \qquad \frac{a^2\gamma}{\lambda_0} < 0{,}01\,.$$

Sind die beiden Bedingungen (2) und (3) erfüllt, so wird die Aufgabe der Berechnung von λ und k mittels der Gleichung

$$c^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2 \lg\frac{a}{\varrho}}\left(\lg\frac{a}{\varrho} + \mu\frac{J_0(x)}{xJ_0'(x)}\right)$$

gelöst, wo $x = \varkappa\sqrt{-8i}$, J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung erster Art, J_0' ihre Ableitung nach x ist. Hier ist durch $\varkappa$ die Größe

$$(4) \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{\pi\mu}{wT}}$$

bezeichnet, wobei μ und w bzw. die magnetische Permeabilität und den Widerstand pro Längeneinheit des Drahtes bedeutet.[2])

Wir setzen

$$4i\varkappa^2\frac{J_0(x)}{xJ_0'(x)} = A + Bi$$

oder

$$\frac{J_0(x)}{xJ_0'(x)} = \frac{1}{4\varkappa^2}(B - Ai),$$

wo A und B Funktionen von $\varkappa$ sind. Nun können wir der angeführten Gleichung eine Form geben, welche für die praktische Berechnung von λ und k sehr bequem ist, da für die Funktionen A und B die Kurven bekannt sind:[3])

1) G. Mie, l. c. p. 231.

2) Hier sind alle Größen im elektromagnetischen CGS.-System ausgedrückt.

3) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. p. 1135. 1903. Durch A und B bezeichne ich die Ordinaten der Kurven A und B in den Figuren von J. Zenneck.

$$c^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2 \lg \frac{a}{\varrho}} \left(\lg \frac{a}{\varrho} + \frac{\mu}{4x^2}(B - Ai) \right),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(5) \quad c^2 = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{9 \cdot 10^{20} \cdot 4 \lg \frac{a}{\varrho}} \left[\frac{2\pi}{T} \left(4 \lg \frac{a}{\varrho} + B \frac{\mu}{x^2} \right) - \frac{2\pi i A \mu}{T x^2} \right].$$

Bei sehr langsamen Schwingungen, wenn L, W und die Kapazität pro Längeneinheit C mit ihren Werten für Gleichstrom identisch sind, haben wir:[1])

$$(6) \quad c^2 = \frac{2\pi}{T} C \left(\frac{2\pi}{T} L - Wi \right).$$

Vergleichen[2]) wir diese Gleichung mit (5), so finden wir:

$$(7) \quad C = \frac{1}{9 \cdot 10^{20} \cdot 4 \lg \frac{a}{\varrho}},$$

$$(8) \quad L = 4 \lg \frac{a}{\varrho} + \frac{w T}{\pi} B,$$

$$(9) \quad W = 2 w A,$$

wo C, L und W die Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand der Längeneinheit der Drahtleitung für die Periode T bedeuten.

Berechnen wir λ und k aus der Gleichung (6), so haben wir für $\omega = \lambda / T$ und für $\gamma = 2k$:

$$\omega^2 = \frac{8\pi^2 L}{C W^2 T^2} \left(\sqrt{1 + \frac{W^2 T^2}{4\pi^2 L^2}} - 1 \right),$$

$$\gamma^2 = \frac{8\pi^2 L C}{T^2} \left(\sqrt{1 + \frac{W^2 T^2}{4\pi^2 L^2}} - 1 \right).$$

In unserem Falle ist der Bruch unter dem Wurzelzeichen sehr klein; bezeichnen wir ihn durch 8ζ, so können wir schreiben:

$$(10) \quad \omega^2 = \frac{1}{L C}(1 - 2\zeta),$$

$$(11) \quad \gamma^2 = \frac{W^2 C}{L}(1 - 2\zeta),$$

1) G. Mie, l. c. p. 203.

2) Vgl. darüber M. Abraham, Ann. d. Phys. **6**. p. 222. 1901

wobei

$$\zeta = \frac{W^2 T^2}{32\pi^3 L^3} \tag{12}$$

Wir substituieren nun für C, L und W ihre Werte und setzen:

$$\frac{w T B}{4\pi \lg \frac{a}{\varrho}} = 2\eta. \tag{13}$$

Bei sehr kurzen Perioden ist B gleich $\varkappa$ (vgl. unten); es ist nicht schwer einzusehen, daß dann 2η einen sehr kleinen Bruch darstellt. Dann ist

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \eta + \zeta}, \tag{14}$$

wo $\omega_0 = 3 \cdot 10^{10}$,[1]) und

$$\gamma = \frac{w A}{2\omega_0 \lg \frac{a}{\varrho}} \frac{1}{1 + \eta + \zeta}.$$

Mit der Abkürzung

$$p = \frac{w}{2\omega_0 \lg \frac{a}{\varrho}} \tag{15}$$

wird

$$\eta = \frac{B\lambda_0}{4\pi} p, \tag{16}$$

wo $\lambda_0 = \omega_0 T$ und

$$\gamma = \frac{A p}{1 + \eta + \zeta}. \tag{17}$$

Für die unmittelbare Berechnung ist es bequem, die hier erhaltenen Formeln etwas abzuändern. Dabei werden wir überall T durch λ_0/ω_0 ersetzen, w durch $r \cdot 10^7$, wobei r der

---

1) Der Bruch η ist viel größer als ζ; vernachlässigen wir den zweiten in (14) und die beiden in (17) und tragen wir p aus (16) ein, so ergibt sich:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \eta}, \quad k = \frac{\gamma}{2} = \frac{2\pi\eta}{\lambda_0} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\mu}{8\varkappa \lg \frac{a}{\varrho}},$$

da bei größeren Werten von $\varkappa$ die Größe A gleich B und $\varkappa$ ist (vgl. unten). So kommen wir zu den Formeln, welche E. Cohn (Elektrom. Feld, p. 480. 1900) bei der Betrachtung nur dieses letzteren Falles der schnellsten Schwingungen erhalten hat. Vgl. auch J. Zenneck, Elektrom. Schwingungen, p. 711. 1905.

Widerstand in Ohm eines Meters des zu untersuchenden Drahtes bedeutet. Wir haben nun:

$$\varkappa = 97{,}2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_0 r}}, \tag{18}$$

$$p = \frac{0{,}724\, r}{\lg_{10} \frac{a}{\varrho}} \cdot 10^{-4}, \tag{19}$$

$$\eta = 7{,}96 \cdot B \lambda_0 p \cdot 10^{-2}. \tag{20}$$

Da bei meinen Versuchsbedingungen ζ den Wert $1 \cdot 10^{-4}$ nicht überschritt, konnte man ω und γ mittels der Formeln

$$\omega = \frac{\omega_0}{1+\eta}, \tag{21}$$

$$\gamma = \frac{A p}{1+\eta} \tag{22}$$

berechnen, deren Gültigkeit durch die Ausdrücke (2) und (3) und durch die Kleinheit der Größen η und ζ bedingt ist.

Was die Funktionen A und B anbelangt, so erhält Zenneck mittels seiner graphischen Methode sehr einfache Interpolationsformeln, nach denen sich A und B berechnen lassen. Er findet

$$\begin{cases} A = 0{,}997\, \varkappa + 0{,}277, \\ B = 1{,}007\, \varkappa - 0{,}040. \end{cases} \tag{23}$$

Ihr Gültigkeitsbereich ist von Zenneck durch die Bedingung bestimmt: $1{,}5 < \varkappa < 10$. Ich aber wende sie auf das ganze Intervall der Änderungen von $\varkappa$ (von 1,7 bis zu einigen Hundert), welches im gegebenen Falle statthatte, an; es ließe sich zeigen, daß das vollkommen zulässig ist.

§ 3. Die Methode.

Zur Messung der Geschwindigkeit und der Absorption diente ein und derselbe Apparat. Auf den Fokallinien eines elliptischen Metallzylinders waren ein Hertzscher Vibrator und ein Resonator angeordnet. Durch eine Öffnung hinter dem Resonator im Zylinder, welcher in Wirklichkeit aus zwei Hertzschen elliptischen Spiegeln bestand, waren zwei parallele Drähte gezogen, welche an den Resonator so angeschlossen waren, daß sie in seiner Mitte der fünften Teil der Länge ein-

nahmen. Längs der Drähte ließ sich ein Thermoelement verschieben, welches sie dabei in einem beliebigen Punkte überbrückte. Bei Erregung des Resonators pflanzen sich längs der Drähte elektrische Wellen fort, welche das Thermoelement erwärmen. Wenn dieses Thermoelement sich in einem Abstande von einigen Halbwellenlängen vom Resonator befindet, schneidet es an den Drähten ein gewisses Rechteck ab, das auf Schwingungen des Resonators resonierte. Das mit einem Galvanometer verbundene Thermoelement zeigte bei seiner Verschiebung längs den Drähten die Maxima der Erwärmung an, aus deren Verteilung man die Länge der sich fortpflanzenden Wellen bestimmen konnte.

In einer gewissen Entfernung von diesem Resonanzgebiete, welches ich als *Messungsgebiet von* λ bezeichnen werde, kommen wir in das *Messungsgebiet von* γ. Diese Entfernung wird durch die Bedingung bestimmt, daß die vom Thermoelement und Resonator reflektierten Wellen, die dann wieder zum Thermoelement zurückkehren, nur einen hinreichend kleinen Teil der ursprünglichen Energie mit sich bringen sollen. Dieses Gebiet erstreckt sich desto weiter, je länger die Drähte sind; bei Verschiebung des Thermoelementes von dem hinteren Ende des Drahtsystemes kommen wir in das Messungsgebiet von γ, sobald die Energie der Wellen, die nach Reflexion am hinteren Ende des Systems zum zweiten Male am Thermoelement vorbeistreichen, hinreichend klein im Verhältnis zur Energie der primär ankommenden Wellen ist.

Aus oben Gesagtem geht hervor, daß die Theorie von Mie, welcher die Drähte als unendlich lang voraussetzt, nur in diesem mittleren Teile des Apparates anwendbar ist. In diesem γ-Gebiete stellen wir das Thermoelement nacheinander in zwei Punkten auf, deren Entfernung vom Resonator bzw. x und x_1 sei, und messen mittels der Galvanometerausschläge die durch diese Punkte hindurchströmende Energie E und E_1; auf Grund dieser Messungen können wir dann vermittelst der Gleichung (1) den Absorptionskoeffizienten γ bestimmen.

Nach dieser Methode konnte man die Messungen nur mit kürzeren Wellen und an dünnen Drähten ausführen, da sonst der Apparat sich in einem gewöhnlichen Zimmer nicht unterbringen ließe.

Auf Grund dieser allgemeinen Erwägungen, deren größten Teil ich Hrn. Professor Dr. P. Lebedew zu verdanken habe, wurde von mir eine Anordnung ausgearbeitet, deren Beschreibung ich weiter folgen lasse.

§ 4. Versuchsanordnung.

I. Messungen mit Wellen von 1,3—4,82 cm.

Als Grundlage der ganzen Anordnung diente eine große Holzbank von 5 m Länge. Der Sekundärstrom vom Induktorium J (Fig. 1) wurde dem Vibrator v zugeführt. Zwischen

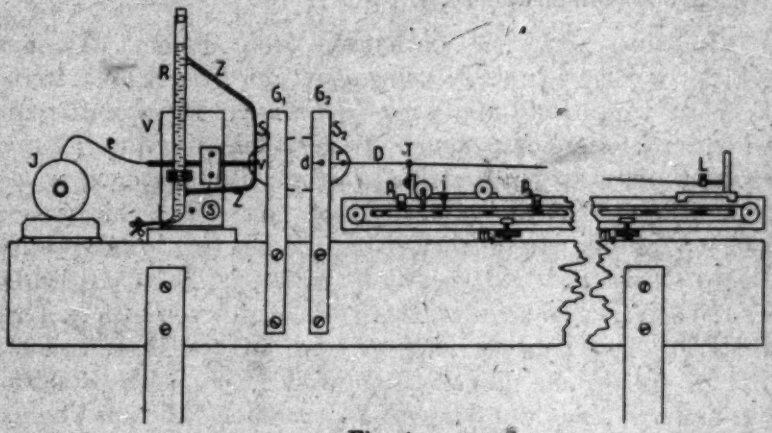


Fig. 1.

den elliptischen Spiegeln S_1 und S_2 war auf zwei Stäben G_2 eine Metallplatte mit einer runden Öffnung befestigt, an der sich ein rundes, drehbares Hertzsches Polarisationsgitter befand. Von dem Resonator, welcher mit einem Isolierfaden an die Stäbe G_2 angebunden war, gingen die zu untersuchenden Paralleldrähte aus, die über ein langes Doppel-T-Eisen (4,2 m) gespannt und mittels einer Klemme L befestigt waren. Auf den Rändern des Eisenbalkens war ein schwerer, bleierner dreirädriger Wagen verschiebbar angeordnet, an den ein Thermoelement T angeschraubt werden konnte. Des letzteren Lage auf den Drähten ließ sich mit dem Index i bestimmen, welcher parallel einem auf dem Eisen aufgespannten Band maße aus Stahl lief. Das Eisenstück selbst ruhte auf Stäben mit Stellschrauben m_1 und m_2. Die Verschiebung des Wagens

geschah mittels einer endlosen Schnur, welche zwei Rollen auf den Enden des Eisenstückes umfaßte.

Zur Bestimmung des Verhältnisses E/E_1, welches für die Berechnung von γ erforderlich war, konnte man auf dem Rande des Eisens zwei Klammern p_1 und p_2 mit Schrauben befestigen, die bei der Hin- und Herbewegung des Wagens als Anschlag dienten. Die Verschiebung wurde mittels zweier Schnuren bewerkstelligt, welche mit der endlosen Schnur des Apparates verbunden und in den Händen des Beobachters waren, der sich in einer Entfernung von 2 m von der Bank befand.

Die Ablesung der Lage des Thermoelementes auf dem Bandmaße geschah oft mittels eines Fernrohres. Ein anderes Fernrohr diente zum Ablesen der Ausschläge des Galvanometers, das sich hinter der Bank befand.

II. Messungen mit Wellen von 10—72,8 cm.

In diesem Falle wurden die Spiegel einzeln gestellt, und zwischen denselben befanden sich weder Metallplatten noch Polarisationsschutzgitter. Das übrige blieb ohne Veränderungen. In der nachfolgenden Beschreibung der einzelnen Apparate wird die Konstruktion der schwingenden Systeme in den größeren Spiegeln unterlassen.

§ 5. Die Apparate.

Der Vibrator. — Auf den Glashörnchen der Glasröhren $T\,T$ (Fig. 2) waren mit Schellack zwei Aluminiumzylinder oder Platten v aufgesetzt. Die Röhren T waren an zwei Brettchen befestigt, welche nach Art eines Buches durch zwei Schlingen zusammengebunden waren. Mittels der Feder F und der Schraube s konnte man den Funken f regulieren; letzterer bildete sich (nach Stschodra) in Aceton, welches das Gummirohr erfüllte, das durch zwei Seitenstiche auf die Köpfchen des Vibrators aufgesetzt war. Die freien Enden des Gummirohres waren an die Zweige Z des breiten Glasrohres R angeschlossen (Fig. 1),

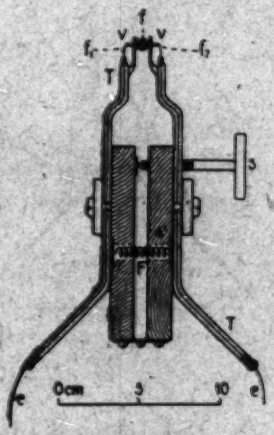


Fig. 2.

das das Hauptreservoir für das Aceton bildete. Infolge Erwärmung des Acetons und Bildung von Gasblasen in dem Funken ging in dem Kreise $vZRZv$ fortwährend eine Zirkulation der Flüssigkeit vor sich, die zur Abkühlung des Vibrators erforderlich war. Die Energiezufuhr zum Vibrator wurde durch die Drähte ee und die Funkenstrecken f_1 und f_2 von 8 mm Länge bewerkstelligt.

In Fig. 3 ist ein Vibrator für Wellenlänge von 1,3 cm dargestellt. Seine Länge war von 2,8—3,1 mm. Der Außendurchmesser des Gummirohres war 1,7 mm und der Innendurchmesser dementsprechend 1 mm.

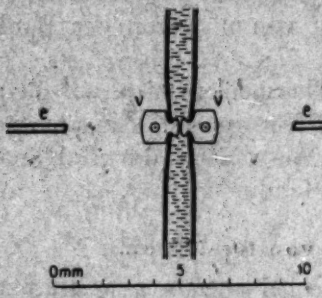


Fig. 3.

Die Funkenlänge im Aceton variierte zwischen 0,01 und 0,03 mm.

Der Resonator bestand aus einem Messingrohr mit Einschnitten, durch welches ein Isolierfaden dd durchgezogen wurde, dessen Enden an den Wirbeln in den Holzstäbchen G_2 befestigt waren. Die Enden der zu untersuchenden Drähte wurden zusammengekoppelt, und diese Verbindungsstelle befand sich im Inneren des Resonators. Die Einschnitte waren so tief, daß der Abstand zwischen den herausragenden Drahtenden ein Viertel der Resonatorlänge nicht überstieg.

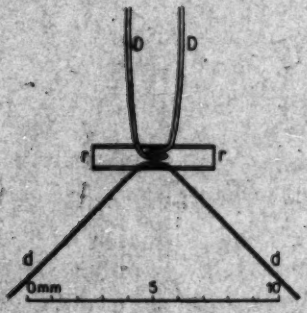


Fig. 4.

Auf die Rohrenden wurden manchmal Ansätze aufgesetzt, die aus dünnem Kupferblech gebogen waren und zur Einstellung auf Resonanz dienten. In Fig. 4 ist die Verbindungsart der Drähte von 0,20 mm mit dem Resonator r für $\lambda = 1{,}3$ cm gezeigt.

Die Länge l und der Durchmesser d von verschiedenen Resonatoren sind in der Tab. I angegeben, welche auch die Länge und die Querschnitte der Vibratoren sowie die entsprechenden Wellenlängen λ enthält.

Tabelle I.

Vibrator		Resonator		λ_0
l	d	l	d	
0,3	0,14 × 0,07	0,485	0,098	1,3
0,75	0,14 × 0,08	0,812	0,193	,28
1,3	0,3	1,82	0,28	4,82
4,1	0,3	4,05	0,3	10,63
(11,4)	0,4	9,5	0,55	23,8
28	0,85	29,3	1,55	72,7

Die Spiegel. — Jedem Paare Vibrator und Resonator entsprach ein besonderes Spiegelpaar. Ihre Fokallänge überschritt nicht $\lambda_0/4$, und deren Öffnung, d. h. die kleinere Ellipsenachse, wurde gleich $2\lambda_0$ gemacht. Die größere Achse betrug $4\lambda_0$.

Bei den kürzesten Wellen (1,3 cm) war die größere Achse gleich $7\lambda_0$, damit die Induktoriumkreise (der Vibrator) nicht zu nahe an dem Resonator lagen. Auf der Rückseite hatten die Spiegel je einen Schlitz, der zum Hineinbringen des Vibrators bzw. zum Herauslassen der Drähte vom Resonator diente. Um die Einstellung auf Resonanz zu erleichtern, waren die sekundären Spiegel nach Art einer Türe befestigt, bei deren Öffnen sich die Spiegel leicht entfernen und dann wiederum genau in dieselbe Lage bringen ließen.

Bei Messungen mit Wellen von 72,7 cm habe ich die alten Spiegel des Institutes benutzt, welche eine genaue Kopie der Hertzschen Spiegel darstellen.

Das Gitter bestand aus dünnen (0,1 mm) Kupferdrähten, die 1 mm voneinander entfernt an einem drehbaren Zinkring ($d = 14$ cm) angelötet waren. Die Drähte wurden bei den Messungen senkrecht gestellt.

Das Thermoelement. — Bei den Messungen bediente ich mich hauptsächlich zweier Thermoelemente, von denen das kleinere und empfindlichere folgenderweise konstruiert war. An einer dünnen (1,1 mm) Hartgummiplatte P (Fig. 5), in den Schlitzen s, waren zwei kleine, aus dünnem Kupferblech gebogene Röhrchen t befestigt. Der Durchmesser derselben betrug 0,5 mm und die Länge 1,9 mm. Diese Röhrchen dienten zum Hineinlegen der zu untersuchenden Drähte. Da der Achsenabstand der Röhrchen 1,7 mm betrug, konnte

man dieses Thermoelement nur bei einem Drahtabstande von 1,2—2,0 mm anwenden. An die unteren Ränder der Röhrchen waren Manganin- und Konstantandrähte[1]) von 0,018 mm Durchmesser angelötet, die in der üblichen Weise gekreuzt und an die Kupferdrähte *CC* angelötet waren. Die Berührungsstelle der dünnen Drähte war mit so geringer Lötmenge verlötet, daß sie sogar mit einer Lupe nicht wahrgenommen werden konnte.

Die Drähte *CC* waren durch die Hartgummiplatte kreuzweise gezogen und hatten an ihren Enden Kupferplättchen *p* (Fig. 6). Auf die letzteren wurden ebensolche Kupferplättchen aufgelegt, die an die Schurenden des Galvanometers angelötet

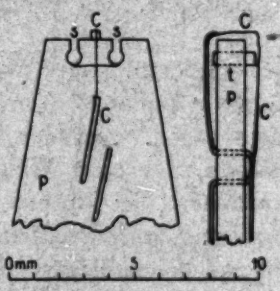


Fig. 5.

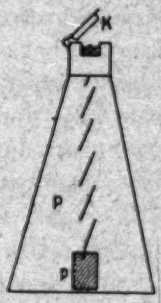


Fig. 6.

waren. Die letzteren zusammen mit der Hartgummiplatte des Thermoelementes konnte man mit Schrauben und einem Holzbrett an den Bleiwagen festdrücken.

Der obere Teil der Platte, d. h. das Thermoelement selbst, war in ein Pappkästchen *K* (Fig. 6, $7 \times 4 \times 5$ mm) eingeschlossen, welches mit einem Deckel versehen war, der sich auf einem Streifen Zigarettenpapier hielt.

Der Widerstand des vom Thermostrom durchströmten Teiles des Thermoelementes war 3,8 Ohm.

Das größere Thermoelement ließ einen Drahtabstand von 4 mm zu; der Drahtdurchmesser dürfte 1,1 mm erreichen. Die Lötstelle bestand aus Platin- und Konstantandrähten von 0,025 mm Durchmesser. Der Widerstand war 3 Ohm.

Das Induktorium war von geringer Größe und konnte Funken von 25 mm erzeugen. Da es aber von einer Ab-

1) O. Knopp, Physik. Zeitschr. 10. p. 439. 1909.

zweigung von 0,4—0,7 Ohm eines Rheostates von 9 Ohm gespeist wurde, lieferte es zwischen den Spitzen Funken von nur 13—16 mm Länge. Der Rheostat wurde von einer Akkumulatorenbatterie von 120 Volt gespeist. Die sekundären Klemmen des Induktoriums waren entfernt und der Vibrator mit demselben durch kurze, glatte, rundgebogene Drähte *ee* verbunden[1]) (Fig. 1).

Der Unterbrecher. — Für die Messungen diente ein Turbinenunterbrecher mit Alkohol, der die Zweigleitung unterbrach und dabei 117—128 Funken pro Sekunde gab.

Als *Schlüssel* der Batteriekreise diente ein guter Ausschalter für elektrische Beleuchtung mit *beim Schließen* knackenden Kontaktfedern; da in diesen Ausschaltern das Schließen oft durch *zwei verschiedene* Kontakte geschieht, so kann dieser Umstand, wenn die Kontaktfedern nicht in Ordnung sind, bei den Messungen nach der Methode der *abwechselnden* Ausschläge von Schaden sein.

Ein *Galvanometer* von du Bois und Rubens mit drei Panzern, einem Spulenpaar und leichtem System war mittels der Julius-Hagenschen Aufhängevorrichtung angebracht. Die Metallrollen, an welchen die vertikalen Stahldrähte der Vorrichtung angebunden werden, wurden durch solche aus Hartgummi ersetzt. Der Widerstand des Galvanometers betrug 11 Ohm; der übrige Widerstand stellte sich zusammen aus dem Widerstand des Thermoelementes und dem Vorschaltwiderstand von 100 oder 400 Ohm, welcher bei der Messung von λ der längeren Wellen eingeschaltet wurde. Bei einem Skalenabstande von 300 cm und einer Periode von 8,2 Sek. entsprach ein Millimeterausschlag dem Strome von $2{,}2 \cdot 10^{-10}$ Amp.

Die Drähte. — Die der Untersuchung unterliegenden Drähte konnten nur in einer vollständig geraden Form benutzt werden, genau wie sie das Zieheisen liefert. Sie wurden auf der Meßbank so stark aufgespannt, daß der Drahtabstand in verschiedenen Teilen der Länge bis auf einige Prozente egal war. Die dünnsten Drähte (0,024—0,055 mm) waren von der Firma Hartmann & Braun bezogen. Die anderen Drähte waren entweder gewöhnliche, im Handel befindliche

1) Vgl. W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 45. p. 135. 1914.

Sorten oder wurden im Laboratorium auf einer Zieheisenbank angefertigt. Durch einen Rubin oder Diamant durchgezogen, wurden die Drähte ganz glatt und zylindrisch. Vor den Messungen wurde das Wachs mit Äther abgespült, wonach die Drähte noch mit feinstem Schmirgelpapier und Alkohol poliert wurden.

Zum Ausglühen wurden die Drähte langsam durch ein langes, von Kohlensäure durchströmtes und zur Rotglut erhitztes Rohr hindurchgezogen. Mit den Eisendrähten mußte man sehr vorsichtig umgehen wegen der bekannten „Sprödigkeit", die sie nach dem Ausglühen erhalten. Die dünneren Eisendrähte dagegen ließen sich, gleich den anderen dünnen Drähten, auf zylindrische Pappschachteln aufwickeln. In diesem Zustande wurden die Eisendrähte in einem Glasgefäße mit gebranntem Kalk aufbewahrt.

§ 6. Vorversuche.

Bevor man die Messungen vornahm, mußte man sich jedesmal überzeugen, daß der beim Schließen des Batteriestromes entstehende Galvanometerausschlag ausschließlich durch die zu untersuchenden Wellen einer bekannten Periode bedingt war.

I. Fehlerquellen, welche im Apparat selbst verborgen sind.

A. Um die Anwesenheit fremder Einflüsse zu entdecken, ließen sich zwei Methoden anwenden: nach der ersten konnte man die Drähte des Gitters horizontal stellen oder den sekundären Spiegel mit einem kleinen, an Fäden aufgehängten Blechschirm verdecken; nach der zweiten konnte man das Thermoelement längs des Eisenstückes so weit zurückschieben, daß die Wellen schon vollkommen absorbiert waren. Der Restausschlag, welcher in diesem Falle blieb, konnte durch verschiedene Ursachen hervorgerufen sein.[1])

1. Die Wärmewirkung der Funken auf das Thermoelement, falls dasselbe sich im λ-Breiche, in der Nähe des Resonators, befindet, ließ sich mittels einiger Papierblätter, die am Gitter aufgestellt sind, leicht beseitigen.

1) Vgl. P. Lebedew, Wied. Ann. 56. p. 1. 1898.

2. Die magnetischen Wirkungen der primären Leitung lassen sich durch Umeinanderwinden der Leitungsdrähte, durch Umstellen des Induktoriums und Unterbrechers unschädlich machen.

3. Die elektrostatischen Wirkungen kann man durch Erdung des primären Spiegels, des Polarisationsgitters und des Eisenbalkens, ebenso auch durch Umeinanderwinden der Thermoelementleitung vermeiden.

4. Die elektrischen Schwingungen größerer Wellenlängen verhütet man durch möglichste Vereinfachung der Leitung zum Vibrator. Das Induktorium ist mit dem letzteren durch glatte, kurze, rundgebogene Drähte verbunden, die keine fremden Gegenstände berühren und von jeglichen scharfen Krümmungen oder hervorragenden Enden frei sind. Ebenso muß man darauf sehen, daß die Galvanometerleitung keine überflüssigen herausragenden Teile besitzt. Da sämtliche Klemmen schädlich wirken, wurde das Anschließen des Thermoelementes mit Hilfe der erwähnten, gegeneinander gepreßten Plättchen realisiert.

Beim Beachten dieser Bedingungen ist es überflüssig, das Thermoelement, die Schnur und das Galvanometer durch einen Metallmantel zu schützen. Der Restausschlag überstieg niemals 1 mm; größtenteils konnte er gleich Null angenommen werden.

B. Um Wellen von einer bestimmten Periode zu erhalten, wurde die Resonatorlänge im sekundären Spiegel aus der Resonanzkurve gefunden, die man bei Verschiebung der erwähnten Ansatzröhren bekam.[1]) Das Thermoelement befand sich dabei im γ-Bereiche. Die Resonatorkurve in den Drähten hatte nur dann ein regelmäßiges Aussehen, wenn eine derartige Einstellung auf Resonanz ausgeführt wurde.

C. Längs zweier Drähte können sich nicht nur die Wellen des inneren Feldes (zwischen den Drähten) fortpflanzen, sondern auch die Wellen des äußeren Feldes; die letzteren würden sich längs zweier Drähte auf dieselbe Weise fortpflanzen, wie längs eines einzigen Drahtes. Der Versuch hat aber keine Anwesenheit derartiger Wellen gezeigt:

1) Vgl. W. Arkadiew, l. c.

1. Das Zusammenziehen und Verbinden der Drähte mit einem dünnen Faden in der Mitte des Abstandes bis zum Thermoelemente genügte, um den Durchgang der Wellen durch die verbundene Stelle vollständig abzusperren. Dabei blieb sogar kein zehntausendstel Teil der Energie übrig.

2. Die Annäherung fremder Gegenstände ist nur bei Abständen zu bemerken, die kleiner als der Drahtabstand sind.

3. Der Absorptionskoeffizient γ, in verschiedenen Punkten längs der Drahtleitung gemessen, erweist sich konstant.

D. Die Konstanz der Wellenlänge längs der Drahtleitung wurde durch besondere Versuche festgestellt. Infolge der verschiedenen Absorption, wenn zur Grundwelle andere, längere Wellen hinzugemischt sind, können auf dem weiteren Ende der Drahtleitung die letzteren stärker zum Ausdruck gelangen. Mehrmalige Messungen haben aber gezeigt, daß die Wellenlänge auf beiden Enden der Drahtleitung dieselbe bleibt.

Ebenso konstant bleibt längs der Drähte die Größe γ, was auf die Homogenität der sich fortpflanzenden Strahlung hinweist.

E. Was die verschiedenen anderen Arten von elektromagnetischen Wellen anbelangt, welche sich längs der Drähte fortpflanzen können[1]), so sind diese hier offenbar von geringer Bedeutung.

F. Der Einfluß der Nähe benachbarter Gegenstände auf die Absorption und Reflexion der Wellen wurde auf folgende Weise untersucht. Das Thermoelement wurde in den hinteren Teil des γ-Bereiches verschoben und den Drähten (Ni, $2\varrho =$ 0,101 mm, $a = 3{,}5$ mm, vgl. unten) parallel, ziemlich nahe denselben, ein ca. 1 m langes Holz- oder Stahllineal befestigt. Auf dieser Strecke verringerte sich die Energie der Wellen ($\lambda_0 = 10{,}63$ cm) an den Drähten selbst fast um die Hälfte. Dagegen fing das Thermoelement einen Unterschied der Energie (mit und ohne Stab) der ankommenden Wellen nur dann anzuzeigen, wenn das Lineal sich in einem Abstande von den Drähten befand, der kleiner als der Drahtabstand selbst war (2 mm). Daraus ist zu schließen, daß hier von einer Reflexion oder Absorption von Teilen des Apparates keine Rede sein kann, da sich die Drähte über dem Eisen-

1) Vgl. z. B. D. Hondros, Ann. d. Phys. 30. p. 905. 1909.

balken in einer Entfernung von 110 mm befanden und alle übrigen kleineren Teile noch weiter lagen.

G. Den Einfluß der Eigenperiode des Thermoelementes konnte man bei seinen kleinen Dimensionen nicht beobachten. Die nach der Messung erhaltene Wellenlänge war immer von den Dimensionen des Vibrators und Resonators abhängig und änderte sich in Übereinstimmung mit den letzteren.

H. Von der Proportionalität der Galvanometerausschläge mit der Wellenlänge überzeugte man sich durch Entfernen des primären Spiegels vom sekundären. Ungeachtet dessen, daß die Ausschläge dabei sich um das ca. 50fache ändern ließen, blieb das Verhältnis E/E_1 für ein bestimmtes Intervall im Bereiche der Beobachtungsfehler immer konstant.

II. Die äußeren störenden Einflüsse.

A. Die Erschütterungen des Gebäudes verhindern nur selten die Beobachtungen.

B. Die Temperatureinflüsse konnte man durch Umhüllen des Thermoelementes mit Watte beseitigen.

C. Die Änderungen des äußeren Magnetfeldes (Tramway, Institutsleitung usw.) übten auf das Galvanometer keinen merkbaren Einfluß aus.

§ 7. Messungen.

Da während der Arbeit die Energie der vom Vibrator ausgestrahlten Wellen unregelmäßig fällt und dabei desto schneller abnimmt, je kürzer die Wellen sind, mußte man, um genauere Werte zu erhalten, eine große Anzahl von Ausschlägen haben und die Messungen nach der Methode der abwechselnden Ablesungen ausführen. Bei den Messungen wurden immer die anfängliche Lage des Galvanometers und seine Umkehrpunkte notiert.

Messung von λ.

In Fig. 7 wird eine Kurve gezeigt, die zur Bestimmung der kleinsten Wellenlänge diente. In diesem Falle erforderte die Messung eines jeden Maximums eine besondere Regulierung des Vibrators[1]); die nachfolgende Messung der Ordi-

1) Vgl. P. Lebedew, l. c.

naten in den Maximis und Minimis gibt die definitive Resonanzkurve (Fig. 8). Die Wellenlänge, welche diese Kurve ergibt, beträgt 1,35 cm. Nach den Messungen von γ in verschiedenen

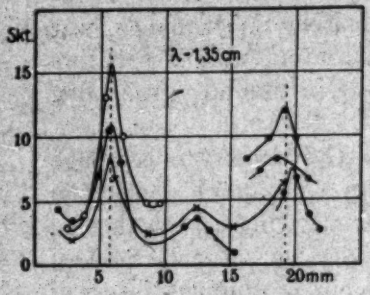


Fig. 7.

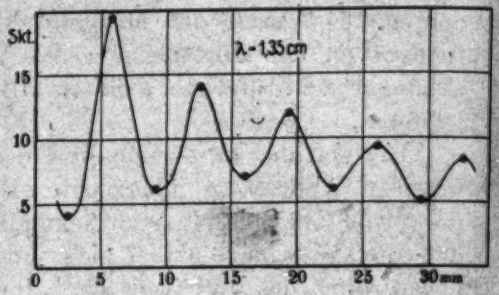


Fig. 8.

Drähten wurde die Kurve wiederholt und ergab $\lambda = 1{,}27$ cm; die Vibratorlänge verminderte sich dabei von 3,1 mm bis auf 2,8 mm.

Bei Messungen längerer Wellen machte es keine Schwierigkeiten, bei einer Messungsreihe 5, 6 oder 7 Maxima zu erhalten, aus denen nach der Methode der Rechnung mit gleich großen Intervallen λ berechnet wurde.

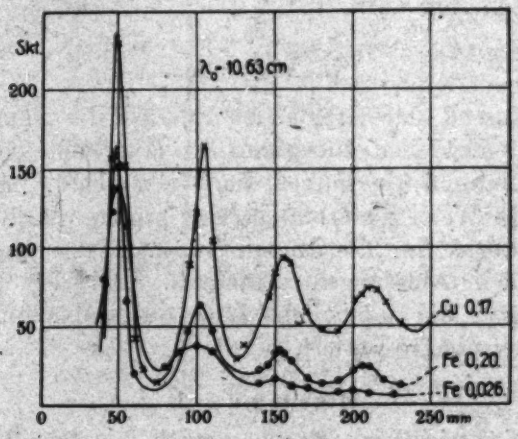


Fig. 9.

Fig. 9 stellt die Kurven dar, aus denen λ in Cu ($2\varrho =$ 0,17 mm), Fe (0,20) und Fe (0,026 mm) ermittelt wurde. Die gemessenen λ-Werte waren: 10,63, 10,48 und 9,9 cm.

Der in den Formeln vorkommende Wert λ_0 war dem Werte λ gleich, welcher in Kupferdrähten von 0,17 mm Durchmesser gemessen wurde, was aus der Formel (21) leicht zu ersehen ist. Im allgemeinen aber ist zu bemerken, daß diese Messungen, außer der losen Koppelung, noch die Koinzidenz des Isochronismus mit den Resonanzpunkten voraussetzen, welche für die Schwingungen mit sehr veränderlicher Amplitude (Erregungskurve des Resonators) vorhanden wäre.

Messung von γ.

Hängt der Fehler der Bestimmung E und E_1 nicht von diesen Größen selbst ab, so ist das für die Berechnung von γ vorteilhafteste Verhältnis E/E_1 gleich 3,05. Sind die Messungsfehler von E und E_1 diesen Größen proportional, so ist es vorteilhafter, E/E_1 möglichst groß zu nehmen; theoretisch soll in diesem Falle E/E_1 gleich ∞ sein.

Bei Messungen mit elektrischen Wellen, wo der Fehler die Form $\alpha + cE$ hat, liegt das Optimum des Verhältnisses E/E_1 zwischen 4 und 8. Trotzdem zog ich es vor, anstatt der Vergrößerung von $x_1 - x$ mehrere Messungen bei kleineren $x_1 - x$ zu machen und sie dabei in verschiedenen Abständen vom Resonator $x + (x_1 - x)/2$ vorzunehmen. Aus diesen Gründen betrug gewöhnlich das Verhältnis E/E_1 2 oder 3. Außerdem wäre, wie aus dem Weiteren zu ersehen ist, bei größeren E/E_1 der Fehler, der eintritt, wenn man die Messungen von γ nicht weit genug vom λ-Bereiche ausführt, dementsprechend auch größer.

Wir wollen nun den Anfang des γ-Bereiches bestimmen. Befindet sich das Thermoelement außerhalb des λ-Bereiches in einem Abstande x vom Resonator, so fällt auf dasselbe die Energie E_0, wovon $\varkappa_1 E_0$ reflektiert wird, so daß zum Resonator

$$\varkappa_1 E_0 e^{-\gamma x}$$

zurückkehrt und auf das Thermoelement zum zweiten Male die Energie

$$\varkappa_1 \varkappa_2 E_0 e^{-2\gamma x}$$

fällt; von dieser Energie kehrt zum Thermoelement wiederum zurück

$$\varkappa_1^2 \varkappa_2^2 E_0 e^{-4\gamma x}$$

usw. Summierend finden wir, daß das Thermoelement folgende Energie aufweisen wird:

$$E = \frac{E_0}{1 - \varkappa_1 \varkappa_2 e^{-2\gamma x}}.$$

Das Verhältnis der Energiemengen, die das Thermoelement in den Punkten x und x_1 zeigt, wird nun:

$$\frac{E}{E_1} = e^{\gamma(x_1 - x)} \cdot \frac{1 - \varkappa_1 \varkappa_2 e^{-2\gamma x_1}}{1 - \varkappa_1 \varkappa_2 e^{-2\gamma x}}.$$

Der zweite Faktor dieses Ausdruckes, den ich durch Ψ bezeichne, bestimmt offenbar den Fehler $\Psi - 1$, den wir bei Messungen machen, die nicht weit genug vom Resonator entfernt liegen. Die Größe $\varkappa_1 \varkappa_2$, die man zur Bestimmung des Fehlers Ψ kennen muß, läßt sich aus dem Verhältnis E/E_1 berechnen, wobei letztere Größe absichtlich für Punkte zwischen dem λ- und γ-Bereiche (jedoch nicht allzu nahe zu ersterem) gemessen wird. Ausgehend von einem gewissen zulässigen Fehler (einem Teile eines Prozentes) können wir aus oben Gesagtem die vordere Grenze des γ-Bereiches bestimmen.

Als Beispiel gebe ich unten ein Protokoll der Beobachtungen wieder, die zur Bestimmung des Verhältnisses E/E_1 dienen.

Tabelle II.

$\lambda_0 = 1{,}34$ cm. Neusilberdraht. $2\varrho = 0{,}101$ mm. $x = 17{,}8$; $x_1 = 50{,}1$; $x_1 - x = 32{,}3$; $a = 1{,}70$ mm.

Restausschlag + 0,1 mm.

Ausschlag	Mittel	Verhältnis
4,5	4,5	
1,1 1,7	1,4	$\frac{3{,}7}{1{,}4} = 2{,}64$
2,8 3,1	2,95	$\frac{2{,}95}{1{,}3} = 2{,}27$
1,4 1,0	1,2	$\frac{2{,}33}{1{,}2} = 1{,}95$
1,3 2,0 1,85	1,72	$\frac{1{,}72}{0{,}8} = 2{,}15$
0,5	0,5	

Restausschlag − 0,1 mm. Mittel 2,25.

Tabelle III.

$\lambda_0 = 1{,}34$ cm. Schwed. Eisendraht, geglüht. $2\varrho = 0{,}200$. $x = 24{,}8$; $x_1 = 56{,}2$; $x_1 - x = 31{,}4$; $a = 1{,}2$ mm.

Restausschlag 0,0,0.

Ausschlag	Mittel	Verhältnis
3,9	3,9	
2,0 1,4	1,7	$\frac{3{,}7}{1{,}7} = 2{,}17$
3,5	3,5	$\frac{3{,}5}{1{,}5} = 2{,}33$
1,3	1,3	$\frac{3{,}05}{1{,}3} = 2{,}35$
2,6	2,6	$\frac{2{,}6}{1{,}15} = 2{,}26$
1,0 1,0	1,0	

Restausschlag 0, 0, 0. Mittel 2,28.

Tabelle IV.

$\lambda_0 = 2{,}28$ cm. Silberdraht. $2\varrho = 0{,}053$ mm. $x = 233{,}2$; $x_1 = 318{,}9$; $x_1 - x = 85{,}7$; $a = 1{,}40$ mm.

Restausschlag 0, 0, 0.

Ausschlag	Mittel	Verhältnis
8,0 7,8	7,90	
15,8 16,0 15,3	15,7	$\frac{15{,}7}{7{,}81} = 2{,}01$
8,0 8,2 7,0	7,73	$\frac{14{,}7}{7{,}73} = 1{,}90$
13,9 13,4 13,9	13,73	$\frac{13{,}73}{6{,}91} = 1{,}98$
6,5 6,0 5,8	6,10	$\frac{12{,}87}{6{,}10} = 2{,}11$
12,0 12,0	12,0	

Restausschlag 0, 0, 0. Mittel 2,00.

Tabelle V.

$\lambda_0 = 10{,}63$ cm. Schwed. Eisendraht, geglüht. $2\varrho = 0{,}200$; $x = 151{,}5$; $x_1 = 192{,}7$; $x_1 - x = 41{,}2$; $a = 1{,}70$ mm.

Restausschlag $+0{,}2$ mm.

Ausschlag	Mittel	Verhältnis
17 17,7	17,4	
45 44	44,5	$\frac{44{,}5}{16{,}95} = 2{,}63$
16 17	16,5	$\frac{43{,}7}{16{,}5} = 2{,}65$
44,3 43,5	43,9	$\frac{43{,}9}{17{,}0} = 2{,}58$
17,5 17,5	17,5	$\frac{43{,}3}{17{,}5} = 2{,}47$
42,5 43	42,7	

Restausschlag $+0{,}2$ mm. Mittel 2,58.

Korrektion: $\frac{17 \cdot 2{,}58 - 0{,}2}{17 - 0{,}2} = \frac{43{,}6}{16{,}8} = 2{,}60.$

§ 8. Resultate.

I. Unmagnetisierbare Drähte; Prüfung der Theorie.

Folgt die Absorption der Wellenenergie in Drähten dem oben gegebenen Exponentialgesetz, so werden wir, den gemessenen Absorptionskoeffizienten γ' aus der Formel

$$\gamma' = 2{,}3 \cdot \frac{\lg_{10} \frac{E}{E_1}}{x_1 - x}$$

berechnend, für die Größe γ' für alle Punkte längs der Drähte nahe Werte erhalten, welche in den Grenzen der Beobachtungsfehler einander gleich sein müssen. Als Beispiele führe ich die Tabb. VI und VII an, die die Berechnung des mittleren Wertes γ' nach diesen einzelnen Zahlen für Kulmitz ($\lambda_0 = 10{,}63$) und Neusilber ($\lambda_0 = 1{,}34$) darstellen. In diesen Tabellen ist L die Drahtlänge (in Metern) vom Resonator bis zur Klemme L (Fig. 1), A der mittlere Ausschlag, welcher der Energie E entspricht, a_1 und a_2 die Restausschläge vor und nach der

Beobachtungsreihe, n die Anzahl der Quotienten E/E_1, aus welcher der mittlere Wert $E/E_1 = K$ für das gegebene Intervall berechnet wurde. Alle unten angeführten Größen K sind schon auf den Restausschlag $(a_1 + a_2)/2$ korrigiert.

Tabelle VI.

$\lambda_0 = 10{,}63$. Kulmitzdraht, $\lambda = 10{,}46$. $2\varrho = 0{,}055$ mm; $a = 1{,}75$; $L = 5{,}7$ m; $r = 278$ Ohm/m; $\varkappa = 1{,}78$.

x	$x_1 - x$	A	a_1	a_2	K	n	γ'	
32,7	34,4	112	0	0	2,56	3	0,0274	
68,3	44,0	48	—	—	3,02	5	0250	
116,8	56,2	48	0	0	3,74	5	0,0234	Mittel
129,8	63,3	48	—	—	4,64	5	0,0240	0,0237
160,0	63,0	41	—	—	4,45	4	0,0236	± 0,0001
211,2	54,0	11	0	0	3,60	4	0,0237	
247,7	71,0	5,5	—	—	5,0	3	(0,023)	

Aus dieser Tabelle folgt, daß die einzelnen Zahlen γ' von einer bestimmten Stelle an konstant werden, nämlich da, wo die Reflexion vom Resonator bereits unbedeutend wird. Zur Berechnung des mittleren Wertes γ' wurden gewöhnlich nur diese letzteren Werte benutzt; dagegen bei den Messungen mit Wellen von 1,84 cm war es notwendig, das gemessene Verhältnis K auf den erwähnten Korrektionskoeffizienten Ψ zu korrigieren, den ich nach der Formel

$$\Psi = 1 + \varkappa_1 \varkappa_2 \frac{1 - e^{-2\gamma(x_1 - x)}}{e^{2\gamma x} - \varkappa_1 \varkappa_2}$$

berechnete. Die auf diese Weise korrigierten Werte K sind in folgender Tabelle durch $K' = K/\Psi$ bezeichnet.

Tabelle VII.

$\lambda_0 = 1{,}34$ cm. Neusilberdraht, $\lambda = 1{,}34$. $2\varrho = 0{,}101$ mm; $a = 1{,}70$ mm; $L = 4$ m; $r = 35{,}2$ Ohm/m. $\varkappa = 14{,}1$. $\varkappa_1 \varkappa_2 = 0{,}31$.

x	$x_1 - x$	A	a_1	a_2	K	Ψ	K'	n	γ'
13,9	18,3	4	0	0	1,85	1,11	1,665	3	0,0276
20,0	19,5	2,7	0	0	1,79	1,09	1,64	5	0,0254
17,8	32,3	3	0	0	2,25	1,12	2,01	4	0,0216
24,9	24,5	4	0	+1	1,89	1,06	1,78	6	0,0235
26,3	26,6	3	− 0,1	− 0,5	2,14	1,07	2,00	3	0,0260
								Mittel	0,0248
									± 0,0007

In der Tab. VIII sind die gemessenen Werte γ' mit den aus der oben erhaltenen Formel (22) berechneten Werten γ zusammengestellt. Die Anwendung der Formel (22) war in diesem Falle zulässig [vgl. (2) und (3)], da a/ϱ nicht kleiner als 13,6 war und $a^2\gamma/\lambda_0$ den Wert $3 \cdot 10^{-3}$ nicht überschritt. In der Reihe γ' sind auch die wahrscheinlichen Messungsfehler des Resultates angegeben.

Tabelle VIII.

Unmagnetisierbare Drähte.

Material	2ϱ	a	$\frac{a}{\varrho}$	r	λ_0	$\varkappa$	γ'	γ	$\frac{\gamma'-\gamma}{\gamma}$	Tag 1911
Neusilber	0,101	1,70	34	35,2	1,34	14,1	0,0248 ±0,0007	0,0240	+3,3%	6. IV.
Neusilber	0,101	1,70	34	35,2	2,28	10,85	0,0192 ±0,0002	0,0185	+3,8%	27. VII.
Silber	0,053	1,40	53	8,2	2,28	22,5	0,00793 ±0,00006	0,00787	+0,8%	26. VII.
Neusilber	0,256	1,75	13,6	5,45	2,34	27,0	0,00960 ±0,00010	0,00950	+1,1%	22. III.
Neusilber	0,101	3,75	74	35,2	4,82	7,44	0,0104 ±0,0002	0,01046	−0,6%	29. VII.
Neusilber	0,101	1,55	31	35,2	10,63	5,01	0,00941 ±0,00003	0,00900	+4,5%	19. V.
Platin	0,055	1,40	51	50	10,63	4,20	0,00977 ±0,00007	0,00940	+3,9%	26. V.
Kulmitz	0,055	1,73	63	278	10,63	1,78	0,0237 ±0,0001	0,0228	+3,9%	14. V.

Es läßt sich ersehen, daß die wahrscheinlichen Fehler der Bestimmung γ' nach dem Versuch 4 Proz. bei den kürzesten und 1 Proz. bei längeren Wellen nicht überschreiten. Die Reihe

$$\frac{\gamma'-\gamma}{\gamma}$$

enthält die prozentischen Abweichungen der beobachteten Werte von den berechneten. Die ersteren sind fast immer größer als die zweiten. Nach Berechnung des Gewichtes jedes Wertes γ' und γ erhalten wir diese Abweichung durchschnittlich gleich 3,3 Proz. mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,3 Proz.

Wir wollen nun eine Formel zur Berechnung des wirklichen Absorptionskoeffizienten γ' herleiten. Da

$$\gamma' = 1{,}033\,\gamma\,,$$

so müssen wir den Koeffizienten der Formel (19) folgendermaßen korrigieren: $0{,}734 \cdot 1{,}033 = 0{,}759$. Bezeichne ich die so berechnete Größe p durch p', so können wir setzen:

$$p' = \frac{0{,}759\, r}{\lg_{10} \frac{a}{\varrho}} \cdot 10^{-4}. \tag{25}$$

Deshalb ist

$$\gamma' = \frac{\Delta p'}{1 + \eta}. \tag{26}$$

Die hier gefundene Abweichung kann durch die Inkonstanz der Amplitude der zur Untersuchung dienenden Wellen erklärt werden. Barton[1]) fand, daß der Widerstand eines geraden Drahtes für exponentialabnehmende Schwingungen sich im Verhältnis $1 + \Delta/4\pi$ vergrößert, wo Δ das logarithmische Dekrement der Dämpfung bezeichnet. Eine darauf begründete Rechnung ergibt für den fiktiven Dämpfungskoeffizienten des Resonators einen zulässigen Wert 0,42. (Streng genommen, pflanzen sich in meinen Versuchsbedingungen die Wellenreihen in den Drähten zuerst mit zunehmender und erst später mit abnehmender Amplitude fort.)

Schließlich kann man noch die berechnete Geschwindigkeit mit der gemessenen vergleichen. Im Falle der unmagnetischen Drähte erhalten wir für λ_0 und λ nur für Neusilber- und Kulmitzdraht einigermaßen verschiedene Werte. Bei $\lambda_0 = 10{,}63$ haben wir für den ersten $\lambda = 10{,}52$ und für den zweiten 10,46; die Formel (21) ergibt[2]) dementsprechend 10,55 und 10,44.

Aus oben Gesagtem können wir den Schluß ziehen, daß alle dargelegten theoretischen Voraussetzungen und Ergebnisse eine experimentelle Bestätigung finden.

Es ist zu beachten, daß bisher von einer möglichen Änderung der Leitfähigkeit des Metalles mit der Periode des Wechselstromes keine Rede war. Diese durch die Arbeiten von Riecke[3])

---

1) E. Barton, Phil. Mag. (5) 47. p. 433. 1899.

2) Der Vergleich mit dem Versuch der zuerst von E. Cohn gegebenen Formel (21) wurde noch früher von Diesselhorst (Jahrb. d. drahtl. Telegr. 1. p. 277. 1907) ausgeführt und die annähernde Übereinstimmung bestätigt.

3) E. Riecke, Wied. Ann. 66. p. 353. 1898.

und Drude[1]) aufgenommene Frage wurde bereits von Harms[2]) berührt, der sich an die Theorie der Leitfähigkeit der Legierungen von Rayleigh-Liebenow[3]) hielt. Diese Frage hat in den Arbeiten von Hagen und Rubens[4]) eine Aufklärung gefunden. Jedoch noch bis zur letzten Zeit waren entsprechende Überlegungen zulässig, wie sie sich z. B. bei Willows[5]) und Geitler[6]) in ihren Arbeiten finden. Die vorliegenden Messungen aber, die mit weit schnelleren Schwingungen arbeiten als alle anderen mir bekannten Beobachtungen, die sich auf die direkte elektrische Messung der Leitfähigkeit der Metalle und Legierungen beziehen, bestätigten die Unabhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Periode in dem Bereiche

$$4{,}4 \cdot 10^{-11}\,\text{sec} < T < \infty \ .$$

II. Eisen-, Stahl- und Nickeldrähte.

In Fig. 10 ist eine theoretische Kurve der Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten γ von dem Logarithmus der Wellenlänge λ_0 gegeben. Dabei war angenommen: $a = 1{,}70$ mm, $2\varrho = 0{,}101$ mm, $r = 35{,}2$ Ohm/m und $\mu = 1$. Die gemessenen Größen γ', für diesen konstanten Abstand a umgerechnet, sind in der Figur mit Punkten bezeichnet. Laut oben Gesagtem kommen sie den theoretischen Werten nahe. Aus dem Verlaufe der Kurve kann man schließen, daß γ mit der Verkleinerung der Wellenlänge wächst. Das bezieht sich auf Drähte mit konstantem spezifischem Widerstand und mit konstanter magnetischer Permeabilität.

Lassen wir zu, daß in dem untersuchten Gebiete

$$(1{,}3 < \lambda_0 < 72{,}7\ \text{cm})$$

die Permeabilität von magnetisierbaren Metallen dieselben Werte behält, die bereits schon längst für Wellen von 330 bis 700 cm gefunden waren, d. h. ca. 100 für Eisen und

1) P. Drude, Physik. Zeitschr. 1. p. 161. 1899.
2) F. Harms, Ann. d. Phys. 5. p. 565. 1901.
3) Lord Rayleigh, Nature 54. p. 154. 1896. — C. Liebenow, Zeitschr. f. Elektrochem. 4. p. 201. 1897; Encykl. d. Elektrochem. 10. 1898.
4) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. p. 873. 1903.
5) R. S. Willows, Phil. Mag. 12. p. 604. 1906; Physik. Zeitschr. 8. p. 174. 1907.
6) J. v. Geitler, Ann. d. Phys. 22. p. 246. 1907.

ca. 27 für Nickel, so ergibt die Rechnung für die als Beispiel genommenen drei Drähte die Punktierkurven, die auch in Fig. 10 gegeben sind. Es wurde dabei angenommen:

Material	a	2ϱ	r	μ
Schwedischer Eisendraht	1,70	0,20	3,38	100
Nickel von Hartmann & Braun	1,70	0,053	69	25
Nickel, „chemisch reiner"	1,70	0,20	2,90	25

Die anderen auf derselben Figur am tiefsten aufgetragenen Kurven sind in der Voraussetzung $\mu = 1$ konstruiert.

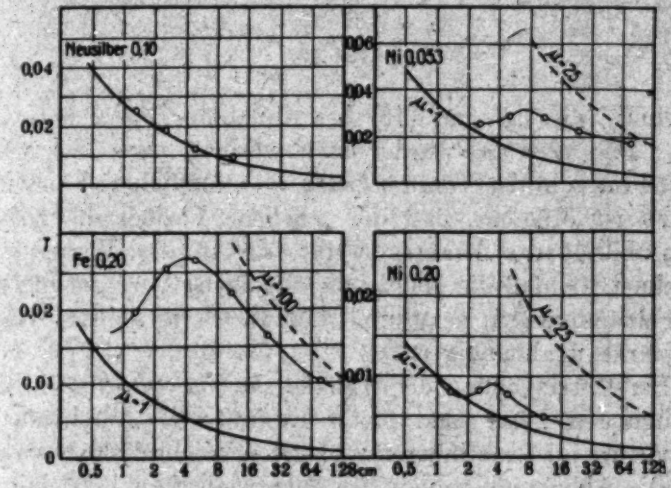


Fig. 10.

Die nach den Punkten konstruierten Kurven beziehen sich aber auf die gemessenen Werte des Absorptionskoeffizienten. Man sieht, daß der letztere in dem von mir untersuchten Intervalle eine charakteristische Eigentümlichkeit aufweist: in allen drei Fällen nähert sich die experimentelle Kurve bei Verkleinerung der Wellenlänge, indem sie sich von den punktierten Kurven $\mu = 100$ oder $\mu = 25$ trennt, dem Zusammenflusse mit einer anderen Kurve, die in der Voraussetzung $\mu = 1$ konstruiert ist. Der Absorptionskoeffizient aber verläuft durch ein Maximum und ein Minimum. Daraus ist zu schließen, daß in dem untersuchten Gebiete die magnetische Permeabilität von den größeren Werten, die sie bei Wellen-

längen von einigen Metern besitzt, bis auf Eins fällt. Unten führe ich die Werte der magnetischen Permeabilität bei verschiedenen Perioden an, die auf folgende Weise berechnet wurden.

Nach dem Einstellen des empirischen Koeffizienten 1,033 in die theoretischen Formeln, kommen wir auf Grund von (25), (26), (23), (20) und (18) zu folgendem Ausdruck der Permeabilität:

$$\mu = \frac{\lambda_0}{r}\left[138\,(1+\eta)\,\gamma'\,\lg_{10}\frac{a}{\varrho} - 0{,}0029\,r\right]^2.$$

Die hier vorkommende Größe η wurde nach der Näherungsformel

$$\eta = \frac{\sqrt{\lambda_0\,\mu\,r}}{1780\,\lg_{10}\frac{a}{\varrho}}$$

berechnet, die sich aus (16) bei Annahme $B = \varkappa$ entnehmen läßt. Der Wert μ wurde dazu vorerst nach der vorigen Formel für μ in der Voraussetzung $\eta = 0$ annähernd bestimmt.

Es ist offenbar, daß die gegebene Formel die zirkuläre Permeabilität des Drahtes ergibt, die in der Voraussetzung berechnet ist, daß die Magnetisierung keine Verzögerung gegen die Feldänderungen zeigt und daß die Permeabilität von der Feldstärke unabhängig ist.

Bei Untersuchung der Abhängigkeit μ von verschiedenen Bedingungen kann man einen Einfluß der Amplitude und Periode des im Drahtinneren wirkenden Wechselfeldes erwarten.

Die Abhängigkeit von der Amplitude könnte sich in der Inkonstanz von γ' längs der Drähte äußern sowie auch bei Veränderung der Wellenamplitude durch Entfernen des primären Spiegels vom sekundären. Der Versuch zeigt jedoch keine scharfe und deutliche Änderung von γ'.

Tabelle IX.

$\lambda_0 = 10{,}63$; Schwedischer Eisendraht, ungeglüht. $2\varrho = 0{,}202$ mm; $a = 1{,}75$ mm; $L = 4$ m; $r = 3{,}38$ Ohm/m.

x	$x_1 - x$	A	a_1	a_2	K	n	γ'
97,2	26,9	157	—	+0,5	1,82	2	0,0223
149,8	40,9	45	0	—	2,57	3	0,0230
186,8	42,3	22	—	0	2,43	3	0,0210
						Mittel	0,0221
							±0,0004

Führen wir als Beispiel wieder die Tabellen (IX und X) des Verhältnisses $E/E_1 = K$ an, die die Berechnung von γ' in magnetisierbaren Drähten ermöglichen.

Tabelle X.

$\lambda_0 = 1{,}31$; Schwedischer Eisendraht, ungeglüht. $2\varrho = 0{,}202$; $a = 1{,}5$ mm; $L = 4$ m; $r = 3{,}38$ Ohm/m; $\varkappa_1 \varkappa_2 = 0{,}31$.

x	$x_1 - x$	A	a_1	a_2	K	Ψ	K'	n	γ'
24,8	47,0	4	+1	+1	2,7	1,11	2,43	2	0,0188
25,7	46,2	4	—	+0,3	2,63	1,10	2,45	4	0,0193
17,3	30,0	4	0	−0,5	2,06	1,13	1,83	5	0,0200
41,0	54,3	1,8	—	—	2,6	1,05	2,46	3	0,0166
41,0	30,6	2,5	0	+0,1	2,03	1,04	1,95	12	0,0218
								Mittel	0,0202
									± 0,0007

Es läßt sich aus diesen Tabellen berechnen, daß man für zwei verschiedene Wellen von 10,68 cm und 1,31 cm für ein und denselben Draht im ersten Falle $\mu = 48$ erhält und im zweiten $\mu = 4{,}1$. Wenn wir in Betracht ziehen, daß die Forscher[1]), die die magnetischen Eigenschaften bei schnellen Schwingungen untersuchten und für die Wellenlänge von einigen Metern Werte von 48—118 erhielten, so bemerken wir hier offenbar im Intervall zwischen 10 und 1 cm einen sehr raschen Fall der Permeabilität. Die folgenden Tabellen (XI—XVI) enthalten den Absorptionskoeffizienten γ' und die Permeabilität μ, die sich in der geschilderten Weise für verschiedene Wellenlängen und für Drähte aus verschiedenem Material, Durchmesser und Bearbeitung erhalten lassen.

Tabelle XI.

$\lambda_0 = 1{,}31$.

Material	a	2ϱ	r	γ'	μ
Schwed. Eisendraht, geglüht .	1,2	0,20	3,42	0,0227	4,5
Schwed. Eisendraht, ungeglüht	1,5	0,20	3,38	0,0202	4,1
Schwed. Eisendraht, hart . .	1,6	0,18	4,34	0,0240	3,6
Nickeldraht, chem. rein, gegl.	1,4	0,20	2,90	0,0088	0,85

1) J. Klemenčič, Wiener Ber. **101** (2a). p. 389. 1892; Wied. Ann. **50**. p. 456. 1893; **53**. p. 707. 1894. — V. Bjerknes, Wied. Ann. **47**. p. 69. 1892. — M. Birkeland, Compt. rend. **116**. p. 93, 499, 625. 1893. — Ch. John, Phil. Mag. (5) **38**. p. 425. 1894; **39**. p. 297. 1895.

Hier ist der wahrscheinliche Fehler der Bestimmung μ gleich ca. ± 8 Proz.; bei Messungen mit längeren Wellen betrug derselbe gewöhnlich ca. ± 4 oder ± 2 Proz.

Tabelle XII.

$\lambda_0 = 2{,}31$.

Material	a	2ϱ	r	γ'	μ
Schwed. Eisendraht, geglüht	3,5	0,506	0,51	0,0124	16,0
	3,7	0,353	1,06	0,0161	19,5
	1,70	0,201	3,42	0,0275	14,7
Schwed. Eisendraht, ungeglüht	1,65	0,202	3,38	0,0250	11,9
Käuflicher Eisendraht, geglüht	1,75	0,305	1,74	0,022	13,8
	1,75	0,169	5,45	0,025	8,8
Eisendraht Hartmann & Braun	1,70	0,055	48,3	0,05	7,2
Stahldraht, weich	1,65	0,187	6,55	0,040	17,0
Nickeldraht, chem. rein, geglüht	1,70	0,201	2,90	0,0080	1,47
Nickeldraht, Hartmann & Braun	1,4	0,053	69	0,0265	1,22

Tabelle XIII.

$\lambda_0 = 4{,}82$.

Material	a	2ϱ	r	γ'	μ
Schwed. Eisendraht, geglüht	3,7	0,353	1,06	0,0143	30,5
	1,7	0,201	3,42	0,0285	33,5
Schwed. Eisendraht, ungeglüht.	1,7	0,202	3,38	0,0260	28,2
Stahldraht, weich.	1,6	0,187	6,55	0,0360	28,3
Nickeldraht, chem. rein, geglüht	1,70	0,201	2,90	0,00775	2,8
Nickeldraht, Hartmann & Braun	1,45	0,053	69	0,028	3,0

Tabelle XIV.

$\lambda_0 = 10{,}63$.

Material	a	2ϱ	r	γ'	μ
Schwed. Eisendraht, geglüht.	3,4	0,506	0,51	0,0086	38
	3,9	0,353	1,06	0,0115	46
	1,67	0,201	3,42	0,0238	51
Schwed. Eisendraht, ungeglüht	1,75	0,202	3,38	0,0221	48
	1,70	0,101	14,7	0,0363	42
Eisendr. Hartm. & Braun, ungegl.	1,69	0,055	48,3	0,0607	53
Eisendr. Hartm. & Braun, gegl.	1,70	0,026	235	0,099	43
Stahldraht, weich	3,8	0,603	0,673	0,0092	31
	3,7	0,280	2,66	0,0173	47
	1,6	0,187	6,55	0,0360	64
Stahldraht Hartmann & Braun	1,6	0,054	81	0,083	49
Nickeldraht, chem. rein, gegl.	1,70	0,201	2,90	0,00485	2,4
	3,6	0,098	11,3	0,00675	2,7
Nickeldr. Hartmann & Braun	1,64	0,053	69	0,027	6,7
	1,70	0,024	216	0,0377	5,9

Tabelle XV.

$\lambda_0 = 23{,}8$.

Material	a	2ϱ	r	γ'	μ
Schwed. Eisendraht, geglüht	3,5	0,506	0,51	0,00716	59
	3,9	0,353	1,06	0,0089	62
Schwed. Eisendraät, ungeglüht	3,7	0,35	1,12	0,0089	58
	3,75	0,202	3,38	0,0125	53
	3,4	0,101	14,7	0,0201	44
Stahldraht, weich	3,7	0,187	6,55	0,0220	92
Nickeldraht, chem. rein . . .	3,1	0,098	11,3	0,007	6,3
Nickeldraht Hartmann & Braun	5,2	0,053	69	0,0176	11,3
Käuflicher Eisendraht, geglüht	4,0	1,03	0,143	0,0033	(27)
	3,75	0,77	0,26	0,0045	40
	4,0	0,465	0,73	0,0070	47
	3,75	0,305	1,74	0,0099	51
	3,8	0,169	5,45	0,0140	46

Tabelle XVI.

$\lambda_0 = 72{,}7$.

Material	a	2ϱ	r	γ'	μ
Schwed. Eisendraht, geglüht	3,6	0,506	0,51	0,00494	92
	3,7	0,353	1,06	0,0060	87
Schwed. Eisendraht, ungeglüht	3,7	0,202	3,38	0,00845	78
Stahldraht, weich	3,7	0,187	6,55	0,0132	108
Nickeldraht Hartmann & Braun	3,8	0,053	69	0,0138	20

Außer diesen Werten μ, die nach γ' berechnet sind, läßt sich μ noch aus $\eta = \lambda_0/\lambda - 1$ bestimmen. Wenige Messungen von λ ergeben Werte, die sich etwas kleiner als die höher gegebenen erweisen.

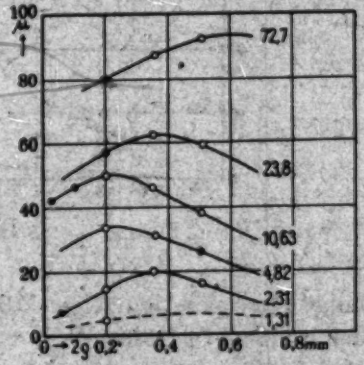


Fig. 11.

Bei Betrachtung der angeführten Tabellen sehen wir, daß die Permeabilität für eine gegebene Wellenlänge sich mit dem Drahtdurchmesser 2ϱ ändert und daß sie ein Maximum bei einer gewissen Dicke erreicht, die für verschiedene Wellenlängen verschieden ist. In Fig. 11 sind für verschiedene Wellen Kurven für geglühten schwedischen Eisendraht gegeben; wir sehen, daß jede Kurve ein Maximum besitzt.

Stellen wir nun in der Tab. XVII die maximalen Permeabilitäten des geglühten schwedischen Eisendrahtes, eines Stahldrahtes (weicher Stahl, $2\varrho = 0{,}187$ mm) und eines Nickeldrahtes (von Hartmann & Braun, $2\varrho = 0{,}053$ mm) zusammen.

Tabelle XVII.

λ_0	Eisen	Stahldraht	Nickeldraht
72,7	93	108	20
23,8	62	92	11
10,3	51	64	7
4,82	34	28	3
2,31	19,5	17	1,2
1,31	8	10	[0,85]

(Die letzte Zahl für Nickel bezieht sich auf Nickeldraht von 0,20 mm Durchmesser.)

In Fig. 12 sind diese Werte graphisch in Abhängigkeit vom Logarithmus der Wellenlänge eingetragen. Die gerad-

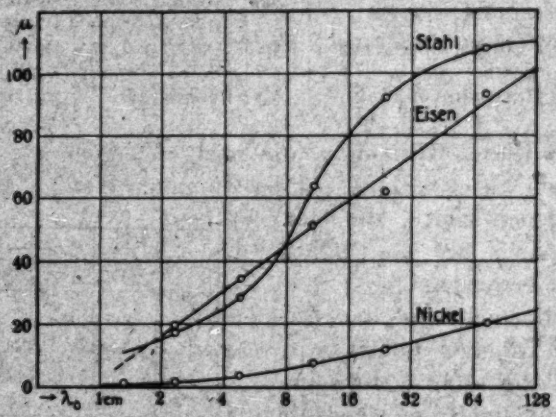


Fig. 12.

linige Extrapolation zeigt, daß bei der Wellenlänge $\lambda_0 = 1{,}31$ cm der größtmögliche Wert von μ gleich 8 ist. Die direkten Messungen ergeben dagegen, wie wir aus den Tabellen ersehen können, $\mu = 3{,}6$ oder 4,5. Bei einer weiteren Extrapolation finden wir, daß bei der Wellenlänge von 0,9 cm μ schon gleich Eins wird.

Aus der Betrachtung der angeführten Tabellen kann man einige Schlüsse bezüglich der anderen Eisensorten ziehen: es erweist sich, daß das Verhältnis der Permeabilität des geglühten Drahtes zu derjenigen des ungeglühten ($2\varrho = 0{,}20$ mm) ein scharf ausgeprägtes Maximum besitzt, das bei $\lambda_0 = 2{,}1$ cm liegt. In diesem Punkte beträgt das erwähnte Verhältnis 1,24. Ferner folgt aus den Tabellen, daß die maximale Permeabilität des käuflichen Eisens kleiner ist als die des schwedischen: z. B. bei $\lambda_0 = 23{,}8$ cm haben wir entsprechend 51 und 62.

Was Stahl anbelangt, so sehen wir auch, daß seine Permeabilität mit der Wellenlänge schnell abnimmt und daß sie sich in Abhängigkeit von der Drahtsorte und dem Drahtdurchmesser befindet.

Die Permeabilität des Nickels nähert sich dem Werte Eins schon bei einer Wellenlänge von $\lambda_0 = 2$ cm; sie vergrößert sich allmählich bis 20 bei einer Wellenlänge von 72,7 cm.[1])

Man könnte meinen, daß die gefundene Änderung der Permeabilität mit dem Drahtdurchmesser dadurch bedingt ist, daß sich die Feldstärke in der Nähe der Drahtoberfläche ändert; jedoch haben die direkten, früher erwähnten Versuche, dies nicht bestätigt.

§ 9. Zusammenfassung.

Die Resultate vorliegender Arbeit lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

1. Es wurden an zwei parallelen Drähten reine, gedämpfte elektrische Wellen von 72,7 bis 1,27 cm Länge erhalten.

2. Es wurde gezeigt, daß die Energie der Wellen infolge der Absorption nach dem Exponentialgesetze abnimmt.

3. Es wurde eine Methode der Messung des Absorptionskoeffizienten ausgearbeitet.

4. Es wurden die theoretischen Formeln zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (ω) und des Absorptionskoeffizienten (γ) unter den Bedingungen der wirklichen Laboratoriumsanordnung abgeleitet.

5. Die erhaltenen Werte des Absorptionskoeffizienten (γ') von unmagnetischen Drähten erweisen sich bei Vergleich mit

1) Dieses Resultat wurde schon früher von mir veröffentlicht: W. Arkadiew, Physik. Zeitschr. 14. p. 561. 1913.

den theoretischen Werten (γ) um 3,3 Proz. größer. Die gefundenen relativen Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit stimmen qualitativ mit den theoretischen überein.

6. Der Verlauf des Absorptionskoeffizienten von magnetisierbaren Drähten (Fig. 10) zeigt im untersuchten Gebiete einen schnellen Abfall der Permeabilität zu den kurzen Wellen.

7. Die Permeabilität, berechnet nach den Absorptionskoeffizienten, erweist sich bei einer Wellenlänge von 72,7 cm gleich 93 für weiches schwedisches Eisen und gleich 20 für Nickeldraht; bei einer Wellenlänge von 1,31 cm fällt der Maximalwert der Permeabilität des Eisens bis $\mu = 8$; für Nickeldraht ist dabei die Permeabilität schon gleich Eins (Fig. 12).

8. Die Extrapolation ergibt, daß für Eisen bei Wellenlängen von einigen Millimeter die Permeabilität gleich Eins sein soll; das zeigt an, daß schon im Gebiete der elektrischen Wellen die elektromagnetischen Vorgänge in ferromagnetischen Metallen bei $\mu = 1$ verlaufen, ebenso wie bei den langwelligen Strahlen von Rubens.

Moskau, im Juli 1914.

(Eingegangen 8. August 1918.)

2. *Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikatgläsern;* von *R. Ambronn.*

Die Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit des Glases mit der Temperatur wurde schon früh bemerkt, da sie in vielen Fällen der Verwendung von Glas als Isolationsmaterial hinderlich sein mußte. Cavendish[1]) beobachtete sie zuerst, später wiesen dann Faraday[2]), Buff[3]), Beetz[4]), J. Perry[5]), Foussereau[6]), Gray[7]) und W. Thomson[8]) durch verschiedene Untersuchungen nach, daß die Leitung im Glase elektrolytischen Charakters sei, da Polarisationsvorgänge auftreten. Auch ein Zusammenhang der Leitfähigkeit mit der chemischen Zusammensetzung der Glasmasse wurde erkannt. Quantitative Resultate erbrachten aber erst die Untersuchungen von E. Warburg[9]) und F. Tegetmeyer[10]). Diese zeigten einwandfrei, daß die Leitung durch eine Ionisation der glasbildenden Silikate bedingt würde und daß unter dem Einflusse des elektrischen Spannungsgefälles die Alkaliionen aus der Anodenschicht mit dem Strome auswandern, so daß an der Anode eine Schicht bleibt, die aus einem alkaliärmeren Silikat besteht, welches eine außerordent-

1) Th. Cavendish, Exp. and observ. on electricity. 5. Ed. London 1774. p. 411.

2) M. Faraday, Exp. Res. IV, § 350; Ostwalds Klassiker Nr. 86.

3) H. Buff, Lieb. Ann. 90. p. 257—288. 1859.

4) W. Beetz, Pogg. Ann. 92. 452—466. 1854; Pogg. Ann. Jubelbd. p. 23. 1874.

5) J. Perry, Proc. Roy. Soc. 28. p. 468. 1875.

6) G. Foussereau, Journ. de Phys. (2) 11. p. 254. 1883.

7) Th. Gray, Phil. Mag. 10. p. 226. 1880; Proc. Roy. Soc. 34. p. 199 bis 208. 1883.

8) W. Thomson, Proc. Roy. Soc. 23. p. 463 u. 464. 1875.

9) E. Warburg, Wied. Ann. 21. p. 622—646. 1884.

10) E. Warburg u. F. Tegetmeyer, Wied. Ann. 41. p. 18—41. 1890.

lich geringe Leitfähigkeit besitzt. Mit der Ausbildung der an Alkaliionen verarmten Schicht steigt der Widerstand des Glases sehr stark an, was Warburg, um Leitfähigkeitsmessungen zu ermöglichen, mit Erfolg zu vermeiden suchte, indem er durch Verwendung von Natrium- oder Lithium-Amalgam-Elektroden für eine stetige Nachlieferung von Alkalionen in die Anodenschicht sorgte. Als wichtigstes Resultat ergab sich dabei zugleich, daß die Überführung des Alkalis aus dem Amalgam der Anode in das als Kathode verwendete reine Quecksilber genau gemäß dem Faradayschen Gesetze erfolgte. Die elektrolytische Natur der Leitfähigkeit der Gläser war damit einwandfrei quantitativ nachgewiesen.

Von verschiedenen Forschern[1]) wurden in der Folgezeit noch zahlreiche Glassorten auf ihre elektrische Leitfähigkeit untersucht; aber da diese meist beliebige, zufällig gewählte, chemische Zusammensetzungen besaßen, oft sogar komplizierte Schmelzen für optische Zwecke umfaßten, so waren quantitative Bestimmungen der Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der chemischen Zusammensetzung daraus nicht zu erlangen; es zeigte sich nur, daß eine Vermehrung des Gehaltes eines Glases an Na_2O, K_2O und Li_2O eine Vergrößerung, bei anderen Metalloxyden hingegen im allgemeinen eine Verminderung der Leitfähigkeit herbeiführte.

Die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Gläser von der Temperatur wurde besonders eingehend von F. Baumeister[2]) behandelt, der sie nach dem Vorgange von J. Perry[3]) durch eine Exponentialfunktion darstellte, welche den reziproken Wert der absoluten Temperatur im Exponenten enthält. Gray bestätigte die Zweckmäßigkeit einer solchen Darstellung für andere Glassorten und auch für feste und geschmolzene Salze.

---

1) Th. Gray u. J. J. Dobbie, Proc. Roy. Soc. **63**. p. 38—41. 1888. — N. Rood, Americ. Journ. of Science (4) **14**. p. 161—165. 1902. — Ch. E. S. Phillips, Electrician **37**. p. 707. 1906. — A. Denizot, Inaug.-Diss. Berlin 1897. — E. Bollé, Inaug.-Diss. Berlin 1900. — F. Kopfermann, Inaug.-Diss. Münster 1909. — A. Heydweiller u. F. Kopfermann, Ann. d. Phys. **32**. p. 740. 1910. — W. Dietrich, Inaug.-Diss. Göttingen 1909.

2) F. Baumeister, Inaug.-Diss. Rostock 1912.

3) J. Perry, Proc. Roy. Soc. **23**. p. 468. 1875.

Die Leitfähigkeit dieser elektrolytisch leitenden Substanzen ist der Konzentration c der den Elektrizitätstransport vermittelnden Ionen proportional; die Änderung von c mit der Temperatur ist also auch für diejenige der elektrischen Leitfähigkeit bestimmend. An Hand theoretischer Erwägungen über die Änderung der Konzentration der freien Elektronen in metallisch leitenden Körpern folgerte Königsberger[1]) aus dem van't Hoffschen Gesetze, daß

$$\lg c = A + q \lg e/\vartheta$$

sein müsse, wo q die Dissoziationswärme des Elektrons von den ponderablen Atomen enthält, und stellte in einem Berichte[2]) Beobachtungsmaterial zum Beweise dieser Beziehung zusammen. Außer der Konzentration der Elektronen ist aber auch ihre Beweglichkeit für die Leitfähigkeit der Substanz maßgebend, und es muß daher auch deren Abhängigkeit von der Temperatur berücksichtigt werden. Während diese Veränderung der inneren Reibung bei den metallisch leitenden Substanzen, zumal bei höheren Temperaturen, aber nur gering zu sein pflegt und sich daher durch eine quadratische Beziehung mit verhältnismäßig kleinen Koeffizienten darstellen läßt, dürfte das bei den elektrolytisch leitenden Substanzen mit ihren viel größeren Elektrizitätsträgern nicht mehr der Fall sein, so daß auch der Koeffizient q in diesem Falle hauptsächlich die Veränderung der inneren Reibung mit der Temperatur darstellt, wenn man auf Grund des bislang erwähnten und unter Vorwegnahme der später abzuleitenden Resultate die Gültigkeit obiger Beziehungen voraussetzt. Nach den Untersuchungen von Rasch und Hinrichsen[3]), die ebenfalls die van't Hoffsche Formel auf die Dissoziation der Elektrolyte anwendeten, ist für letztere Substanzen offenbar auch die Beweglichkeit der Ionen durch eine Exponentialfunktion mit der reziproken absoluten Temperatur im Exponenten darzustellen. In dem Exponenten der empirisch aus den Leitfähigkeitsmessungen errechneten Formel

1) J. Königsberger u. O. Reichenheim, Physik. Zeitschr. 7. p. 570. 1906. — J. Königsberger, Physik. Zeitschr. 8. p. 833. 1907.

2) J. Königsberger, Jahrb. d. Elektronik 4. p. 158—194. 1907.

3) E. Rasch u. W. Hinrichsen, Zeitschr. f. Elektrochemie 14. p. 41—48. 1908. — E. Rasch, Mitteil. a. d. Kgl. Material-Prüfungsanstalt Gr. Lichterfelde-West 30. p. 320—348. 1912.

summieren sich daher die beiden Größen, welche die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur darstellen und können also nicht getrennt werden.

Die Gründe, welche veranlassen, daß in den bisher erwähnten Arbeiten eine so genaue Bestimmung der Konstanten A und q der oben vorgelegten Formel nicht möglich war, um an ihnen die Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung der Gläser quantitativ festzulegen, sind hauptsächlich diese: Die Messungen wurden dadurch sehr erschwert, daß man die Zuleitungen des Stromes an die Glasmasse nicht leicht so gestalten konnte, daß Übergangswiderstände vermieden wurden und die Oberfläche der Kontaktzone sicher zu bestimmen war. Bei anderen Untersuchungen, bei denen flüssige Elektroden verwendet wurden, wobei die Gläser reagenzglasförmige Gestalt hatten, waren die geometrischen Dimensionen der Stromfäden nicht hinreichend bekannt, um die Reduktion der gemessenen Werte auf spezifische sicher zu stellen. Ferner ist die Gleichmäßigkeit der Temperatur über das ganze stromdurchflossene Glasstück bei der außerordentlich großen Veränderung der Leitfähigkeit mit der Temperatur von höchster Bedeutung; aber diese dürfte bei den oben erwähnten Untersuchungen ebenso wie die absolute Größe der Temperatur selbst nie genügend gewährleistet sein. Schließlich aber sind die bisher untersuchten Glassorten fast stets aus 5—8 Komponenten zusammengesetzt, was eine quantitative Deutung der Ergebnisse selbst bei aller sonstigen Sorgfalt gänzlich ausgeschlossen hätte.

Um die hier besprochenen Schwierigkeiten zu umgehen, wurden zunächst drei Glassorten nach besonderer Angabe von Schott & Gen. in Jena erschmolzen, welche nur Na_2O, CaO und SiO_2 enthielten. Die Resultate, welche an diesen drei Glassorten erhalten wurden, sind in einer früheren Veröffentlichung[1]) zusammengestellt. Die dort untersuchten Gläser enthielten alle nahezu gleichviel CaO und unterschieden sich voneinander nur durch den Na_2O-Gehalt. Da sich eine quantitative Beziehung zwischen elektrischer Leitfähigkeit und Na_2O-Gehalt festlegen ließ, war weiterhin die Frage von Interesse, in welcher Weise der Gehalt des Glases an CaO auf die Leit-

1) R. Ambronn, Inaug.-Diss. Göttingen 1913 (Vorläufige Mitteilung Physik. Zeitschr. 14. p. 112—118. 1913).

fähigkeit und auf ihre Abhängigkeit vom Na_2O-Gehalte einwirke, und diese soll in den folgenden Ausführungen beantwortet werden.

Als Material standen, einschließlich der oben erwähnten drei bereits früher untersuchten Glassorten, deren Eigenschaften mit entsprechenden Einschränkungen stets mitberücksichtigt werden sollen, durch die dankenswerte Liebenswürdigkeit der Firma Schott & Gen. in Jena 13 Glassorten zur Verfügung, die möglichst verschiedene Gehalte an Na_2O und CaO aufwiesen und die nur diese beiden Oxyde und SiO_2 enthielten. Möglich ist, daß noch eine geringe Menge Arsen beim Erschmelzen beigefügt wurde, um die Masse leichter fließend zu machen, und es kann sehr wohl sein, daß diesem unbekannten, vielleicht wechselnden Arsengehalte die später zu erwähnenden größeren Abweichungen einiger Glasproben, namentlich der einige Jahre vorher erschmolzenen Proben 1—3 zuzuschreiben sind. Die in Tab. 1 gegebene Zusammensetzung der Gläser gründet sich auf die vom Werke mitgeteilte Zusammensetzung des Schmelzgutes. Leider konnten die untersuchten Glasstücke selbst nachträglich noch nicht analysiert

Tabelle 1.

Chemische Zusammensetzung der untersuchten Glassorten in Gewichtsprozenten.

Nr.	Na_2O	CaO	SiO_2
[1]	18,73	8,45	72,82
[2]	25,67	7,73	66,60
[3]	31,55	7,12	61,33
4	22	8	70
5	34	8	58
6	15	12	73
7	22	12	66
8	28	12	60
9	12	16	72
10	20	16	64
11	26	16	58
12	20	20	60
13	36	4	60

werden, was natürlich vorzuziehen gewesen wäre, da man nicht wissen kann, ob beim Schmelzen etwa Veränderungen dadurch eintraten, daß gasförmige Produkte entstanden oder Tiegelmaterial in Lösung ging. Auch über die Homogenität

der erschmolzenen Glasplatten, aus welchen die untersuchten Glasproben herausgeschnitten wurden, läßt sich ein Urteil ohne genauere chemische Analysen nur aus der Vergleichung von Beobachtungen gewinnen, welche an mehreren aus derselben Glasplatte geschnittenen Probestücken ausgeführt wurden, und welche allerdings, wie sich später zeigen wird, eine recht befriedigende Übereinstimmung ergaben, so daß die Homogenität jeder der untersuchten Glassorten wohl sichergestellt ist.

Aus den Glassorten 4—13 wurden nun säulenförmige Stücke mit planparallelen Grenzflächen hergestellt. Glassorte 11 mußte leider ausfallen, da sie in kurzer Zeit an der Luft in weißes Pulver zerfiel, außerdem von vornherein ganz undurchsichtig und schwammig mit Luftblasen erfüllt war. Die Glassorten 1—3 waren an einer größeren Anzahl dünnerer Platten früher untersucht, von einem erneuten Abdrucke der Messungen wird hier Abstand genommen, nur die daraus gewonnenen Resultate sollen später mit verwertet werden. Von jeder Glassorte wurde ein dickeres Säulchen von geringer Höhe und ein dünneres von etwa doppelter Höhe hergestellt, um einen Überblick über den Einfluß der Elektroden auf die gemessene Leitfähigkeit zu erhalten. Es zeigte sich indessen, daß dieser Einfluß verschwindend gering und nicht nachzuweisen war. Die Dimensionen der untersuchten Säulchen waren die in Tab. 2 erwähnten.

Um für die elektrische Leitfähigkeit schlecht leitender fester Körper zuverlässige Werte zu erhalten, muß man vor allem der Art und Weise, in welcher man die Elektroden an den zu untersuchenden Stücken anbringt, besonders großes Gewicht beilegen. Wenn es sich, wie hier, um elektrolytische Leitfähigkeit handelt, würde man offenbar am einfachsten unpolarisierbare Elektroden verwenden, und als solche sind von Warburg Natriumamalgam und von Heydweiller u. Kopfermann geschmolzene Natrium- und Kaliumnitratmischungen benutzt worden. Ihre Anwendung ist sehr einfach bei amorphen Körpern, die man in reagenzglasförmiger Gestalt, gefüllt mit dem Elektrodenmateriale und in solches eingetaucht elektrolysieren kann. Doch bietet hier die Bestimmung der geometrischen Gestalt der Stromfäden und damit die Reduktion der gewonnenen Größen auf spezifische Werte sehr große Schwierigkeiten. Wenn es sich um Material handelt, wie das

Tabelle 2.

Glassorte Nr.	Säulchen Nr.	Durchmesser cm	Höhe cm	Querschnitt: Höhe cm
4	40	1,597	1,508	1,328
	41	1,109	2,960	0,326
5	42	1,597	1,514	1,322
	43	1,099	2,960	0,321
6	44	1,598	1,509	1,329
	45	1,102	2,959	0,322
7	46	1,589	1,503	1,320
	47	1,100	2,948	0,322
8	48	1,596	1,487	1,346
	49	1,099	2,942	0,323
9	50	1,594	1,507	1,325
	51	1,096	2,941	0,321
10	52	1,623	1,429	1,448
	53	1,011	2,980	0,269
12	54	1,618	1,500	1,370
	55	1,014	3,000	0,269
13	56	1,629	1,497	1,392
	57	1,021	2,928	0,280

hier vorliegende, welches unbedingt in Form kompakter Stücke untersucht werden muß, erscheint es unmöglich, mit flüssigen Elektroden zuverlässige quantitative Messungen zu erhalten.

Es mußten daher feste Elektroden angewendet werden, die polarisierbar sind und daher die Messung der Widerstände mit Strömen wechselnder Richtung zwecks Aufhebung der Polarisation bedingen. Bei sorgfältiger Herstellung bewährten sich solche sehr gut und gaben dauernd gleich guten Kontakt. Es wurden auf den fein matt geschliffenen Seiten der zu untersuchenden Glasstücke kreisförmige Flächen mit einer Platinlösung bestrichen und diese bei langsamem Erhitzen in einem kleinen elektrischen Ofen eingebrannt. Die Erhitzung wurde über ca. 2 Stunden ausgedehnt und bei der Höchsttemperatur von ca. 550° einige Zeit konstant gehalten. Die platinierten Platten wurden noch mittels eines weichen Bleistiftes mit Graphit überzogen, um den Verteilungswiderstand längs der Oberfläche zu verkleinern und etwaige feine Risse

in der Platinschicht zu überbrücken. Der Zusammenhang der Schicht wurde mittels zweier Nadelspitzen, die durch einen Akkumulator und einen Strommesser verbunden waren, an vielen Stellen geprüft. Eine Verstärkung der Platinschicht durch elektrolytische Niederschläge von Silber oder Kupfer bewährte sich nicht, da diese durch die bekanntlich in solch niedergeschlagenen Schichten auftretenden außerordentlich großen Spannungen die Platinschicht vom Glase abrissen. Nur das Niederschlagen von Platinschwarz erwies sich als anwendbar; doch setzte dies dafür wieder den Verteilungswiderstand längs der Plattenoberfläche nicht wesentlich herab. Zweckmäßig erschien es, ein wenig feinstes Graphitpulver auf die Fläche zu streuen und eine ebene Platinplatte darauf zu legen, so daß die Überleitung des Stromes von der Platinplatte zu der platinierten Oberfläche des Glasstückes an möglichst vielen Stellen erfolgte.

Um den Einfluß der Polarisation zu eliminieren, mußte mit schnell ihre Richtung wechselnden Strömen gemessen werden, deren Frequenz bekannt und in weiten Grenzen zu verändern war. Wegen der sehr hohen zu messenden Widerstände, die zwischen 10^9 und 10^3 Ohm variierten, und der Notwendigkeit, das Potentialgefälle in den Glasstücken so klein als irgend möglich zu halten, war die Messung nach dem Prinzipe der Wheatstoneschen Brücke und mit Telephon als Indikator ausgeschlossen. Die Widerstände wurden vielmehr durch Messung des Stromes mit einem Spiegelgalvanometer bestimmt, welchen eine gemessene elektromotorische Kraft in den Glasstücken hervorrief. Der Strom durchfloß das Galvanometer als Gleichstrom; in die Zuleitungen zum Glasstücke aber wurde ein rotierender Umschalter eingefügt, der die Stromrichtung in diesem bis 200mal in der Sekunde zu wechseln gestattete. Da dieser Umschalter den Strom bei jeder Kommutierung, um eine genügende Isolation zu sichern, kurze Zeit völlig unterbrach, mußte er oft geeicht werden, wodurch sich dann auch eine Genauigkeit der Strommessungen von ca. 2 Prom. erreichen ließ.

Die Methoden, nach denen die Bestimmungen der Leitfähigkeit der in Tab. 2 in ihren Dimensionen aufgeführten Glasstücke ausgeführt wurden, sind in der oben zitierten Veröffentlichung und in einer Untersuchung über die elektrische

Leitfähigkeit des Bergkristalles[1]) dargelegt, so daß hier nur in einem kurzen Referate einige nachträgliche Bemerkungen beizubringen sind.

Die Glasstücke wurden zwischen zwei Kupferbacken geklemmt, welche an langen Stahlrohren, die außen gut isoliert waren, in einen 35 cm langen elektrischen Ofen ragten, der auf ein Kupferrohr von 5 mm Wandstärke gewickelt und mit Kieselgur bestens isoliert war. Nachdem die Glasstücke zwischen die Backen, welche ca. 2 cm Durchmesser hatten, eingesetzt waren, wurde von jeder Seite ein 2 mm starkes Silberrohr herübergeschoben, so daß das eine das andere einige Millimeter weit durch einen koaxialen, möglichst schmalen, zur Isolation notwendigen Luftspalt getrennt überragte. So befand sich das Glasstück in einem nahezu völlig geschlossenen Raume aus Material von höchster Wärmeleitfähigkeit. Die Temperatur wurde durch zwei Silber-Eisen-Thermoelemente bestimmt, welche durch die haltenden Stahlrohre bis in die axialen Bohrungen der Kupferbacken geführt waren, wo sie mit ihren Lötstellen nur durch eine ganz dünne Glaswand getrennt an dem Glasstücke unmittelbar anlagen. Jede Unsymmetrie der Anordnung machte sich sogleich an dem Unterschiede der Angaben der Thermoelemente bemerkbar und konnte daher sofort abgestellt werden. Die Eichung der Thermoelemente wurde mit den Siedepunkten von Wasser, Naphthalin, Benzophenon und Schwefel ausgeführt und oftmals kontrolliert. Möglichst genaue Konstanz der Temperatur einige Zeit vor und während der Messungen ist unbedingt erforderlich, da ein Grad Temperaturveränderung bereits 3—5 Proz. Widerstandsänderung mit sich bringen kann. Sie wurde trotz sehr großer Schwankungen der Spannung des Lichtnetzes der städtischen Zentrale, an welche der Ofen angeschlossen werden mußte, durch den Einbau eines automatisch den zeitlichen Mittelwert der dem Ofen zugeführten Energie konstant haltenden Wattmeters hinreichend gleichmäßig erhalten.

Der Wechsel der Stromrichtung im Glasstücke selbst wurde mittels eines rotierenden Umschalters bewirkt, welcher sich ausgezeichnet bewährte und dessen Konstruktion daher

1) R. Ambronn, Nova Acta, Abh. d. Kaiserl. Leopold. Carol. Deutschen Akad. d. Naturforscher. Bd. 101, p. 177—268. Halle 1915.

hier kurz angegeben und durch Fig. 1 veranschaulicht werde. Auf einer Stahlachse DD läuft zwischen Spitzen eine 1,4 cm dicke Hartgummischeibe von 8,4 cm Radius, deren Umfang mit einem 3 mm dicken Messingbande belegt ist. An 12 genau gleichmäßig um den Umfang verteilten Stellen ist das Band durch je einen 0,5 mm breiten Hartgummistreifen unterbrochen, so daß 12 gut voneinander isolierte gleiche Segmente s_1—s_{12} entstehen. Zu beiden Seiten der Scheibe sind je zwei gut isolierte Schleifringe A_1—A_4 angebracht, die durch Drähte beliebig mit den Segmenten s_1—s_{12} verbunden werden können.

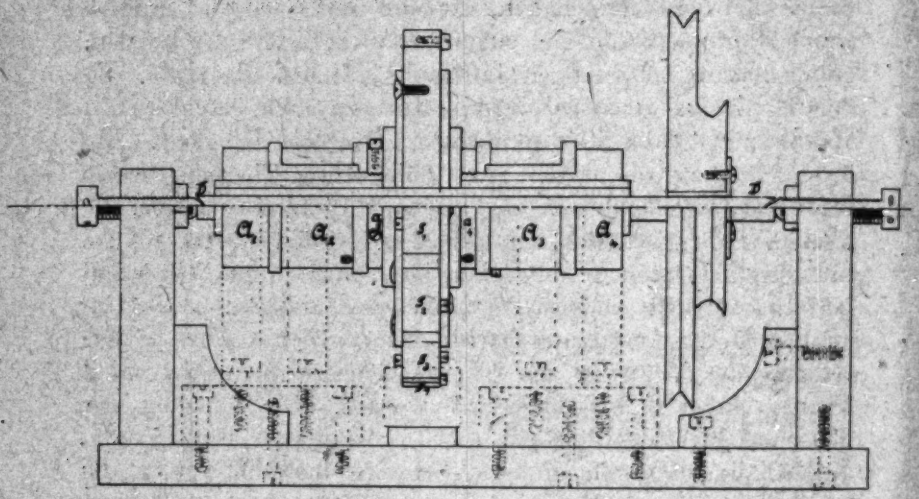


Fig. 1a.

Um die Verbindung der beiden äußeren Schleifringe mit beliebigen Segmenten vornehmen zu können, ohne den auf A_2 und A_3 schleifenden Federn in den Weg zu kommen, sind die Ringe A_1 und A_4 unter den beiden inneren Ringen hindurch gut isoliert mit den schmalen Ringen a_1 und a_4 verbunden, von denen dann die Drähte zu den Segmenten führen.

Auf dem Umfange der großen Scheibe schleifen einander diametral gegenüber (evtl. auch um $^1/_{12}$ des Umfanges gegeneinander verschoben) zwei Schleiffedern, die mit den Elektroden der zu untersuchenden Platte verbunden waren. Vier Schleiffedern verbanden die Schleifringe mit den Zuleitungen zu den übrigen Vorrichtungen, welche jeweils zu den Messungen verwendet werden sollten. Man kann mit Hilfe dieses Um-

schalters eine große Menge der verschiedenartigsten Schaltungsfolgen herstellen, je nachdem man die Sektoren *s* mit den vier Schleifringen verbindet und die übrigen Apparate an die sechs Schleiffedern anlegt. Besondere Schwierigkeit bot die Durchbildung der Schleiffedern, da jede Kontaktunsicherheit in ihrem vollen Betrage in die gemessene Stromstärke und damit in den errechneten Widerstand eingeht, bei welchem eine Genauigkeit von mindestens 0,2 Proz. angestrebt wurde. Mit einer einfachen, fest eingespannten Feder ließ sich diese

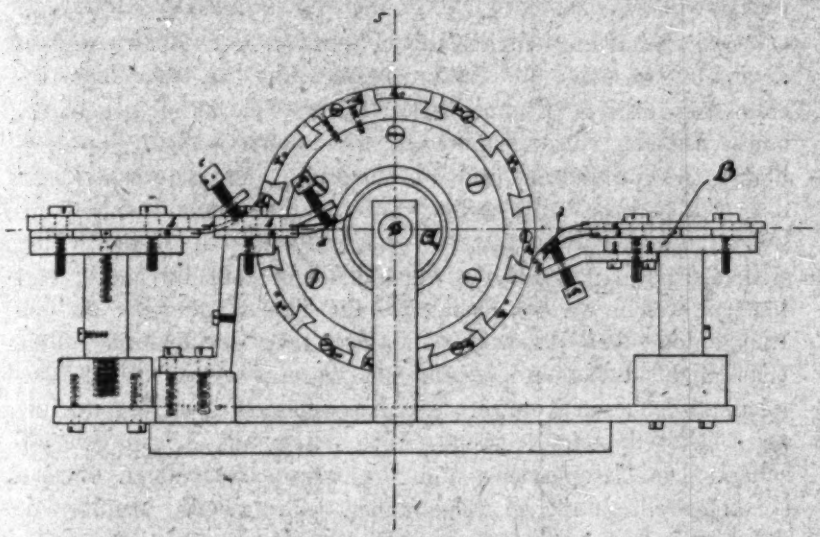


Fig. 1b.

Bedingung nicht erfüllen. Der Kontakt wurde daher in jedem Schleifaggregat von vier 2 mm breiten und 0,2 mm dicken, parallel liegenden, ca. 25 mm langen Stücken besten Uhrfederstahles vermittelt, die an ihrem einen Ende in die Messingstücke *a* eingelötet und am anderen Ende hochpoliert waren. In die Messingstücke *b* sind 13 mm breite Streifen stärkeren Uhrfederstahles eingelötet, die federnd gegen die Regulierungsschrauben *c* anliegen, durch welche sie unter Zwischenlage der ca. 2 mm dicken Gummistücke *g* gegen die eigentlichen Schleiffedern gedrückt werden, welche so mit sanftem, genau regulierbarem Drucke auf ihren Bahnen gleiten. Dadurch werden namentlich Schwingungen der Federn, wie sie durch kleinste Unebenheiten auf den Schleifringen sehr leicht ein-

treten, sofort abgedämpft und damit zugleich der Hauptgrund für ein Hüpfen der Federn und Stromunterbrechungen oder unsichere Antrittszeiten der Federn an die Segmente vermieden. Trägt man dann der unvermeidlichen Abnutzung der Schleiffedern und ihren dadurch bedingten Formveränderungen noch Rechnung, indem man in kurzen Zwischenräumen in der Reihe der zu ermittelnden Widerstände einen genau bekannten Widerstand mißt, so ist eine Genauigkeit der Widerstandsmessungen bis auf 0,2 Proz. stets sicher zu erreichen.

Die Schaltungseinrichtungen mußten der Notwendigkeit angepaßt werden, die Spannungsmessung an den Thermoelementen durch Kompensation ihrer Spannung gegen die eines mittels Normalelementes fortdauernd genau kontrollierten Akkumulators und die Messung der Stromstärke in den Glasstücken unmittelbar aufeinander folgend mit demselben Spiegelgalvanometer vorzunehmen und dabei völlig sichere Unabhängigkeit der verschiedenen Stromkreise zu verbürgen, welche an der Stelle, wo die Thermoelemente an den Elektroden der Glasstücke anlagen, nur durch eine dünne Glasschicht voneinander getrennt waren, welche nicht hinreichend isolieren konnte. Ein Isolationsfehler an irgendeiner zweiten Stelle der Leitung mußte daher alle Messungen fälschen. Die Temperatur- und Widerstandsmessungen wurden so angestellt, daß im allgemeinen jede zweite Minute die Spannung beider Thermoelemente gemessen und in der dazwischen liegenden Minute je eine Widerstandsmessung durchgeführt wurde, so daß sich die für sie gültige Temperatur aus zwei unmittelbar zeitlich benachbarten Temperaturmessungen ermitteln ließ.

An den in Tab. 2 gegebenen Glasstücken wurde nun bei vier bis zehn verschiedenen Temperaturen die Leitfähigkeit gemessen, indem jedesmal bei konstanter Temperatur für mehrere verschiedene Spannungen die zugehörige Stromstärke bestimmt wurde. Eine systematische Abhängigkeit der aus diesen beiden Größen errechneten Widerstände von der Spannung konnte nicht festgestellt werden; sie hatte auch von vornherein durch Anwendung möglichst niedriger Spannungen, welche dann allerdings die komplizierte Messung sehr schwacher Ströme mit sich brachte, vermieden werden sollen. Die Ab-

hängigkeit der gemessenen Widerstände von der Frequenz des alternierenden Gleichstromes, welch letztere bei niedrigen Frequenzen eine recht bedeutende Vermehrung des Widerstandes mit sich brachte, wurde bei hinreichend hohen Frequenzen, die stets vollkommen in dem sicher zu erreichenden Gebiete lagen, verschwindend klein, und da sie während der Beobachtung selbst stets kontrolliert werden konnte, so ist ihr Einfluß auf die Resultate ebenfalls zu vernachlässigen.

Die bei verschiedenen Spannungen und eventuell auch bei stark wechselnden Frequenzen bestimmten Widerstände hier im einzelnen vorzulegen, würde zu weit führen. Da bei jeder Messungsreihe, welche ca. eine halbe Stunde zu dauern pflegte, die Temperatur um einige Zehntel Grade sich änderte, wurden alle gemessenen Widerstandswerte mittels vorläufiger genäherter Temperaturkoeffizienten auf konstante Temperatur reduziert und aus ihnen ein Mittelwert genommen. Diese Mittelwerte seien mit Angabe der Anzahl der je zu einem Mittel vereinigten Messungen, von denen wiederum jede auf vier unter gleichen Bedingungen der Spannung und Frequenz bestimmten Einzelwerten beruht, unter Angabe der Mitteltemperatur in Tab. 3 aufgenommen.

In die Zusammenstellung sind sämtliche an den in Tab. 2 gegebenen Glasstücken überhaupt ausgeführten Messungen aufgenommen. Es ist die Temperatur in Celsiusgraden und der für die Beurteilung maßgebende Wert der reziproken absoluten Temperatur angegeben, für welche der unter log $W_{\text{beob.}}$ verzeichnete Widerstand gemessen wurde. Eine runde Klammer (..) deutet an, daß der betreffende Widerstand als weniger sicher bestimmt zu bezeichnen ist.

Aus dem so gewonnenen Materiale muß nunmehr die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur ermittelt werden, welche man, wie schon dargelegt, durch eine Exponentialfunktion darstellen kann. Es sei von jetzt ab in den Überlegungen stets der reziproke Wert des Widerstandes, die Leitfähigkeit L eingeführt und deren Abhängigkeit von der Temperatur wird in der Form

$$L = L_\infty e^{-B/\vartheta}$$

geschrieben. Die Konstanten L_∞ und B sind für jede Glassorte zu berechnen, was, um alle Beobachtungen gleichmäßig

Tabelle 8.

Widerstandsbestimmungen.

Nr.	Anzahl der Messungen	$t°$	$1/\vartheta$	$\log W$ beob.	$\log W$ ber.	Δ	v %	$\log W$ ber. (2)	Δ_2	v_2 %
				Glasprobe 40.						
1	3	149,1	0,0023690	7,3369	7,3428	+ 59	+1,4			
2	2	202,2	,0021045	6,2774	6,2754	− 20	− 0,5			
3	4	250,0	,0019120	5,5049	5,4986	− 63	− 1,5			
4	4	292,7	,0017678	4,9230	4,9166	− 64	− 1,5			
5	3	342,7	,0016242	4,3312	4,3371	+ 59	+1,4			
6	4	384,9	,0015200	3,9139	3,9166	+ 27	+0,6			
7	3	421,2	,0014405	3,5924	3,5957	+ 33	+0,8			
8	4	455,1	,0013735	3,3271	3,3255	− 16	− 0,4			
				Glasprobe 41.						
1	2	188,5	0,0021670	7,1604	7,1597	− 7	− 0,2			
2	1	103,3	,0026575	8,9797	[9,1436]	[+1639]	...			
3	5	256,7	,0018880	6,0286	6,0311	+ 25	+0,6			
4	3	327,4	,0016655	5,1314	5,1309	− 5	− 0,1			
5	2	385,5	,0015185	4,5386	4,5365	− 21	− 0,5			
6	5	434,6	,0014132	4,1090	4,1105	+ 15	+0,3			
				Glasprobe 42.						
1	2	68,1	0,0029320	6,8488	7,8605	+ 117	+2,7	[7,9151]	[+663]	...
2	4	146,3	,0023850	5,9191	5,9299	+ 108	+2,5	[5,9647]	[+456]	...
3	2	215,3	,0020480	4,7646	4,7402	− 244	− 5,7	4,7629	− 17	− 0,4
4	2	260,0	,0018760	4,1492	4,1331	− 161	− 3,7	4,1495	+ 3	+0,1
5	5	301,7	,0017400	3,6619	3,6530	− 89	− 2,1	3,6647	+ 28	+0,8
6	3	339,0	,0016340	3,2859	3,2788	− 71	− 1,6	3,2866	+ 7	+0,2
7	3	391,0	,0015060	2,8312	2,8270	− 42	− 1,0	2,8302	− 10	− 0,3
8	4	426,2	,0014303	2,5610	2,5598	− 12	− 0,3	2,5603	− 7	− 0,2
9	2	451,6	,0013800	2,3440	2,3822	+ 382	+8,9	[2,3810]	[+270]	...
10	2	296,3	,0017565	3,7668	[3,7112]	[− 556]	...	[3,7234]	[− 434]	...
				Glasprobe 43.						
1	4	75,4	0,0028700	8,2239	[8,3306]	[+1067]	...			
2	3	159,9	,0023100	6,3171	6,3186	+ 15	+0,3			
3	4	232,0	,0019800	5,1316	5,1327	+ 11	+0,3			
4	4	307,0	,0017240	4,2136	4,2127	− 9	− 0,2			
5	4	379,7	,0015320	3,5322	3,5226	− 96	− 2,2			
6	4	441,3	,0014000	3,0394	3,0482	+ 88	+2,0			
7	4	332,0	,0016530	4,0063	[3,9574]	[− 489]	...			
				Glasprobe 44.						
1	1	85,6	0,0027885	10,5150	[10,6961]	[+1811]	...			
2	1	231,2	,0019834	(7,0335)	[7,0399]	[+ 64]	...			
3	2	224,9	,0020085	7,1550	7,1539	− 11	− 0,3			
4	3	284,7	,0017930	6,1735	6,1753	+ 18	+0,4			
5	2	335,3	,0016440	5,4974	5,4987	+ 13	+0,3			
6	3	398,1	,0014900	4,8038	4,7995	− 43	− 1,0			
7	3	445,4	,0013920	4,3522	4,3544	+ 22	+0,5			

Tabelle 3 (Fortsetzung).

Nr.	Anzahl der Messungen	$t°$	$1/\vartheta$	$\log W$ beob.	$\log W$ ber.	Δ	v %	$\log W$ ber. (2)	Δ_2	v_2 %
				Glasprobe 45.						
1	3	163,1	0,0022930	9,0708	9,0771	+ 63	+1,5			
2	3	227,3	,0019990	7,7503	7,7398	− 105	− 2,4			
3	3	302,4	,0017380	6,5491	6,5528	+ 37	+0,9			
4	3	376,4	,0015400	5,6547	5,6521	− 26	− 0,6			
5	4	441,8	,0013990	5,0074	5,0109	+ 35	+0,8			
6	4	355,5	,0015910	5,5316	[5,8841]	[+3525]	...			
				Glasprobe 46.						
1	1	76,0	0,0028650	9,6278	[9,7990]	[+1712]	...			
2	3	159,9	,0023100	7,4522	7,4555	+ 33	+0,7			
3	3	226,7	,0020010	6,1499	6,1506	+ 7	+0,2			
4	3	294,0	,0017635	5,1559	5,1477	− 82	− 1,9			
5	3	344,8	,0016185	4,5399	4,5353	− 46	− 1,1			
6	3	393,9	,0014995	4,0295	4,0326	+ 31	+0,7			
7	6	441,3	,0014000	3,6072	3,6125	+ 53	+1,2			
8	4	412,4	,0014590	3,8728	[3,8617]	[− 111]	...			
9	2	358,3	,0015840	4,4244	[4,3896]	[− 348]	...			
				Glasprobe 47.						
1	2	118,5	0,0025540	9,0474	[9,1114]	[+640]	...			
2	5	211,0	,0020660	7,0485	7,0500	+ 15	+0,3			
3	4	286,3	,0017880	5,8782	5,8756	− 26	− 0,6			
4	3	357,1	,0015870	5,0215	5,0265	+ 50	+1,2			
5	4	438,2	,0014060	4,2633	4,2619	− 14	− 0,3			
				Glasprobe 48.						
1	2	110,9	0,0026050	7,6267	[7,6817]	[+550]	...			
2	3	185,3	,0021820	6,0259	6,0241	− 18	− 0,4			
3	3	244,1	,0019310	5,0500	5,0526	+ 26	+0,6			
4	3	299,1	,0017480	4,3259	3,3238	− 21	− 0,5			
5	3	354,4	,0015940	3,7196	3,7203	+ 7	+0,2			
6	3	403,1	,0014790	3,2686	3,2697	+ 11	+0,3			
7	3	448,0	,0013870	2,9092	2,9092	0	0,0			
				Glasprobe 49.						
1	3	133,0	0,0024630	7,6897	7,6911	+ 14	+0,3			
2	4	232,6	,0019780	5,9548	5,8190	...	...			
3	3	298,1	,0017510	4,9477	4,9427	− 50	− 1,2			
4	4	361,1	,0015770	4,2724	4,2710	− 14	− 0,3			
5	4	435,2	,0014120	3,6298	3,6339	+ 41	+1,0			
6	4	366,8	,0015630	4,2490	[4,2169]	[− 321]	...			
7	3	294,2	,0017630	5,0500	[4,9890]	[− 610]	...			
				Glasprobe 50.						
1	3	211,5	0,0020640	8,1275	8,1311	+ 36	+0,8			
2	4	292,3	,0017690	6,7100	6,7065	− 35	− 0,8			
3	4	370,5	,0015540	5,6779	5,6682	− 97	− 2,2			
4	4	439,8	,0014030	4,9302	4,9390	+ 88	+2,0			

Tabelle 8 (Fortsetzung).

Nr.	Anzahl der Messungen	$t°$	$1/\vartheta$	$\log W$ beob.	$\log W$ ber.	Δ	v %	$\log W$ ber. (2)	Δ_2	v_2 %
				Glasprobe 51.						
1	3	197,8	0,0021240	9,0188	9,0243	+ 55	+1,3			
2	4	274,6	,0018260	7,5909	7,5865	− 44	− 1,0			
3	4	348,9	,0016080	6,5446	6,5349	− 97	− 2,2			
4	4	399,5	,0014870	5,9496	5,9510	+ 14	+0,3			
5	3	444,9	,0013930	5,4898	5,4975	+ 77	+1,8			
6	3	344,3	,0016200	6,6155	[6,5929]	[− 226]	...			
				Glasprobe 52.						
1	2	118,4	0,0025550	9,0553	[9,0944]	[+391]	...			
2	2	125,4	,0025100	8,8892	8,8939	+ 47	+1,1			
3	4	207,5	,0020810	6,9848	6,9826	− 22	− 0,5			
4	4	276,8	,0018190	5,8254	5,8154	− 100	− 2,3			
5	4	347,0	,0016130	4,8979	4,8976	− 3	− 0,1			
6	4	422,4	,0014380	4,1108	4,1182	+ 74	+1,7			
				Glasprobe 53.						
1	4	231,8	0,0019810	7,2810	7,2827	+ 17	+0,4			
2	3	281,6	,0018030	6,4843	6,4827	− 16	− 0,4			
3	3	328,0	,0016640	5,8579	5,8577	− 2	0,0			
4	4	395,0	,0014970	5,1076	5,1070	− 6	− 0,1			
5	4	433,7	,0014150	4,7372	4,7384	+ 12	+0,3			
6	2	359,9	,0015800	5,4904	[5,4802]	[− 102]	...			
				Glasprobe 54.						
1	3	179,7	0,0022090	7,9459	7,9485	+ 26	+0,6			
2	4	254,7	,0018950	6,4766	6,4730	− 36	− 0,8			
3	4	355,1	,0015920	5,0518	5,0492	− 26	− 0,6			
4	4	429,8	,0014230	4,2516	4,2550	+ 34	+0,8			
5	5	371,2	,0016020	5,1091	[5,0962]	[− 129]	...			
				Glasprobe 55.						
1	4	274,6	0,0018260	6,8180	6,8195	+ 15	+0,3			
2	3	233,1	,0019760	7,5244	7,5243	− 1	0,0			
3	4	326,5	,0016680	6,0804	6,0775	− 29	− 0,7			
4	4	400,4	,0014850	5,2174	5,2178	+ 4	+0,1			
5	4	457,5	,0013690	4,6721	4,6728	+ 7	+0,2			
				Glasprobe 56.						
1	4	111,8	0,0025990	6,3194	[6,3764]	[+570]	...			
2	4	214,6	,0020510	4,4883	4,4905	+ 22	+0,5			
3	4	310,1	,0017150	3,3388	3,3340	− 48	− 1,1			
4	5	427,3	,0014280	2,3440	2,3464	+ 24	+0,6			
5	4	347,3	,0016120	3,0309	[2,9796]	[− 513]	...			
				Glasprobe 57.						
1	4	113,4	0,0025880	6,9693	6,9791	+ 98	+2,3	...	...	...
2	3	87,4	,0027750	7,6000	7,6121	+121	+2,8	...	...	...
3	4	184,0	,0021880	5,6559	5,6252	− 307	− 7,1	5,6556	+ 3	+0,1
4	4	258,4	,0018820	4,5970	4,5893	− 77	− 1,8	4,6013	− 43	− 1,0
5	3	342,0	,0016260	3,7272	3,7228	− 44	− 1,0	3,7192	+80	+1,9
6	4	432,2	,0014180	2,9983	3,0188	+205	+4,7	3,0027	− 44	− 1,0
7	4	361,1	,0015770	3,6012	[3,5569]	[− 443]	...	...	...	...
8	3	303,0	,0017360	4,1648	[4,0951]	[− 697]	...	...	...	...

zu berücksichtigen, mittels eines Näherungsverfahrens und nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt wurde.

Man erhielt so die in Tab. 4 gegebenen wahrscheinlichsten Werte von $L_{\infty\,sp.}$ (spezifische Leitfähigkeit bei unendlich hoher Temperatur) und B, wo $L_{\infty\,sp.}$ aus L_{∞} durch Berücksichtigung der geometrischen Dimensionen der Glasprobe entstanden ist. Doch sind in diesen Werten nicht alle Beobachtungen enthalten; es zeigte sich vielmehr bereits bei einer graphischen Darstellung der Beobachtungen und mehr noch bei Einsetzung der vorher abgeleiteten Näherungswerte der Konstanten, daß die bei sehr niedriger Temperatur (unter ca. 100°) gewonnenen Leitfähigkeitswerte durch obige Gleichung nicht gut miterfaßt wurden, indem sie alle im gleichen Sinne, einer zu hoch beobachteten Leitfähigkeit gegenüber der bei höheren Temperaturen nach obiger Formel berechneten, abweichen. Ein Grund dafür ist nicht recht einzusehen. Mit Hilfe der wahrscheinlichsten Werte von L_{∞} (L_{∞} sei in Zukunft, wenn keine Verwechslung möglich, der Einfachheit halber für $L_{\infty\,sp.}$ gesetzt) und B wurden dann rückwärts die unter $\log W_{ber.}$ in Tab. 3 gegebenen Werte für die gemessenen Temperaturen berechnet und die Differenzen zwischen dem berechneten und beobachteten Werte unter Δ gegeben. Um das Resultat anschaulicher zu machen, sind unter v die Abweichungen des berechneten Widerstandes von dem gemessenen in Prozenten des letzteren angeführt. Bei denjenigen Beobachtungen, welche zur Berechnung der wahrscheinlichsten Werte von L_{∞} und B nicht mitherangezogen wurden, ist der Wert von $\log W_{ber.}$ und der von Δ in eckige Klammern [..] gesetzt worden. Die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte ist innerhalb eines sehr beträchtlichen Temperaturintervalles in Anbetracht der Schwierigkeit der quantitativen Widerstandsbestimmungen fester, nicht metallischer Leiter so ausgezeichnet, daß die Zulässigkeit der zunächst als Interpolationsformel anzusehenden Beziehung durchaus erwiesen ist.

Wie die bei sehr niedrigen Temperaturen gemessene Leitfähigkeit sich mit den aus den mittleren und hohen Temperaturen, bei welchen die Meßgenauigkeit wesentlich höher war und bei denen auch die Einstellung des der betreffenden Temperatur entsprechenden Gleichgewichtszustandes des Glases

sehr viel schneller eintreten mußte, errechneten Konstanten nicht ganz in Einklang befindet, so weichen auch die bei sinkender Temperatur gemessenen Leitfähigkeiten von den bei steigender Temperatur bestimmten, jedoch im entgegengesetzten Sinne, ab. Bei fallender Temperatur sind die gemessenen Leitfähigkeiten kleiner als die bei steigender Temperatur erhaltenen. Das dürfte daher rühren, daß trotz der möglichst geringen Stromstärke, welche durch die Glasstücke hindurchgesendet wurde, die aber bei hohen Temperaturen des geringen Widerstandes der Glasstücke halber, um eine noch hinreichend genaue Spannungsmessung zu ermöglichen, nicht zu gering genommen werden konnte, doch eine Veränderung der Glassubstanz dahingehend hervorgebracht ist, daß Natriumionen von den Elektroden in irgendeiner Weise herausgefangen und festgehalten wurden. Mannigfache Versuche ergaben allerdings, daß bei konstanter Temperatur auch bei länger als eine Stunde währendem Durchgange des alternierenden Gleichstromes eine Verminderung der Leitfähigkeit nicht konstatiert werden konnte. Es ist aber eben zu berücksichtigen, daß infolge der außerordentlich großen Verstärkung der Leitfähigkeit mit der Temperatur die Stromstärken bei hohen Temperaturen mehr als den hundertfachen Betrag der bei niedrigen Temperaturen verwendeten aus dem oben erwähnten Grunde annehmen mußten, wobei denn doch eine Rückwirkung bei der Rückkehr zu niedrigen Temperaturen und wesentlich kleineren Stromstärken möglich erscheint. Die Beobachtungen bei sinkender Temperatur sind zur Ableitung der wahrscheinlichsten Werte der L_∞ und B daher nicht mitherangezogen worden. In zwei Fällen war die Auswahl der als wohlbegründet wegzulassenden Beobachtungen nicht klar vorgezeichnet, und es sind daher für beide möglichen Kombinationen die Werte von L_∞ und B berechnet und die durch Einsetzung erhaltenen Werte von $\log W_{\text{ber.}}$ in Tab. 3 eingetragen.

Aus den in Tab. 4 gegebenen wahrscheinlichsten Werten von $L_{\infty\,\text{sp.}}$ und B ist nun der Einfluß der chemischen Zusammensetzung der Glasproben zu ermitteln. Um alles irgend vergleichbare Beobachtungsmaterial heranzuziehen, sind auch die von mir früher untersuchten Glassorten 1—8, deren chemische Zusammensetzungen Tab. 1 ebenfalls angibt, mit in

Tabelle 4.

Glassorte	Glasprobe Nr.	$L_{\infty\,sp.}$	B	m_L %	m_B	$L_{\infty\,sp.m}$	B_m	m_{L_m} %	m_{B_m}	1. Ausgleichung $L_{\infty\,ber.}$	1. Ausgleichung $B_{ber.}$	1. Ausgleichung v_L %	1. Ausgleichung Δ_B	2. Ausgleichung $L_{\infty\,ber.}$	2. Ausgleichung $B_{ber.}$	2. Ausgleichung v_L %	2. Ausgleichung Δ_B
1		...	...	...	...	96,6	9482,0	...	...	86,8	9536,5	− 10,1	+ 54,5	[84,4]	[9629,3]	...	...
2		...	...	...	...	155,6	8779,0	...	...	165,8	8871,9	+ 6,6	+ 92,9	[166,3]	[8957,5]	...	...
3		...	...	...	...	200,8	8155,0	...	...	232,7	8340,4	+ 15,4	+ 185,4	[236,7]	[8415,0]	...	...
4	40	124,2	9292,1	± 2,5	± 13,6	123,86	9308,2	± 2,9	± 15,8	123,3	9206,4	− 0,5	− 101,8	122,0	9297,6	− 1,3	− 10,6
	41	123,8	9314,0	1,4	8,1												
5	42[1]	262,2	8210,6	1,6	9,1	265,96	8218,6	4,8	25,7	268,2	8196,2	+ 0,9	− 22,4	273,2	8262,3	+ 2,7	+ 43,7
	43	300,0	8275,1	4,5	24,1												
6	44	69,65	10455,9	2,5	14,7	69,69	10460,5	5,3	29,0	65,8	10344,2	− 5,6	− 116,3	64,2	10393,3	− 7,9	− 67,2
	45	69,86	10473,0	± 4,7	± 25,0												
7	46	151,2	9724,4	3,2	17,7	149,61	9725,8	4,7	26,6	150,4	9642,0	+ 0,5	− 83,8	152,3	9694,1	+ 1,8	− 31,7
	47	147,8	9726,9	3,5	19,8												
8	48	249,3	9022,6	1,2	6,9	243,61	8996,0	2,8	15,3	222,8	9040,1	− 8,5	+ 44,1	227,7	9094,7	− 6,5	+ 98,7
	49	203,3	8888,9	2,6	13,7												
9	50	51,81	11120,0	± 8,2	± 46,0	52,02	11113,1	± 10,0	± 56,7	56,6	11242,1	+ 8,8	+ 129,0	56,5	11225,6	+ 8,6	+ 112,5
	51	52,12	11109,4	5,7	32,7												
10	52	134,1	10258,2	4,2	21,3	153,44	10340,0	4,4	22,9	153,3	10310,6	− 0,1	− 29,4	157,2	10317,5	+ 2,4	− 22,5
	53	155,6	10350,7	1,3	7,8												
12	54	197,2	10819,8	3,1	16,8	209,51	10817,0	3,5	19,1	180,4	10778,6	− 13,9	− 38,4	187,2	10741,2	− 10,6	− 75,8
	55	213,1	10816,6	± 1,6	± 9,1												
13	56	265,7	7924,3	5,4	30,2	269,31	7931,0	7,7	25,1	265,3	7817,9	− 1,5	− 113,1	268,3	7883,9	− 0,4	− 47,1
	57[2]	273,1	7933,3	5,4	17,9												

1) Die Ausgleichung unter Einschluß aller Beobachtungen ergab: $L_{\infty\,sp.} = 233,3 \pm 6,3$ Proz., $B = 8128,2 \pm 31,5$.
2) Die Ausgleichung unter Einschluß aller Beobachtungen ergab: $L_{\infty\,sp.} = 216,0 \pm 8,8$ Proz., $B = 7794,2 \pm 39,4$.

Tab. 4 aufgenommen, obgleich Bedenken bestehen können, ob sie tatsächlich vollständig mit den neuen Glasproben vergleichbare Werte von L_∞ und B ergeben konnten. Die beiden folgenden Spalten der Tabelle enthalten die errechneten mittleren Fehler der L_∞ und B, erstere in Prozenten von L_∞, letztere in Einheiten der letzten Stelle, wodurch Rücksicht darauf genommen ist, daß die Widerstandsmessungen innerhalb weiter Grenzen stets mit gleicher Genauigkeit im Verhältnis zur Größe der Widerstände selbst ausgeführt werden und daß L_∞ stark variabel ist, während B für alle Glasproben nahe den gleichen Wert annimmt. Die beiden dann folgenden Spalten enthalten die Mittelwerte von L_∞ und B aus den für jede Glassorte an zwei Proben angestellten Messungen, denen wiederum die errechneten mittleren Fehler beigefügt wurden.

Diese Fehler sind aber in recht hohem Maße nur rechnerischer Natur und beziehen sich auf die etwaigen Unsicherheiten der Widerstandsmessungen, der Temperaturmessungen, der etwaigen Veränderung der Elektrodenkontakte während der Untersuchung usf., wobei noch zu berücksichtigen ist, daß der Wert für L_∞ durch eine verhältnismäßig sehr bedeutende Extrapolation aus dem gemessenen Temperaturintervalle heraus gewonnen wird, wodurch er gegen jede kleine Unsicherheit der Messungen innerhalb dieses Temperaturintervalles außerordentlich empfindlich wird. Eine sehr kleine Änderung des Temperaturkoeffizienten B bewirkte bereits eine große Veränderung in L_∞, so daß die in Tab. 4 sich findenden scheinbar großen prozentualen Fehler m_{L_∞} nicht weiter auffallen dürfen, sondern im Gegenteil als verhältnismäßig klein zu bezeichnen sind. Die systematischen Abweichungen der Ergebnisse der Messungen an den verschiedenen Glasstücken, die in Inhomogenitäten der Glassubstanz, anfänglichen Fehlern in der Anbringung der Elektroden, Unsicherheiten der chemischen Analysen usw. bestehen, dürften aber auf die beabsichtigte Ableitung der Abhängigkeit der L_∞ und B von der chemischen Zusammensetzung der Gläser einen so viel bedeutenderen und weniger kontrollierbaren Einfluß besitzen, daß bei der rechnerischen Bestimmung der Abhängigkeit der L_∞ und B von der chemischen Zusammensetzung die angegebenen mittleren Fehler beiseite gelassen

und die Bewertung der gewonnenen Mittelwerte so durchgeführt werden soll, daß die L_∞ eine ihrer Größe umgekehrt proportionales Gewicht in der Ausgleichung erhalten, während den B allen das gleiche Gewicht beigelegt werden möge.

L_∞ und B sollen in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration c des Glases an Na_2O und der Konzentration k an CaO, in Gewichtsprozenten gerechnet, bestimmt werden, und dazu sind also mindestens je drei Konstanten erforderlich.

Eine graphische Darstellung der L_∞ als Funktion von c und k, deren Reproduktion hier aber entbehrt werden kann, zeigte, daß die L_∞ sowohl mit c als auch mit k proportional sich ändern, so daß L_∞ durch einen Ausdruck von der Form

$$L_\infty = M + \mu \cdot c + \nu \cdot k$$

hinreichend genau dargestellt wird, wo M, μ und ν zu bestimmende Konstanten bedeuten. Der Ausdruck schließt eine unmittelbare Wechselwirkung des Gehaltes der Gläser an Na_2O und CaO in bezug auf die Grenzleitfähigkeit L_∞ aus. Beide Komponenten beteiligen sich an dieser also unabhängig voneinander, aber mit verschiedenen Proportionalitätsfaktoren. Es wurden zwei Ausgleichungen der gemessenen L gemäß obiger Formel vorgenommen, von denen die eine (a) alle Glassorten 1—13 umfaßt, während aus bereits dargelegten Gründen bei Ausgleichung (b) die Gläser 1—3 fortgelassen wurden. Die Summe der Fehlerquadrate wies für die Ausgleichung nach (b) bei weitem größere innere Übereinstimmung der Beobachtungen nach, so daß allen aus der Ausgleichung (b) gewonnenen Resultaten wesentlich höhere Zuverlässigkeit zuzuschreiben ist.

Für die M, μ und ν ergaben sich in dieser Weise die folgenden Werte:

(a) $M = -196{,}65 \pm 26{,}44$; $\mu = 12{,}08 \pm 0{,}74$; $\nu = 6{,}770 \pm 1{,}220$,

(b) $M = -214{,}68 \pm 22{,}84$; $\mu = 12{,}58 \pm 0{,}61$; $\nu = 7{,}515 \pm 1{,}064$.

Setzt man diese Werte in den Ausdruck für L_∞ ein, so wird

(a) $$L_\infty = 12{,}08 \cdot c + 6{,}770 \cdot k - 196{,}65$$
$$m = \pm \sqrt{26{,}44^2 + (0{,}74 \cdot c)^2 + (1{,}220 \cdot k)^2},$$

(b) $$L_\infty = 12{,}58 \cdot c + 7{,}515 \cdot k - 214{,}68$$
$$m = \pm \sqrt{22{,}84^2 + (0{,}61 \cdot c)^2 + (1{,}064 \cdot k)^2},$$

von denen die zweite Gleichung gemäß den kleineren mittleren Fehlern aller ihrer Konstanten auch in jedem Falle einen kleineren mittleren Fehler der Grenzleitfähigkeit L_∞ ergibt.

Setzt man in den Ausdruck unter (a) oder (b) die für die untersuchten Glassorten gültigen Werte von c und k ein, so erhält man die unter $L_{\infty\,\text{ber.}}$ gegebenen Zahlen in den Kolonnen der ersten bzw. zweiten Ausgleichung der Tab. 4, denen die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Größen in Prozenten beigefügt sind.

Es ist nun zu fragen, was aus diesem Ausdrucke für L_∞ über den Vorgang der Elektrizitätsleitung im Glase zu schließen sei. L_∞ nimmt erst positive, d. h. physikalisch reelle Werte an, wenn eine gewisse Mindestmenge c_0 bzw. k_0 der salzbildenden Metalloxyde vorhanden ist, welche sich berechnet nach (a) bzw. (b):

(a) $$12{,}08 \,.\, c_0 + 6{,}770 \,.\, k_0 = 196{,}65 \,,$$

(b) $$12{,}58 \,.\, c_0 + 7{,}515 \,.\, k_0 = 214{,}68 \,.$$

Zu einem gegebenen k_0 oder c_0 gehört also immer ein gewisser Mindestwert von c_0 bzw. k_0, um das Glas überhaupt leitend zu machen. Als Grenzfälle ergeben sich die Gläser, welche nur Na_2O oder nur CaO enthalten, falls man die Formel so weit über ihre empirisch gesicherten Grenzen extrapolieren will, und in diesen Fällen würde, wenn $c_0 = 0$, also nur CaO vorhanden wäre, (a) $k_0 = 29{,}1$ Proz. bzw. (b) $k_0 = 28{,}5$ Proz.; wenn $k_0 = 0$, also nur Na_2O vorhanden wäre, (a) $c_0 = 16{,}3$ Proz. bzw. (b) $c_0 = 17{,}1$ Proz. Ein Teil der in dem Glase enthaltenen Na- oder Ca-Mengen kommt also für die Leitfähigkeit nicht in Betracht, sondern ist offenbar im Zusammenhang mit der Bildung des festen Glases, nicht dissoziierbar mit der Kieselsäure verbunden. In diesem festen Teile des Glases ist dann der übrige Teil, der aus dissoziierbaren Silikaten besteht, gewissermaßen gelöst.

Der Mechanismus wird klarer, wenn man an Stelle der Gewichtsprozente c und k an Na_2O und CaO Atomprozente φ und ψ so einführt, daß φ angibt, wieviel Na-Atome sich unter je 100 Atomen des Glases insgesamt befinden und ψ das gleiche für die Ca-Atome bedeutet. Man kann dann die Glei-

chung für L_∞ von den c und k in die φ und ψ umschreiben durch die Substitutionen

$$k = \frac{1{,}605\,\psi}{0{,}573 + 0{,}00457\,\psi + 0{,}00026\,\varphi} \quad \text{und} \quad c = \frac{0{,}885\,\varphi}{0{,}573 + 0{,}00457\,\psi + 0{,}00026\,\varphi}.$$

So kann man zunächst die Atomkonzentrationen für den Fall berechnen, in welchem die Grenzleitfähigkeit L_∞ gerade verschwindet und das Glas nur Na oder nur Ca enthält. Dann ergeben sich die kritischen Atomkonzentrationen im Falle $c_0 = \varphi = 0$, wo also nur Ca vorhanden ist, zu (a) $\psi = 11{,}4$, (b) $\varphi = 11{,}1$; im Falle $k_0 = \psi = 0$, wo also nur Na vorhanden ist, zu (a) $\varphi = 10{,}6$, (b) $\varphi = 11{,}1$ Ca- bzw. Na-Atome auf je 100 Atome der Glassubstanz.

Das ist ein sehr überraschendes Resultat. Es besagt, daß eine Glassubstanz, die nur Na_2O oder nur CaO als basisches Prinzip enthält, mindestens 11 Atome Na bzw. Ca enthalten muß, um elektrische Leitfähigkeit zu zeigen, obwohl doch Na ein einwertiges, Ca aber ein zweiwertiges Metall ist. Man hätte vielmehr erwarten sollen, daß in bezug auf die Dissoziation, denn diese ist ja wohl für die Größe von L_∞ hauptsächlich maßgebend, Na_2 und Ca einander entsprechen müßten, wie das bei flüssigen Elektrolyten selbstverständlich gewesen wäre. Es scheint also aus den vorliegenden Messungen der elektrischen Leitfähigkeit mit Sicherheit hervorzugehen, daß im festen Aggregatzustande im Vergleich zum flüssigen den Molekülen eine geringere Bedeutung zukommt, wie das ja auch in zahlreichen anderen Fällen angenommen werden muß und von den meisten Theorien des festen Aggregatzustandes auch eingeführt wird.

Man kann dann von den beiden oben behandelten Grenzfällen zum allgemeinen Falle übergehen, wo Na und Ca gleichzeitig im Glase vorhanden sind. Auch jetzt ergibt sich eine Beziehung, aus welcher diejenigen Mengen von Na und Ca in Atomprozenten zu berechnen sind, die mindestens vorhanden sein müssen, um eine von Null verschiedene Grenzleitfähigkeit L_∞ zu gewinnen. Durch Ersetzen der Werte von c_0 und k_0 durch φ und ψ in dem allgemeinen Ausdruck für L_∞ und Nullsetzen desselben erhält man [im Falle (b)]

$$0{,}885\,\varphi = 17{,}07\,(0{,}573 + 0{,}00457\,\psi + 0{,}00026\,\varphi) - 0{,}598 \cdot 1{,}605\,\psi$$

oder

$$0{,}881\,\varphi = 9{,}78 - 0{,}881\,\psi.$$

Daß die Koeffizienten von φ und ψ *genau* gleich sind, ist natürlich einem Zufall zuzuschreiben; aber auch im Falle der Verwendung des Wertesystems (a) weichen sie nur sehr wenig voneinander ab. Es ist daher wohl erlaubt, die Zahlenkoeffizienten von φ und ψ in einen Mittelwert zusammenzufassen und zu schreiben

$$0{,}881\,(\varphi + \psi) = 9{,}78$$

oder

$$\varphi + \psi = 11{,}1 \text{ Atomprozente.}$$

In Worten bedeutet dies das folgende: Ein nur aus Na_2O, CaO und SiO_2 bestehendes Glas zeigt nur dann eine von Null verschiedene Leitfähigkeit, wenn sein Gehalt an Na- und Ca-Atomen zusammen mindestens 11 Atome auf je 100 Atome der Glassubstanz beträgt. Darüber hinaus ist die Grenzleitfähigkeit bei der Temperatur $\vartheta = \infty$ oder der Koeffizient der Exponentialfunktion, welche die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit eines solchen Glases ausdrückt, proportional der Zunahme seines Gehaltes an Na_2O bzw. CaO, jedoch beider mit verschiedenen Proportionalitätsfaktoren.

Wie sich bei einem Glase mit mehr als 11 Atomprozenten Metallgehalt die nicht dissoziationsfähigen Metallatome auf den in ihm enthaltenen Na- bzw. Ca-Anteil verteilen, ist hier nicht festzustellen, ebensowenig ist die wichtige Frage zu entscheiden, ob der für die Leitfähigkeit nicht in Betracht kommende Teil der gesamten Na- bzw. Ca-Atome zeitlich immer dieselben Atome umfaßt oder ob sich das Glas wie ein in teilweiser Dissoziation befindlicher Elektrolyt verhält, wo ein und dasselbe Atom abwechselnd dem dissoziierten und nichtdissoziierten Anteil zugehört. Doch dürfte die erstere Annahme als die wesentlich wahrscheinlichere zu bezeichnen sein. Von der größten Bedeutung ist aber, daß auch in diesem allgemeinen Falle nachgewiesen werden konnte, daß für das Verschwinden der Grenzleitfähigkeit, also für das Verhalten im nichtdissoziierten Zustande, *ein* Atom Na *einem* Atom Ca *gleichwertig* ist, was allen an flüssigen Elektrolyten gefundenen Resultaten direkt widerspricht und zeigt, daß die am flüssigen Elektrolyten gewonnenen Regeln nicht ohne große Vorsicht auf feste Eelektrolyte übertragen werden dürfen.

Es ist nun weiter die Abhängigkeit der Größe B, die den Einfluß der Temperatur auf die Leitfähigkeit des Glases angibt, von den Konzentrationen c und k an Na_2O bzw. CaO

zu bestimmen. Diese läßt sich in befriedigender Weise nur durch eine vierkonstantige Formel ausdrücken, welche dem Umstande Rechnung trägt, daß B mit wachsendem k um so schneller zunimmt, je kleiner c ist und B mit wachsendem c um so schneller abnimmt, je größer k ist; während die Veränderung von L_∞ mit wechselndem c von dem jeweiligen k ganz unabhängig war und umgekehrt, falls nur die Summe von φ und ψ 11 Atome pro 100 Atome insgesamt überschritt. Es wird also

$$B = \alpha \,.\, c \,.\, k + \beta \,.\, c + \gamma \,.\, k + \delta$$

zu setzen sein, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu berechnende Konstanten darstellen. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aus allen mit gleichem Gewichte versehenen, in der 8. Spalte der Tab. 4 unter B gegebenen Werten, unter Berücksichtigung der an allen 12 Glassorten gewonnenen B

(a) $\alpha = -4{,}0321,\ \beta = -51{,}927,\ \gamma = 197{,}63,\ \delta = 9477{,}3$

und unter Berücksichtigung nur der homogeneren Glassortengruppe 4—13

(b) $\alpha = -3{,}4040,\ \beta = -59{,}045,\ \gamma = 174{,}00,\ \delta = 9803{,}7,$

so daß sich für B die beiden Formeln ergeben:

(a) $B = 9477{,}3 - 51{,}927 \,.\, c + 197{,}63 \,.\, k - 4{,}0321 \,.\, c \,.\, k$,

(b) $B = 9803{,}7 - 59{,}045 \,.\, c + 174{,}00 \,.\, k - 3{,}4040 \,.\, c \,.\, k$.

Hier haben die Koeffizienten von c und k verschiedene Vorzeichen. Ein Ersatz der c und k durch die oben mit φ und ψ bezeichneten Atomkonzentrationen führt keinerlei Vereinfachungen oder Aufklärungen nach sich. Es existiert zwar ein Wert von c, für welchen B von k unabhängig ist, der sich gemäß der sichereren zweiten Formel zu $c = 51$ Proz. berechnet; doch hat dieser keine physikalische Bedeutung, da ein solches Glas gar nicht herstellbar ist.

In dem B ist die Wärmetönung des Prozesses der Dissoziation des Glases enthalten, und es würde von sehr großem Interesse sein, die Abhängigkeit derselben von der Konzentration an Na_2O und CaO kennen zu lernen. Außerdem ist aber in B auch die Veränderung der inneren Reibung mit der Temperatur miteingeschlossen, und diese beiden Größen sind nun auf keine Weise voneinander zu trennen, da Dissoziation und innere Reibung die gleiche Form der

Temperaturabhängigkeit aufweisen. Nur eine auf anderem Wege als durch Leitfähigkeitsmessungen gewonnene Bestimmung der Dissoziation oder der inneren Ionenreibung für sich allein könnte über diese wichtige Frage Aufklärung bringen.

Zum Schlusse seien noch die Ausdrücke für die Leitfähigkeit von reinen Natron-Kalk-Silikatgläsern in Abhängigkeit von den Na_2O- und CaO-Konzentrationen und von der Temperatur vollständig hingeschrieben. Für Glassorte 1—18 ist

$$L = (12{,}08\,c + 6{,}770 \cdot k - 196{,}65)\,e^{-\frac{9477{,}3 - 51{,}927 \cdot c + 197{,}63 \cdot k - 4{,}0821 \cdot c \cdot k}{\vartheta}};$$

und für Glassorte 4—18 wird

$$L = (12{,}58\,c + 7{,}515 \cdot k - 214{,}68)\,e^{-\frac{9808{,}7 - 59{,}045 \cdot c + 174{,}00 \cdot k - 3{,}4040 \cdot c \cdot k}{\vartheta}}.$$

Die große Zahl von je sieben Konstanten darf nicht auffallen, da die Formel die Abhängigkeit des L von drei unabhängigen Variablen ausdrücken soll und der Faktor vor der e-Funktion von dem Exponenten derselben vollkommen unabhängig sein muß. Sechs Konstanten wären in jedem Falle das überhaupt mögliche Minimum gewesen.

Zusammenfassung. — Es wird die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit reiner Natron-Kalk-Silikatgläser von ihrem Gehalte an Na_2O und CaO und von der Temperatur festgestellt. Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur ist durch eine einfache Exponentialfunktion mit der reziproken absoluten Temperatur im Exponenten bestimmt. Der Koeffizient der Exponentialfunktion zeigt, daß nicht alle in dem Glase vorhandenen Na- bzw. Ca-Atome dissoziationsfähig sind, sondern, daß vielmehr von je insgesamt 100 Atomen der Glassubstanz zusammen 11 Atome Na und Ca von vornherein festliegen und erst bei größerer Konzentration an Metallatomen Dissoziation und damit elektrische Leitfähigkeit auftritt, wobei besonders auffällig erscheint, daß für den nichtdissoziationsfähigen Anteil die zweiwertigen Ca-Atome und die einwertigen Na-Atome völlig gleichwertig sind.

Die Untersuchung wurde angestellt im Physikal. Institut der Technischen Hochschule in Braunschweig, indem die Mittel des Institutes dazu von dem Direktor, Hrn. Prof. Dr. H. Diesselhorst in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt wurden, wofür auch an dieser Stelle besonders gedankt sei.

(Eingegangen 20. August 1918.)

3. *Über den senkrechten Durchgang linear polarisierter ebener Wellen durch planparallele Platten durchsichtiger inaktiver Kristalle;* von *Max Berek.*

1. Einleitung.

In der üblichen Theorie der Interferenzerscheinungen durchsichtiger inaktiver Kristalle im senkrecht einfallenden polarisierten Lichte wird an den Grenzflächen der anisotropen Medien nach Analogie des Parallelogrammes der Kräfte eine geometrische Zerlegung der Amplituden in zueinander senkrechte Komponenten angewendet. Dieses Verfahren enthält zwei Vernachlässigungen: es wird der Absorption der Wellen im Kristall nicht Rechnung getragen, und es bleibt die Schwächung der Amplituden durch Reflexion an den Grenzflächen unberücksichtigt.

Solange die Eigenschwingungen des Kristalls, wie es für die sog. vollkommen durchsichtigen Medien der Fall ist, weit ab vom sichtbaren Spektralbereich liegen, ist die Absorption im sichtbaren Spektrum gering und für beide Wellen im anisotropen Medium nicht wahrnehmbar verschieden. Da sowohl in das Hauptachsenazimut wie auch in das Hauptachsenverhältnis der resultierenden Welle nur das Amplitudenverhältnis der linear polarisierten Komponenten eingeht, so ist die Vernachlässigung der Absorption belanglos. Für die Reflexion würde das gleiche gelten, wenn beide Wellen hierdurch in gleicher Weise geschwächt würden. Das ist aber nicht der Fall. Das Reflexionsvermögen hängt von dem Werte des Brechungsindex ab. Daher sind nach Maßgabe der Doppelbrechung die Amplituden der beiden aus der Kristallplatte austretenden Wellen durch die zweimalige Reflexion an den Grenzflächen in verschiedener Weise geschwächt. Trotzdem führt bei schwacher Doppelbrechung, wie die Erfahrung zeigt, die geometrische Theorie der Interferenzerscheinungen und

Meßmethoden zu befriedigenden Ergebnissen. Ob das gleiche auch für stärker doppelbrechende Kristalle gilt, darüber liegen bis jetzt Untersuchungen nicht vor. Beachtet man ferner, daß im Laufe der letzten Jahrzehnte die kristalloptischen Meßmethoden im polarisierten Lichte erheblich verfeinert worden sind, so erscheint auch die Frage berechtigt, ob die Vernachlässigung der Reflexion bei der Bestimmung des Polarisationszustandes der resultierenden Welle nicht innerhalb der bei diesen Methoden erreichten Genauigkeitsgrenzen liegt. Es handelt sich um folgende orthoskopischen[1]) Meßmethoden: Bestimmung der Auslöschungsrichtungen, Messung von Gangunterschieden, Analyse elliptisch polarisierten Lichtes. Die folgende Untersuchung soll sich mit den vorstehend genannten Aufgaben befassen.

Es mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

E_0 = Amplitude in der im isotropen Medium einfallenden Welle;
R_0 = Amplitude in der an der ersten Grenzfläche ins isotrope Medium reflektierten Welle;
E_1 = Amplitude in der schnelleren ins anisotrope Medium gebrochenen Welle;
E_2 = Amplitude in der langsameren ins anisotrope Medium gebrochenen Welle;
R_1', R_1'' = Amplituden in den an der zweiten Grenzfläche reflektierten, aus E_1 entstehenden Wellen;
R_2', R_2'' = Amplituden in den an der zweiten Grenzfläche reflektierten, aus E_2 entstehenden Wellen;
G_1, G_2 = Amplituden in den an der zweiten Grenzfläche ins isotrope Medium gebrochenen, aus E_1 bzw. E_2 entstehenden Wellen.

Die Polarisationsazimute der einzelnen Wellen gegen die Einfallsebene seien mit den entsprechenden griechischen Buchstaben und die von den Wellennormalen mit der Plattennormale gebildeten Winkel mit den gleichen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wie die zugehörigen Amplituden. Die Polarisationsazimute sollen, von der Seite der positiven Fortpflanzungsrichtung der zugehörigen Wellen be-

1) „Orthoskopisch" ist hier nicht im Sinne der geometrischen Optik zu verstehen, sondern bezieht sich nach der Definition von F. Rinne auf die Interferenzerscheinungen im senkrecht einfallenden polarisierten Lichte, während „konoskopisch" für die Interferenzerscheinungen im konvergenten polarisierten Lichte gebraucht wird.

trachtet, im positiven Drehungssinne von der Einfallsebene aus gezählt werden. Der Winkel zwischen Wellennormale und Strahl in den im ansiotropen Medium fortschreitenden Wellen sei τ_ν, worin ν einen den einzelnen Wellen entsprechenden Index bedeutet.

Die Grenzbedingungen der elektromagnetischen Lichttheorie ergeben an jeder der beiden Grenzflächen für die Amplituden zusammengehöriger Wellen ein System von vier linearen homogenen Gleichungen. Wenn das anisotrope Medium in ein isotropes eingebettet ist, so sind drei solcher Systeme von Grundgleichungen aufzustellen. Diese lauten für den allgemeinen Fall schiefer Inzidenz:

$$(1a)\quad \begin{cases} E_0 \cos\varepsilon_0 \cos e_0 + R_0 \cos\varrho_0 \cos r_0 = E_1 \cos\varepsilon_1 \cos e_1 + E_2 \cos\varepsilon_2 \cos e_2 \\ E_0 \sin\varepsilon_0 \quad\quad + R_0 \sin\varrho_0 \quad\quad = E_1 \sin\varepsilon_1 \quad\quad + E_2 \sin\varepsilon_2 \\ E_0 \cos\varepsilon_0 \sin e_0 + R_0 \cos\varrho_0 \sin r_0 = E_1 \cos\varepsilon_1 \sin e_1 + E_2 \cos\varepsilon_2 \sin e_2 \\ E_0 \sin\varepsilon_0 \sin e_0 \cos e_0 + R_0 \sin\varrho_0 \sin r_0 \cos r_0 \\ \quad = E_1 \sin e_1 (\sin\varepsilon_1 \cos e_1 \pm \operatorname{tg}\tau_{e_1} \sin e_1) + E_2 \sin e_2 (\sin\varepsilon_2 \cos e_2 \\ \quad\quad \pm \operatorname{tg}\tau_{e_2} \sin e_2) \end{cases}$$

$$(1b)\quad \begin{cases} E_1 \cos\varepsilon_1 \cos e_1 + R_1' \cos\varrho_1' \cos r_1' + R_1'' \cos\varrho_1'' \cos r_1'' = G_1 \cos\gamma_1 \cos g_1 \\ E_1 \sin\varepsilon_1 \quad\quad + R_1' \sin\varrho_1' \quad\quad + R_1'' \sin\varrho_1'' \quad\quad = G_1 \sin\gamma_1 \\ E_1 \cos\varepsilon_1 \sin e_1 + R_1' \cos\varrho_1' \sin r_1' + R_1'' \cos\varrho_1'' \sin r_1'' = G_1 \cos\gamma_1 \sin g_1 \\ E_1 \sin e_1 (\sin\varepsilon_1 \cos e_1 \pm \operatorname{tg}\tau_{e_1} \sin e_1) + R_1' \sin r_1' (\sin\varrho_1' \cos r_1' \\ \quad \pm \operatorname{tg}_{r_1'} \sin r_1') + R_1'' \sin r_1'' (\sin\varrho_1'' \cos r_1'' \pm \operatorname{tg}_{r_1''} \sin r_1'') \\ \quad\quad = G_1 \sin\gamma_1 \sin g_1 \cos g_1 \end{cases}$$

$$(1c)\quad \begin{cases} E_2 \cos\varepsilon_2 \cos e_2 + R_2' \cos\varrho_2' \cos r_2' + R_2'' \cos\varrho_2'' \cos r_2'' = G_2 \cos\gamma_2 \cos g_2 \\ E_2 \sin\varepsilon_2 \quad\quad + R_2' \sin\varrho_2' \quad\quad + R_2'' \sin\varrho_2'' \quad\quad = G_2 \sin\gamma_2 \\ E_2 \cos\varepsilon_2 \sin e_2 + R_2' \cos\varrho_2' \sin r_2' + R_2'' \cos\varrho_2'' \sin r_2'' = G_2 \cos\gamma_2 \sin g_2 \\ E_2 \sin e_2 (\sin\varepsilon_2 \cos e_2 \pm \operatorname{tg}\tau_{e_2} \sin e_2) + R_2' \sin r_2' (\sin\varrho_2' \cos r_2' \\ \quad \pm \operatorname{tg}\tau_{r_2'} \sin r_2') + R_2'' \sin r_2'' (\sin\varrho_2'' \cos r_2'' \pm \operatorname{tg}\tau_{r_2''} \sin r_2'') \\ \quad\quad = G_2 \sin\gamma_2 \sin\varrho_2 \cos\varrho_2 . \end{cases}$$

Hierin gelten noch nach dem Brechungsgesetze der Wellennormalen zwischen den Einfalls-, Brechungs- und Reflexionswinkeln folgende Beziehungen:

$$r_0 = \pi - e_0; \quad r_2' = r_1'; \quad r_2'' = r_1''; \quad g_1 = e_0; \quad g_2 = e_0 .$$

Ferner ist:

$$\tau_{r_1'} = \tau_{r_1'}; \quad \tau_{r_1''} = \tau_{r_2''}.$$

Die vierte Gleichung in jedem der drei Systeme wird gewöhnlich mit Hilfe der Polarisationskonstanten des anisotropen Mediums in anderer Form geschrieben.[1]) Die hier gewählte Fassung entspricht der zuerst von F. E. Neumann[2]) benutzten. Mit Hilfe eines von P. Kaemmerer abgeleiteten Ausdruckes[3]) für den Winkel zwischen Strahl und Wellennormale lassen sich beide Formen ineinander überführen. Man kann auch ohne Benutzung dieser Beziehung von P. Kaemmerer unmittelbar aus den Grenzbedingungen zu der Neumannschen Fassung der vierten Gleichung gelangen; doch möge diese Ableitung, da sie für das Folgende unwesentlich ist, an dieser Stelle übergangen werden.

2. Reflexion und Brechung ebener Wellen an planparallelen Platten inaktiver durchsichtiger Kristalle bei senkrechter Inzidenz.

Der Fall senkrechter Inzidenz ist in den genannten Abhandlungen, die sich mit dem Probleme der Reflexion und Brechung des Lichtes in durchsichtigen anisotropen Medien befassen, nicht behandelt. Die aus den Gleichungssystemen (1) berechneten Amplituden nehmen für senkrechte Inzidenz recht verwickelt gebaute, unbestimmte Formen an. Auch die Einführung der uniradialen Azimute führt zu dem gleichen Ergebnis. Das ist darauf zurückzuführen, daß für den Einfallswinkel Null die dritten und vierten Gleichungen in den Systemen (1) ihre Bedeutung verlieren. Außerdem wird bei senkrechter Inzidenz die Lage der Einfallsebene unbestimmt.

---

1) Vgl. insbesondere W. Voigt, Kompendium d. theor. Phys., Leipzig 1896. Bd. II. p. 618ff. — P. Kaemmerer, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XX. 1905. p. 175ff. — F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Leipzig u. Berlin 1906. p. 183. — F. Schwietring, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXVI. 1908. p. 308. — F. E. Wright, Tschermaks Min. petr. Mitt. Bd. XXX. 1911. p. 183; p. 173 enthält ein ausführliches Literaturverzeichnis.

2) F. E. Neumann, Berliner Akad. Abh. 1835, Math. Abt. p. 103 bis 108. — E. Genzken, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXX. 1910. p. 390.

3) P. Kaemmerer, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XX. 1905. p. 206 u. 207.

Wir definieren daher als Bezugsebene für die Polarisationsazimute die Polarisationsebene der auf die erste Grenzfläche einfallenden Welle. Beachten wir noch, daß die Polarisationsebenen der beiden ins anisotrope Medium gebrochenen Wellen wegen der gemeinsamen Fortpflanzungsrichtung aufeinander senkrecht stehen, so gelten für das System (1a) der Grundgleichungen bei senkrechter Inzidenz folgende Nebenbedingungen:

$$e_0 = 0; \quad r_0 = \pi; \quad e_1 = 0; \quad e_2 = 0,$$

$$\varepsilon_0 = 0; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1.$$

Um bei der Ausführung dieser Substitutionen das Nullwerden der Glieder in der dritten und vierten Gleichung zu vermeiden, benutzen wir noch das Brechungsgesetz der Wellennormalen:

$$n_0 \sin e_0 = n_0 \sin r_0 = n_1 \sin e_1 = n_2 \sin e_2.$$

Das System (1a) der Grundgleichungen nimmt dann folgende Form an:

$$\text{(2a)} \qquad \begin{cases} E_0 - R_0 \cos \varrho_0 = E_1 \cos \varepsilon_1 & - E_2 \sin \varepsilon_1 \\ R_0 \sin \varrho_0 = E_1 \sin \varepsilon_1 & + E_2 \cos \varepsilon_1 \\ E_0 + R_0 \cos \varrho_0 = E_1 \frac{n_0}{n_1} \cos \varepsilon_1 & - E_2 \frac{n_0}{n_2} \sin \varepsilon_1 \\ - R_0 \sin \varrho_0 = E_1 \frac{n_0}{n_1} \sin \varepsilon_1 & + E_2 \frac{n_0}{n_2} \cos \varepsilon_1. \end{cases}$$

Entsprechend verfahren wir mit den Grundgleichungen an der zweiten Grenzfläche. Da die dort reflektierten Wellen sich hinsichtlich ihrer Normalenrichtung um π von der Normalenrichtung der Wellen E_1 und E_2 unterscheiden, so liegen ihre Polarisationsebenen parallel und senkrecht zu denen von E_1 und E_2. Wegen der entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtung müssen jedoch ihre Polarisationsazimute, von derselben Seite gemessen, im umgekehrten Drehungssinne positiv gerechnet werden wie die Polarisationsazimute der Wellen E_1 und E_2. Wir erhalten demnach an der zweiten Grenzfläche folgende Substitutionen für das System (1b):

$$e_1 = 0; \quad r_1' = \pi; \quad r_1'' = \pi; \quad g_1 = 0,$$

$$\varrho_1' = \pi - \varepsilon_1; \quad \varrho_1'' = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$$

und hierzu das Brechungsgestz

$$n_1 \sin e_1 = n_1 \sin r_1' = n_2 \sin r_1'' = n_0 \sin g_1$$

für das System (1c)

$$e_2 = 0; \quad r_2' = \pi; \quad r_2'' = \pi; \quad g_2 = 0,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1; \quad \varrho_2' = \pi - \varepsilon_1; \quad \varrho_2'' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$$

und hierzu das Brechungsgesetz

$$n_2 \sin e_2 = n_1 \sin r_2' = n_2 \sin r_2'' = n_0 \sin g_2 .$$

Die Grundgleichungen (1b) und (1c) nehmen hiermit folgende Form an:

$$(2b)\quad \begin{cases} E_1 \cos\varepsilon_1 + R_1' \cos\varepsilon_1 - R_1'' \sin\varepsilon_1 = G_1 \cos\gamma_1 \\ E_1 \sin\varepsilon_1 + R_1' \sin\varepsilon_1 + R_1'' \cos\varepsilon_1 = G_1 \sin\gamma_1 \\ E_1 \frac{n_0}{n_1} \cos\varepsilon_1 - R_1' \frac{n_0}{n_1} \cos\varepsilon_1 + R_1'' \frac{n_0}{n_2} \sin\varepsilon_1 = G_1 \cos\gamma_1 \\ E_1 \frac{n_0}{n_1} \sin\varepsilon_1 - R_1' \frac{n_0}{n_1} \sin\varepsilon_1 - R_1'' \frac{n_0}{n_2} \cos\varepsilon_1 = G_1 \sin\gamma_1 , \end{cases}$$

$$(2c)\quad \begin{cases} -E_2 \sin\varepsilon_2 + R_2' \cos\varepsilon_1 - R_2'' \sin\varepsilon_1 = G_2 \cos\gamma_2 \\ E_2 \cos\varepsilon_1 + R_2' \sin\varepsilon_1 + R_2'' \cos\varepsilon_1 = G_2 \sin\gamma_2 \\ -E_2 \frac{n_0}{n_2} \sin\varepsilon_1 - R_2' \frac{n_0}{n_1} \cos\varepsilon_1 + R_2'' \frac{n_0}{n_2} \sin\varepsilon_1 = G_2 \cos\gamma_2 \\ E_2 \frac{n_0}{n_2} \cos\varepsilon_1 - R_2' \frac{n_0}{n_1} \sin\varepsilon_1 - R_2'' \frac{n_0}{n_2} \cos\varepsilon_1 = G_2 \sin\gamma_2 . \end{cases}$$

Die drei Gleichungssysteme (2) lassen sich am bequemsten nach den 12 Unbekannten auflösen, wenn man in ihnen jedesmal die erste und dritte Gleichung sowie die zweite und vierte Gleichung einmal durch Addition und dann durch Subtraktion zusammenfaßt und auf die so erhaltenen Gleichungen elementare Sätze der Determinantentheorie anwendet. Man erhält so folgende Werte:

$$(3a)\quad \begin{cases} E_1 = \frac{2 n_1 \cos\varepsilon_1}{n_1 + n_0} E_0, \qquad E_2 = -\frac{2 n_2 \sin\varepsilon_1}{n_2 + n_0} E_0, \\ R = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{n_1 - n_0}{n_1} E_1\right)^2 + \left(\frac{n_2 - n_0}{n_2} E_2\right)^2}, \\ \operatorname{tg}\varrho_0 = -\dfrac{E_1 \frac{n_1 - n_0}{n_1} \sin\varepsilon_1 + E_2 \frac{n_2 - n_0}{n_2} \cos\varepsilon_1}{E_1 \frac{n_1 - n_0}{n_1} \cos\varepsilon_1 - E_2 \frac{n_2 - n_0}{n_2} \sin\varepsilon_1}, \end{cases}$$

$$(3b)\quad \begin{cases} R_1' = -\dfrac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} E_1, & R_1'' = 0, \\ G_1 = \dfrac{2 n_0}{n_1 + n_0} E_1, & \gamma_1 = \varepsilon_1, \end{cases}$$

$$(3c)\quad \begin{cases} R_2' = 0, & R_2'' = -\dfrac{n_2 - n_0}{n_2 - n_0} E_2, \\ G_2 = \dfrac{2 n_0}{n_2 + n_0} E_2, & \gamma_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_1. \end{cases}$$

Benutzt man schließlich noch die aus dem ersten Systeme abgeleiteten Werte für E_1 und E_2, so lassen sich alle Amplituden durch die Amplitude E_0 der im isotropen Medium einfallenden Welle und alle Polarisationsazimute durch das Azimut ε_1 der Polarisationsebene der schnelleren Welle im anisotropen Medium ausdrücken. Man erhält dann folgendes Ergebnis:

Einfallende Welle: Amplitude E_0.

Gebrochene schnellere Welle im anisotropen Medium:

Polarisationsazimut ε_1.

$$(4a)\quad E_1 = \frac{2 n_1 \cos \varepsilon_1}{n_1 + n_0} E_0.$$

Gebrochene langsamere Welle im anisotropen Medium:

$$(4b)\quad \begin{cases} \varepsilon_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_1, \\ E_2 = -\dfrac{2 n_2 \sin \varepsilon_1}{n_2 + n_0} E_0. \end{cases}$$

An der ersten Grenzfläche ins isotrope Medium *reflektierte Welle*:

$$(4c)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varrho_0{}^{1}) = \dfrac{n_0 (n_2 - n_1) \sin 2 \varepsilon_1}{(n_1 - n_0)(n_2 + n_0) \cos^2 \varepsilon_1 + (n_2 - n_0)(n_1 + n_0) \sin^2 \varepsilon_1}, \\ R_0 = -E_0 \sqrt{\left(\dfrac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \cos \varepsilon_1\right)^2 + \left(\dfrac{n_2 - n_0}{n_2 + n_0} \sin \varepsilon_1\right)^2}. \end{cases}$$

An der zweiten Grenzfläche ins anisotrope Medium *reflektierte Wellen*.

$$(4d)\quad \begin{cases} \varrho_1' = \pi - \varepsilon_1{}^{1}), & R_1' = -\dfrac{2 n_1 (n_1 - n_0) \cos \varepsilon_1}{(n_1 + n_0)^2} E_0, \\ R_1'' = 0; & R_2' = 0, \\ \varrho_2'' = \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_1{}^{1}), & R_2'' = \dfrac{2 n_2 (n_2 - n_0) \sin \varepsilon_1}{(n_2 + n_0)^2} E_0. \end{cases}$$

1) Von der Seite der positiven Fortpflanzungsrichtung der zugehörigen Welle im positiven Drehungssinne gemessen.

An der zweiten Grenzfläche ins isotrope Medium *austretende Wellen*:

$$(4e)\quad \begin{cases} \gamma_1 = \varepsilon_1, & G_1 = \dfrac{4 n_0 n_1 \cos \varepsilon_1}{(n_1 + n_0)^2} E_0, \\ \gamma_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_1; & G_2 = -\dfrac{4 n_0 n_2 \sin \varepsilon_1}{(n_2 + n_0)^2} E_0. \end{cases}$$

Nach (4c) weist die an der ersten Grenzfläche reflektierte Welle auch bei senkrechter Inzidenz im allgemeinen eine Drehung der Polarisationsebene auf (im Gegensatz zur senkrechten Reflexion an isotropen Medien). Die Drehung verschwindet nur, wenn entweder $\varepsilon_1 = 0$ oder $\pi/2$, d. h. das Polarisationsazimut der einfallenden Welle, ein unradiales ist, oder wenn $n_2 = n_1$, d. h. die Plattenebene senkrecht zu einer optischen Achse liegt. Um das Maximum des möglichen Drehungswinkels zu bestimmen, schreiben wir das Polarisationsazimut ϱ_0 in der Form

$$\operatorname{tg} \varrho_0 = \frac{2 n_0 (n_2 - n_1) \operatorname{tg} \varepsilon_1}{(n_1 - n_0)(n_2 + n_0) + (n_2 - n_0)(n_1 + n_0) \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1} = \frac{a \operatorname{tg} \varepsilon_1}{b + c \cdot \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1}.$$

Das Maximum des Drehungswinkels tritt ein für

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1{}^0 = \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{\frac{(n_1 - n_0)(n_2 + n_0)}{(n_2 - n_0)(n_1 + n_0)}}$$

und hat den Wert

$$\operatorname{tg} \varrho_0{}^0 = \frac{a}{2\sqrt{bc}} = \frac{n_0 (n_2 - n_1)}{\sqrt{(n_1^2 - n_0^2)(n_2^2 - n_0^2)}}.$$

Interessant ist noch der Fall, daß der Brechungsindex des isotropen Mediums gleich dem einen Index der beiden im anisotropen Medium fortschreitenden Wellen ist. Ist n_0 gleich dem Brechungsindex n_1 der schnelleren Welle, so wird

$$\operatorname{tg} \varrho_0 = \operatorname{cotg} \varepsilon_1; \quad \text{d. h. } \varrho_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$$

und ist n_0 gleich dem Brechungsindex n_2 der langsameren Welle, so wird

$$\operatorname{tg} \varrho_0 = -\operatorname{tg} \varepsilon_1; \quad \text{d. h. } \varrho_0 = -\varepsilon_1.$$

Da wir für die reflektierte Welle wegen der um π verschiedenen Fortpflanzungsrichtung das Polarisationsazimut ϱ_0 von derselben Seite betrachtet wie in den gebrochenen Wellen, im umgekehrten Drehungssinne positiv zählen müssen, so ergibt sich der Satz:

Ist der Brechungsindex des isotropen Mediums gleich einem der Brechungsindizes der im Kristall fortschreitenden Wellen, so ist die Polarisationsebene der an der ersten Grenzfläche reflektierten Welle bei senkrechter Inzidenz unabhängig vom Polarisationsazimut der einfallenden Welle und stimmt mit der Polarisationsebene derjenigen gebrochenen Welle überein, deren Brechungsindex von dem des isotropen Mediums verschieden ist. Die reflektierte Welle ist in diesem Falle auch bei natürlichem einfallenden Lichte vollständig und geradlinig polarisiert.

Ist außerdem das Polarisationsazimut der einfallenden Welle ein uniradiales, so hat die Amplitude der reflektierten Welle einen Extremwert, und zwar ein Maximum vom Betrage

$$R_0 = \frac{n' - n_0}{n' + n_0} E_0 ,$$

wenn die Polarisationsebene der einfallenden Welle mit derjenigen der gebrochenen Wellen übereinstimmt, deren Brechungsindex n' von dem des isotropen Mediums verschieden ist, und ein Minimum vom Betrage

$$R_0 = 0 .$$

wenn die Polarisationsebene der einfallenden Welle mit derjenigen der gebrochenen Wellen übereinstimmt, deren Brechungsindex gleich dem des isotropen Mediums ist. In letzterem Falle findet also an der ersten Grenzfläche keine Reflexion statt, und dasselbe gilt auch für die zweite Grenzfläche. Im allgemeinen entstehen nach (4d) bei senkrechter Inzidenz an der zweiten Grenzfläche nur diejenigen beiden reflektierten Wellen, die mit den erzeugenden gemeinsame Polarisationsebene haben: die schnellere Welle erzeugt nur eine schnellere, die langsamere nur eine langsamere reflektierte Welle.

Nach (4e) haben auch die aus der Kristallplatte austretenden Wellen dieselben Polarisationsebenen wie die im anisotropen Medium fortschreitenden Wellen, sind also, im Gegensatz zu schiefer Inzidenz, ebenfalls senkrecht zueinander polarisiert. Für den Fall, daß die einfallende Welle einen eindeutig definierten Polarisationszustand besitzt, setzen sich die austretenden linear polarisierten Wellen zu einer im allgemeinen elliptisch polarisierten Resultierenden zusammen, deren Hauptachsenverhältnis und Hauptachsenazimut von dem Amplitudenverhältnis beider Wellen und ihrem Gang-

unterschiede abhängt. Ihre Wellengleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = G_1 \cos 2\pi \frac{t}{T}, \\ y = G_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Gamma}{\lambda} \right), \end{cases}$$

worin G_1 und G_2 die Amplituden nach den Gleichungen (4e) und Γ den Gangunterschied der beiden Wellen an der zweiten Grenzfläche bedeuten. Für die kristalloptischen Meßmethoden sind zwei besondere Lagen der Kristallplatte von besonderer Wichtigkeit: die sog. Normallage und die Diagonallage.

3. Normallage.

In der Normallage der Kristallplatte $\varepsilon_1 = 0$ oder $\pi/2$ ist nach (4b) das Polarisationsazimut der senkrecht einfallenden Welle ein uniradiales; demgemäß hat auch nur eine der beiden austretenden Wellen eine von Null verschiedene Amplitude. Zu dem gleichen Ergebnisse führt die geometrische Zerlegung der Amplitude der einfallenden Welle.

4. Geometrische und elektromagnetische Diagonallage.

Die Diagonallage der Kristallplatte ist in der üblichen Theorie der Interferenzerscheinungen dadurch definiert, daß das Polarisationsazimut der einfallenden Welle in bezug auf die Polarisationsebene der schnelleren Welle im Kristall $\pm \pi/4$ ist. Wir wollen diese Lage der anisotropen Platte ihre „geometrische" Diagonallage nennen. Die geometrische Zerlegung der Amplitude der einfallenden Welle liefert in diesem Falle für die Amplituden beider austretenden Wellen denselben absoluten Betrag $\frac{1}{2}\sqrt{2}\, E_0$. Demgemäß halbieren die Hauptachsen der resultierenden elliptischen Schwingung die Winkel zwischen der x- und y-Achse, d. h. sie liegen parallel und senkrecht zur Polarisationsebene der einfallenden Welle. Nach der elektromagnetischen Theorie gilt dieser Satz nicht; denn die Gleichungen (4e) zeigen, daß für die geometrische Diagonallage die absoluten Werte der Amplituden nicht gleich werden. Diejenige Lage ε_1 der Kristallplatte, für welche nach der elektromagnetischen Theorie die Halbachsen der resultierenden Schwingung die Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen

in der Kristallplatte halbieren, soll ihre *„elektromagnetische" Diagonallage* genannt werden. Aus der Bedingung

$$|G_1| = |G_2|$$

ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (4e) für das gesuchte Azimut $\bar{\varepsilon}_1$:

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1 = \frac{n_1}{n_2} \left\{ \frac{n_2 + n_0}{n_1 + n_0} \right\}^2 .$$

Setzt man

$$\text{(7)} \qquad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{\pi}{4} + \delta ,$$

so bedeutet δ *die Winkeldifferenz zwischen elektromagnetischer und geometrischer Diagonallage.* Wenn sich die Kristallplatte in der elektromagnetischen Diagonallage befindet, gibt δ das Hauptachsenazimut der resultierenden Welle in bezug auf die Polarisationsebene der einfallenden Welle. Aus (6) und (7) ergibt sich:

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{n_1}{n_2}\left\{\frac{n_2 + n_0}{n_1 + n_0}\right\}^2 - 1}{\frac{n_1}{n_2}\left\{\frac{n_2 + n_0}{n_1 + n_0}\right\}^2 + 1} = \frac{n_1 (n_2 + n_0)^2 - n_2 (n_1 + n_0)^2}{n_1 (n_2 + n_0)^2 + n_2 (n_1 + n_0)^2} .$$

Die elektromagnetische Diagonallage weicht demnach im allgemeinen um so mehr von der geometrischen ab, je größer die Doppelbrechung des anisotropen Mediums ist. Ist das umhüllende Medium Luft, so wird δ stets positiv. In der elektromagnetischen Diagonallage bildet dann die Polarisationsebene der einfallenden Welle mit der Polarisationsebene der schnelleren Welle im Kristall einen größeren Winkel als mit der Polarisationsebene der langsameren Welle. In der folgenden Tabelle ist in der dritten Zahlenspalte die Winkeldifferenz δ für eine Reihe in Luft eingebetteter Kristalle für Na-Licht in Richtung ihrer maximalen Doppelbrechung berechnet.

Mit wachsender Doppelbrechung erreicht δ und somit auch das Azimut $\bar{\varepsilon}_1$, bei welchem die Hauptachsen der resultierenden Schwingungsellipse die Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen in der Kristallplatte halbieren, eine recht erhebliche Differenz gegen die geometrische Diagonallage. Es sei darauf hingewiesen, daß diese Differenz unabhängig von einer merklich verschiedenen Absorption der beiden im Kristall

	n_1	$(n_2 - n_1)$ max.	Winkeldifferenz δ für eine Platte		
			in Luft	in Kanadabalsam	einseitig aufgekittet
Eis	1,3083	0,0050	0,9′	—	—
Sanidin	1,5206	0,0047	1,1	0′	0,6′
Beryll (wasserhell)	1,5690	0,0050	1,2	+0,1	0,7
Gips	1,5205	0,0091	2,1	−0,1	1,0
Quarz[1])	1,5442	0,0091	2,2	+0,1	1,2
Schwerspat	1,6363	0,0117	2,9	0,4	1,7
Colemannit	1,5863	0,0277	6,9	0,7	3,8
Muscovit	1,5619	0,0388	10	0,6	5,0
Anhydrit	1,5696	0,0440	11	0,9	5,9
Anatas	2,4886	0,0732	22	12,1	17
Aragonit	1,5300	0,1557	39	3,7	21
Kalkspat	1,4864	0,1720	42	2,0	22
Salpeter	1,3361	0,2513	55	−8,0	23
Cerussit	1,8037	0,2743	1° 17	+28	53
Rutil	2,6158	0,2871	1° 24	55	1° 7
Kalomel	1,9733	0,6826	3° 20	1° 40	2° 30

fortschreitenden Wellen auftritt. Sie ist lediglich eine Folge der Doppelbrechung.

Das Hauptachsenazimut φ einer aus den Amplituden G_1 und G_2 mit dem Gangunterschied Γ resultierenden elliptisch polarisierten Welle, bezogen auf die Polarisationsebene der schnelleren Welle in der Kristallplatte und im positiven Drehungssinne gemessen, wird durch die bekannte Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 G_1 G_2 \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}{G_1^2 - G_2^2} . \tag{9}$$

Bezeichnet ψ das Hauptachsenazimut, im positiven Drehungssinne gemessen, in bezug auf die Polarisationsebene der einfallenden Welle, so gilt

$$\varphi = \psi - \varepsilon_1 . \tag{10}$$

Mittels der Amplitudenwerte aus (4e) erhält man dann aus (9) und (10) die allgemein gültige Gleichung

$$\operatorname{tg} 2(\varepsilon_1 - \psi) = \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{cotg} \bar{\varepsilon}_1 \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}{1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 \operatorname{cotg}^2 \bar{\varepsilon}_1} . \tag{11}$$

Die Funktionen der Brechungsindizes sind hierin gemäß der Gleichung (6) durch das Azimut $\bar{\varepsilon}_1$ der elektromagnetischen

1) Platte parallel zur optischen Achse.

Diagonallage ausgedrückt. Während nach der geometrischen Theorie in der geometrischen Diagonallage die Hauptachse der resultierenden elliptischen Schwingung stets parallel und senkrecht zur Polarisationsebene der einfallenden Welle liegen, ergibt die elektromagnetische Theorie für

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\pi}{4}$$

gemäß (11) für das Hauptachsenazimut ψ die Bestimmungsgleichung

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tg} 2\left(\frac{\pi}{4} - \psi\right) = -\operatorname{tg} 2\bar{\varepsilon}_1 \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}.$$

ψ hängt also auch in der geometrischen Diagonallage vom Gangunterschiede und von der Doppelbrechung ab. Wenn $\Gamma = n\lambda$ ist, erhält man

$$\text{(12a)} \qquad \psi_{n\lambda} = \bar{\varepsilon}_1 - \frac{\pi}{4} = +\delta.$$

Wenn $\Gamma = \frac{2n+1}{2}\lambda$ ist, erhält man

$$\text{(12b)} \qquad \psi_{\frac{2n+1}{2}\lambda} = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Für Wellenlängen- und Halbwellenlängenplatten in der geometrischen Diagonallage ist das Azimut ψ der resultierenden geradlinig polarisierten Welle in bezug auf die Polarisationsebene der einfallenden Welle gleich der Winkeldifferenz δ zwischen elektromagnetischer und geometrischer Diagonallage bzw. gleich ihrem Komplement. Die Winkeldifferenzen δ erreichen, wie aus der Tabelle hervorgeht, mit wachsender Doppelbrechung Beträge, die sich experimentell leicht feststellen lassen müßten.

Es besteht die Möglichkeit, die elektromagnetische Diagonallage in der Weise zu definieren, daß man fordert, die Hauptachsen der resultierenden elliptisch polarisierten Welle sollen parallel und senkrecht zur Polarisationsebene der einfallenden Welle liegen. Setzt man demgemäß in Gleichung (11) das Hauptachsenazimut $\psi = 0$, so erhält man für die so definierte Diagonallage $\bar{\varepsilon}_1$ nach einigen Umformungen die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1 \left\{ \operatorname{tg}^2 \bar{\varepsilon}_1 - \frac{\cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} - \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1}{\cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} - \operatorname{cotg} \bar{\varepsilon}_1} \right\} = 0.$$

Abgesehen vom Vorzeichen gibt es demnach im allgemeinen zwei Lagen der Kristallplatte, in denen die Hauptachsen der resultierenden Schwingung parallel und senkrecht zur Polarisationsebene der einfallenden Wellen liegen. Die eine Lage ist $\bar{\varepsilon}_1 = 0$, die Normallage. Sie scheidet naturgemäß für die Definition der Diagonallage aus. Die zweite Lage ist gegeben durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1 = \sqrt{\frac{\cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} - \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1}{\cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} - \operatorname{cotg} \bar{\varepsilon}_1}}.$$

Für verschiedene Gangunterschiede ergeben sich hiernach folgende Winkelwerte:

$$\Gamma = n\lambda, \qquad \frac{2n+1}{4}\lambda, \qquad \frac{2n+1}{2}\lambda,$$

$$\operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1 = \sqrt{-\operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1}, \qquad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_1, \qquad \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1 = \sqrt{\operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1},$$

Für Wellenlängenplatten wird somit die zweite Wurzel imaginär. Das gleiche gilt für alle Gangunterschiede, für welche die Beziehung besteht

$$1 \gtreqless \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} \gtreqless \operatorname{cotg} \bar{\varepsilon}_1.$$

Es erscheint daher zweckmäßig, an der ersten Definition der elektromagnetischen Diagonallage festzuhalten.

5. Einfluß der Lichtbrechung des umhüllenden isotropen Mediums.

Der Beziehung (8) zufolge hängt die Winkeldifferenz δ auch von dem Brechungsindex des umhüllenden isotropen Mediums ab. Es gibt immer einen Werte $\bar{n}_0$ der Lichtbrechung, für den elektromagnetische und geometrische Diagonallage zusammenfallen und somit die übliche Theorie streng richtig bleibt. Setzt man die rechte Seite von (8) gleich Null, so ergibt die Auflösung nach n_0

$$\bar{n}_0 = \frac{n_2\sqrt{n_1} - n_1\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}}. \tag{13}$$

Ist die Lichtbrechung des umhüllenden Mediums kleiner als dieser besondere Wert $\bar{n}_0$, so wird δ stets positiv, d. h. in der elektromagnetischen Diagonallage bildet die Polarisations-

ebene der einfallenden Welle mit der Polarisationsebene der schnelleren Welle im Kristall einen größeren Winkel als mit der der langsameren Welle. Ist hingegen die Lichtbrechung des umhüllenden Mediums größer als $\bar{n}_0$, so wird δ negativ; in der elektromagnetischen Diagonallage bildet dann die Polarisationsebene der einfallenden Welle mit der Polarisationsebene der schnelleren Welle im Kristall einen kleineren Winkel als mit der der langsameren Welle.

Die Kristallplatten oder Gesteinsdünnschliffe sind in der Regel zwischen einen Objektträger und ein Deckglas eingekittet. Das umhüllende Medium ist dann gewöhnlich Kanadabalsam, dessen n_0 ca. 1,537 ist. Für diesen Fall ergeben sich in Richtung der maximalen Doppelbrechung die in der vierten Zahlenspalte der Tabelle eingetragenen Werte δ für Na-Licht. Die Winkeldifferenzen für eingekittete Kristalle sind sämtlich kleiner als für Platten in Luft. Für eine in Kanadabalsam eingekittete Sanidinplatte ist die Bedingung (13) sehr nahezu erfüllt.

Sehr häufig werden die Kristallplatten einseitig auf einen Objektträger gekittet benutzt. Die begrenzenden isotropen Medien sind dann auf der einen Seite Kanadabalsam mit dem Brechungsindex n_0, auf der anderen Seite Luft mit dem Brechungsindex Eins. Ist der Objektträger der einfallenden Welle zugewandt, so werden die Amplituden der austretenden Komponenten nach (8b) und (8c)

$$G_1 = \frac{2}{n_1 + 1} E_1, \qquad G_2 = \frac{2}{n_2 + 1} E_2.$$

Setzt man für E_1 und E_2 ihre Werte aus (8a) ein, so erhält man

$$G_1 = \frac{4 n_1 \cos \varepsilon_1}{(n_1 + n_0)(n_1 + 1)} E_0, \qquad |G_2| = \frac{4 n_2 \sin \varepsilon_1}{(n_2 + n_0)(n_2 + 1)} E_0.$$

Die Bestimmungsgleichung für den Winkel $\bar{\varepsilon}_1$ wird dann

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1 = \frac{n_1 (n_2 + 1)(n_2 + n_0)}{n_2 (n_1 + 1)(n_1 + n_0)}.$$

Ist die freie Kristallfläche der einfallenden Welle zugewandt, so erhält man analog

$$G_1 = \frac{4 n_0 n_1 \cos \varepsilon_1}{(n_1 + n_0)(n_1 + 1)} E_0, \qquad |G_2| = \frac{4 n_0 n_2 \sin \varepsilon_1}{(n_2 + n_0)(n_2 + 1)} E_0.$$

Hieraus folgt für $\bar{\varepsilon}_1$ wieder dieselbe Bestimmungsgleichung (14). Die sich hiernach ergebenden Winkeldifferenzen δ sind in der letzten Spalte der Tabelle p. 176 mitgeteilt.

16. Sekundäre Dispersion der Polarisationsebenen beim senkrechten Durchgang des Lichtes durch planparallele Platten einachsiger inaktiver durchsichtiger Kristalle.

Aus der Gleichung (8) ist ersichtlich, daß die Dispersion der Doppelbrechung eine Dispersion der Winkeldifferenz δ zur Folge hat. Diese Dispersion ist für optisch einachsige Kristalle von besonderem Interesse. In diesen hat die Strahlenfläche eine von der Wellenlänge des Lichtes unabhängige Lage, und somit ist eine Dispersion der Polarisationsebenen innerhalb des Kristalls nicht vorhanden. Deshalb bleibt auch die geometrische Diagonallage für alle Lichtarten dieselbe. Da nach der geometrischen Theorie der Interferenzerscheinungen $G_1 = E_0 \cos \varepsilon_1$ und $G_2 = -E_0 \sin \varepsilon_1$ gesetzt wird, so ergibt sich das für Hauptachsenazimut ψ der resultierenden Welle die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg} 2(\varepsilon_1 - \psi) = \operatorname{tg} 2\varepsilon_1 \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} .$$

ε_1 ist bei einachsigen Kristallen für alle Lichtarten konstant. Bei beliebigem Azimut ε_1 liegen demnach die Hauptachsen der resultierenden Schwingungsellipsen für sämtliche Lichtarten, für welche die Gangunterschiede gleiche Bruchteile des zugehörigen λ betragen, einander parallel. Insonderheit liegen die Polarisationsebenen der geradlinig polarisierten Wellen, die sich für $\Gamma = n\lambda$ ergeben, sämtlich im Azimut

$$\operatorname{tg} 2(\varepsilon_1 - \psi) = \operatorname{tg} 2\varepsilon_1 , \quad \text{d. h. } \psi = 0 ,$$

und die Polarisationsebenen der geradlinig polarisierten Wellen, die sich für

$$\Gamma = \frac{2n+1}{2} \lambda$$

ergeben, liegen sämtlich im Azimut

$$\operatorname{tg} 2(\varepsilon_1 - \psi) = -\operatorname{tg} 2\varepsilon_1 , \quad \text{d. h. } \psi = 2\varepsilon_1 .$$

Ist $\varepsilon_1 = \pi/4$, so liegen die Halbachsen für alle Lichtarten und Gangunterschiede einander parallel.

Nach der elektromagnetischen Theorie hingegen tritt gemäß Gleichung (12) bei einachsigen Kristallen auch für diejenigen Lichtarten, für welche die Gangunterschiede gleiche Bruchteile von λ betragen, eine Dispersion der Halbachsen in den resultierenden Schwingungsellipsen auf. *Insonderheit sind auch die Polarisationsebenen der resultierenden geradlinig*

polarisierten Wellen beim senkrechten Durchgang des Lichtes durch Platten inaktiver einachsiger Kristalle im allgemeinen dispergiert. Diese „sekundäre" Dispersion verschwindet in der Normallage der Kristallplatte. In der geometrischen Diagonallage ist sie für Lichtarten, für welche die Kristallplatte eine Wellenlängenplatte ist, oder für Lichtarten, für welche die Kristallplatte eine Halbwellenlängenplatte ist, gleich der Dispersion des Winkels δ. Für verschiedene in Luft eingebettete einachsige Kristalle erhält man in Richtung größter Doppelbrechung die in der dritten Zahlenspalte der folgenden Tabelle eingetragenen Werte.[1]) Man erkennt, die Dispersion von δ wächst mit der Dispersion der Doppelbrechung. Berechnet man aber in der geometrischen Diagonallage die Dispersion der Polarisationsebenen zwischen zwei Lichtarten, für deren eine λ_1 die Kristallplatte eine Wellenlängenplatte und für deren andere λ_2 die Kristallplatte eine Halbwellenlängenplatte ist, so sind nach (12a u. b) die Azimute

$$\psi_{\lambda_1} = \delta_{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \psi_{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} - \delta_{\lambda_2}$$

und somit

$$\psi_{\lambda_2} - \psi_{\lambda_1} = \frac{\pi}{2} - (\delta_{\lambda_1} + \delta_{\lambda_2}),$$

während nach der geometrischen Theorie

$$\psi_{\lambda_2} - \psi_{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}$$

sein müßte. Der Winkel $\delta_{\lambda_1} + \delta_{\lambda_2}$ ist in der letzten Spalte der Tabelle eingetragen. Er erreicht Beträge, die sich mit Hilfe unserer heutigen Meßmethoden leicht feststellen lassen dürften.[2]) Durch Einbettung der Kristallplatte in ein Medium höherer Lichtbrechung wird die sekundäre Dispersion verringert.

---

1) Die für die Berechnung erforderlichen Brechungsindizes sind entnommen dem Tabellenwerke Landolt-Börnstein, Physikal.-chem. Tabellen, 4. Aufl. Berlin 1912. p. 972, 973 und 984—988.

2) Vgl. den erreichten Genauigkeitsgrad in den Messungen der Auslöschungsrichtungen und geringer Dispersion der Polarisationsrichtungen bei M. Berek, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXXIII. 1912. p. 583 bis 661; Zentralbl. f. Min. usw. 1912. p. 739—745. — K. Petrow, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXXVII. 1913. p. 457—494.

	Lichtart	Dispersion der Doppelbrechung	Dispersion von δ	$\delta_{\lambda_1} + \delta_{\lambda_2}$
Beryll (wasserhell) . . .	480—670 $\mu\mu$	0,0002	0,1′	2,3′
Phenakit	480—670 $\mu\mu$	0,0002	0,2′	8,2′
Apatit	G—D	0,0005	0,2′	2,3′
Quarz	400—800 $\mu\mu$	0,0007	0,2′	4,4′
Salpeter	E—B	0,0133	3,4′	1° 50
Anatas	Tl—Li	0,0144	4,2′	43
Kalkspat	400—800 $\mu\mu$	0,0191	5,5′	1° 26
Rutil	Tl—Li	0,0348	9,5′	2° 50
Kalomel	Tl—Li	0,0770	22,7′	6° 39

7. Dispersion von δ bei zweiachsigen Kristallen.

Da in optisch zweiachsigen Kristallen im allgemeinen schon die Polarisationsebenen der im Kristall fortschreitenden Wellen dispergiert sind, bleibt die geometrische Diagonallage allgemein nicht mehr für alle Lichtarten dieselbe. An anderer Stelle[1]) ist gezeigt worden, daß auch in rhombischen Kristallen im allgemeinen eine Dispersion der Polarisationsrichtungen im Kristall auftritt, trotzdem in ihnen die optischen Symmetrieachsen für alle Lichtarten mit den kristallographischen Achsen zusammenfallen. Die Dispersion der Polarisationsrichtungen in rhombischen Kristallen verschwindet nur auf den Flächen, die einer der Zonen der drei kristallographischen Achsen angehören, in monoklinen Kristallen nur für die Flächen aus der Zone der zur kristallographischen Symmetrieebene senkrechten Achse. In diesen Fällen bleibt somit die geometrische Diagonallage für alle Lichtarten dieselbe, und die im vorigen Abschnitte abgeleiteten Sätze über die sekundäre Dispersion lassen sich dann auch auf Platten zweiachsiger Kristalle übertragen. In allen anderen Fällen dagegen ist die resultierende Dispersion eine Folge der Dispersion der Polarisationsebenen im Kristall und der sekundären Dispersion. Diese beiden Einflüsse können je nach ihrem Richtungssinne einander verstärken oder entgegenwirken. Im folgenden soll nur ein praktisch wichtiger Fall näher behandelt werden.

Erzeugung zirkular-polarisierten Lichtes mit Hilfe eines Viertel-Undulationsglimmerblättchens. — Die ausgezeichneten natürlichen Spaltflächen des Glimmers gehören der Zone der

1) M. Berek, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXXV. 1912. p. 237.

zur kristallographischen Symmetrieebene senkrechten Achse an. Deshalb fallen in einem solchen Spaltungsblättchen die Polarisationsrichtungen bei senkrechtem Lichteinfall für alle Lichtarten zusammen, und demgemäß ist auch die geometrische Diagonallage für alle Lichtarten dieselbe. Da die 2. Mittellinie mit der Normalen eines Spaltungsblättchens nahezu zusammenfällt, so kommen bei senkrechter Inzidenz für die Doppelbrechung der größte und der mittlere Hauptbrechungsindex in Frage. Nach den Messungen von C. Pulfrich[1]) sind die Hauptbrechungsindizes für Muskovit:

	α	β	γ	Dispersion $\gamma-\beta$
Tl	1,5635	1,5967	1,6005	0,0038
Na	1,5601	1,5936	1,5977	0,0041
Li	1,5566	1,5899	1,5943	0,0044

Hieraus ergibt sich für die Winkeldifferenz δ eines in Luft befindlichen Spaltungsblättchens:

	δ	Dispersion von δ
Tl	1,0′	
Na	1,0′	$-0{,}1'$
Li	1,1′	

Die Winkeldifferenz δ ist sehr klein und ihre Dispersion fast verschwindend. Letztere ist übrigens negativ. Dies hat seinen Grund darin, daß für Glimmer die Dispersion der Doppelbrechung mit abnehmender Wellenlänge kleiner wird.[2]) Das Achsenverhältnis einer elliptischen Schwingung läßt sich allgemein darstellen durch den Ausdruck

$$\text{(15)} \qquad \mathfrak{A} = \sqrt{\frac{\frac{\sin^2\varphi}{G_1^2} + \frac{\cos^2\varphi}{G_2^2} + \frac{\sin 2\varphi}{G_1 G_2}\cos 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}}{\frac{\cos^2\varphi}{G_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{G_2^2} - \frac{\sin 2\varphi}{G_1 G_2}\cos 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}}}.$$

Da nach Gleichung (9) für ein Viertelwellenlängenblättchen $\varphi = 0$ wird, so nimmt (15) die einfache Form an

$$\mathfrak{A} = \left|\frac{G_1}{G_2}\right|.$$

---

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. **30**. p. 496. 1887.

2) Dieser auch bei einer Reihe anderer zweiachsiger Kristalle auftretende Dispersionscharakter läßt darauf schließen, daß die betreffenden Kristalle für eine im Ultraviolett gelegene Wellenlänge einachsig werden. Für Cerussit tritt die Einachsigkeit bereits im sichtbaren Violett auf.

Für die geometrische Diagonallage erhält man hieraus mit Hilfe der Gleichungen (4e) und (6):

$$\mathfrak{A} = \operatorname{tg} \varepsilon_1 .$$

Das Achsenverhältnis der in der geometrischen Diagonallage für ein Viertelwellenlängenblättchen resultierenden Schwingungsellipse ist gleich der Tangente der elektromagnetischen Diagonallage. Für Muscovit wird dieses Achsenverhältnis:

im	Tl-Licht:	$\mathfrak{A} = 1{,}00055$
	Na	1,00060
	Li	1,00065

Da das Glimmerblättchen wegen seiner geringen Stärke wenigstens einseitig aufgekittet ist, so nähert sich $\operatorname{tg} \varepsilon_1$ in Wirklichkeit noch mehr dem Werte Eins. Der Einfluß der Winkeldifferenz zwischen geometrischer und elektromagnetischer Diagonallage ist somit bei der Erzeugung zirkular polarisierten Lichtes mit Hilfe eines Spaltungsblättchens von Glimmer ganz zu vernachlässigen.

Die orthoskopischen Meßmethoden.

8. Bestimmung der Auslöschungsrichtungen.

Die Bestimmung der Polarisationsrichtungen in einer doppeltbrechenden Kristallplatte erfolgt im einfachsten Falle bekanntlich durch Drehung der Platte zwischen gekreuzten Polarisationsprismen bis zur Lage ihrer maximalen Verdunkelung. In der Auslöschungsstellung befindet sich die Kristallplatte in ihrer Normallage. Somit kann bei diesem Meßverfahren eine sekundäre Beeinflussung durch die Doppelbrechung nicht in Frage kommen, solange die Polarisationsprismen genau gekreuzt sind. Weicht die Stellung der Prismen von dieser Lage um den Betrag $d\sigma$ ab, so fällt das Azimut maximaler Verdunkelung nicht mehr mit der Normallage der Kristallplatte ($\varepsilon_1 = 0$) in bezug auf den Polarisator zusammen. Die maximale Dunkelheit tritt dann ein, wenn die große Achse der resultierenden Schwingungsellipse senkrecht zur Polarisationsebene des Analysators liegt, d. h. wenn das Hauptachsenazimut ψ in bezug auf den Polarisator gleich dem Winkel $d\sigma$ ist. Solange die Winkel ε_1 und $\psi = d\sigma$ klein sind,

ergibt sich aus Gleichung (11) die Näherungsformel[1])

$$\varepsilon_1 = \frac{d\sigma}{1 - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}} \cdot \tag{16}$$

Diese Beziehung gilt nach Voraussetzung nur für kleine Winkel ε_1 und $d\sigma$, d. h. nur für Platten, deren Gangunterschied sich wesentlich von einem ganzen Vielfachen einer Wellenlänge unterscheidet. Für die Messung kommen ohnehin nur Halbwellenlängenplatten in Frage, weil für sie die Empfindlichkeit der Einstellung auf Auslöschung am größten ist.[2]) Die nach Gleichung (16) auftretende scheinbare Dispersion der Polarisationsrichtungen ist äußerst gering. Selbst bei den sehr stark doppeltbrechenden und stark dispergierenden Kristallen von Kalomel ergeben sich für eine in Luft befindliche Platte, die für die nachstehend genannten Lichtarten Gangunterschiede von einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge aufweist, und für den Wert $d\sigma = 1^0$ folgende Azimute:

	ε_1	
Tl	31,8′	scheinbare Dispersion der Auslöschungsrichtung: 0,2′.
Na	31,7′	
Li	31,6′	

Die sekundäre Dispersion nimmt für alle bekannten anisotropen Medien bei der Bestimmung der Auslöschungsrichtungen nachweisbare Beträge nicht an. Bei schwacher Doppelbrechung nähert sich δ dem Werte Null; dann gilt unter Beschränkung der Messungen auf Halbwellenlängenplatten statt (16) die einfachere Beziehung:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\sigma}{2} \cdot \tag{17}$$

Diese schon früher aus der geometrischen Theorie der Interferenzerscheinungen bekannte Gleichung stellt also einen Grenzfall für Kristallplatten von schwacher Doppelbrechung dar.

Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit werden bei der Bestimmung der Auslöschungsrichtungen und ihrer Dispersion Halbschattenvorrichtungen benutzt. Nach der üblichen Theorie der Interferenzerscheinungen und auch durch Messungen ist

1) Diese Beziehung erhält man aus (11), indem man für tg den Bogen setzt, $\operatorname{tg}^2\varepsilon_1 \operatorname{cotg}^2\varepsilon_1$ neben Eins vernachlässigt und dann die Gleichung nach ε_1 auflöst.

2) S. Nakamura, Zentralbl. f. Min. usw. 9. 1905. p. 269.

nachgewiesen worden[1]), daß denjenigen Methoden, die zur Erzeugung der Halbschattenwirkung das optische Drehungsvermögen des Quarzes verwenden, der Vorzug zu geben ist vor den Methoden, welche die gewöhnliche Doppelbrechung anisotroper Platten zur Erzeugung der Halbschattenwirkung benutzen. Dieses Urteil erhält durch die vorliegenden Untersuchungen eine weitere Begründung: die zirkulare Doppelbrechung im Quarz in Richtung der optischen Achse ist gegenüber der gewöhnlichen Doppelbrechung anisotroper Kristalle so außerordentlich gering, daß für Quarzhalbschattenvorrichtungen die hier beschriebenen Einwirkungen der Doppelbrechung auf Polarisationsazimut und Dispersion der resultierenden Welle nachweisbare Beträge nicht annehmen können.

9. Messung von Gangunterschieden.

Die Messung von Gangunterschieden und die hierauf beruhende Berechnung der Doppelbrechung benutzt die Diagonallage der Kristalle in Verbindung mit einem in der Subtraktionslage dazu angeordneten Kompensator. Die geometrische Theorie der Interferenzerscheinungen ergibt, daß dann der Gangunterschied in der Kristallplatte gleich dem die Kompensation bewirkenden Gangunterschied des Kompensators ist. Für den Fall, daß die Subtraktionslage nicht genau eingehalten ist, haben R. Hennig[2]) und später mittels der geometrischen Darstellung nach H. Poincaré auch H. Joachim[3]) folgenden Satz abgeleitet: Bedeuten Γ den zu messenden Gangunterschied, ξ den Fehler in der Subtraktionslage von Kristallplatte und Kompensator, $\operatorname{tang}\varphi$ das Amplitudenverhältnis der aus der Kristallplatte austretenden Wellen, so wird die Kompensation durch einen Gangunterschied Γ' bewirkt, der durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\operatorname{cotg} 2\pi\frac{\Gamma'}{\lambda} = \operatorname{cotg} 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda} - 2\xi\frac{\operatorname{cotg} 2\varphi}{\sin 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}}.$$

---

1) M. Berek, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXXIII. p. 583—633. 1912.

2) R. Hennig, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen. p. 373. 1887.

3) H. Joachim, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XXI. p. 582 u. 583. 1906.

Zu einer übersichtlicheren Beziehung haben die Untersuchungen des Verfassers[1]) über die Genauigkeitsgrenzen bei der Messung von Gangunterschieden geführt.

Bedeuten Γ den zu bestimmenden Gangunterschied, $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ die als klein vorausgesetzten Abweichungen der Kristallplatte bzw. des Kompensators von der geometrischen Diagonallage, so ist der Fehler $d\Gamma$ bei der Messung des Gangunterschiedes durch die Beziehung gegeben:

$$(18)\quad d\Gamma = \frac{\lambda}{\pi}\sin 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}(d\varphi_2 - d\varphi_1)\left\{2\,d\varphi_1 + (d\varphi_2 - d\varphi_1)\cos 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}\right\}.$$

Hiernach wird auch bei fehlerhafter Orientierung der Kristallplatte und des Kompensators der Gangunterschied Γ fehlerfrei gemessen

1. in den Lichtarten, für die Γ ein ganzes (gerades oder ungerades) Vielfaches einer halben Wellenlänge ist, unabhängig von den Fehlern $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$;

2. wenn die Fehler $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ gleichgroß und gleichsinnig sind, unabhängig von Γ, d. h. für alle Lichtarten, wenn Kristallplatte und Kompensator sich genau in der Subtraktionslage befinden, wobei das Azimut im übrigen von der Diagonallage abweichen kann;

3. wenn zwischen dem Gangunterschied und den Orientierungsfehlern die Beziehung besteht

$$\cos 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda} = \frac{2\,d\varphi_1}{d\varphi_1 - d\varphi_2}.$$

Der Orientierungsfehler des Analysators beeinflußt die Lage des Kompensationstreifens unmittelbar nicht, ist aber insofern von Bedeutung, als er die Auslöschungslage der Kristallplatte ändert und damit auch in die Ermittlung der Diagonallage einen Fehler einführt.

Wir gehen nun dazu über, zu untersuchen, wie sich die Messung von Gangunterschieden nach der elektromagnetischen Theorie gestaltet. Im allgemeinen Falle ist die Gleichung der aus dem Kompensator austretenden Welle

$$(19)\quad \begin{cases} x = G_1' \cos 2\pi\frac{t}{T} + G_2' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Gamma}{\lambda}\right), \\ y = G_1'' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Gamma + d\Gamma}{\lambda}\right) + G_2'' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2\Gamma + d\Gamma}{\lambda}\right). \end{cases}$$

1) M. Berek, Zentralbl. f. Min. usw. p. 464—470. 1913.

Die Komponente x liegt parallel zur Polarisationsebene der schnelleren Welle im Kompensator. Die vier in der Wellengleichung vorkommenden Amplituden lassen sich durch zweimalige Anwendung der Beziehungen (4e) aus der Amplitude E_0 der einfallenden Welle und den Brechungsindizes der Kristallplatte, des Kompensators und der umhüllenden Medien ableiten. Wir beschränken uns auf den Fall, daß sich Kristallplatte und Kompensator genau in der Subtraktionslage befinden, wobei jedoch das Azimut selbst noch beliebig bleiben soll. Beziehen sich die eingestrichenen Buchstaben auf die Kristallplatte, die zweimal gestrichenen auf den Kompensator, so ist für die Subtraktionslage

$$\varepsilon_1'' - \varepsilon_1' = \frac{\pi}{2} . \tag{20}$$

Deshalb werden die Amplituden G_1' und G_2'' in (19) Null. Verschiebt man noch den Nullpunkt der Zeitrechnung um $\frac{\Gamma T}{\lambda}$, so erhält man nach Berechnung der Amplituden G_2' und G_1'' die Wellengleichung

$$\begin{cases} x = -E_0 \frac{16\, n_0' n_0'' n_1'' n_2' \sin \varepsilon_1'}{(n_1'' + n_0'')^2 (n_2' + n_0')^2} \cos 2\pi \frac{t'}{T}, \\ y = -E_0 \frac{16\, n_0' n_0'' n_1' n_2'' \cos \varepsilon_1'}{(n_1' + n_0')^2 (n_2'' + n_0'')^2} \cos 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \frac{d\Gamma}{\lambda} \right). \end{cases} \tag{21}$$

Soll die resultierende Welle linear polarisiert sein, so muß $d\Gamma$ gleich Null werden. Vielfache einer halben Wellenlänge kommen nicht in Frage, da es sich nur um kleine Fehlerbeträge $d\Gamma$ handelt. Für eine linear polarisierte Welle gilt aber nach (9)

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{G_1}{G_2} . \tag{22}$$

Soll die resultierende Schwingung ferner parallel zur Polarisationsebene des Polarisators liegen, so muß außerdem die Beziehung gelten

$$\varphi = -\varepsilon_1'' . \tag{23}$$

Aus (20), (22) und (23) folgt nun

$$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} \varepsilon_1' = \frac{G_1}{G_2} .$$

Die Benutzung der Amplituden aus (21) liefert die Bedingungsgleichung

$$1 = \frac{n_1'' n_3'}{n_1' n_3''} \left\{ \frac{n_1' + n_0'}{n_3' + n_0'} \cdot \frac{n_3'' + n_0''}{n_1'' + n_0''} \right\}^2 .$$

Die Beachtung der Gleichungen (6) und (7) liefert schließlich die Bedingung

$$\operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1' = \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1'' ,$$
$$\delta' = \delta'' .$$

Eine geradlinig und parallel der einfallenden polarisierte Welle ist nur möglich, wenn die Winkeldifferenzen δ in Kristallplatte und Kompensator gleich groß sind. Um zwischen gekreuzten Prismen vollkommen dunkle Kompensationsstreifen in der Subtraktionslage zu erhalten, müßte man als Kompensator ein Medium wählen, für das die charakteristische Winkeldifferenz dieselbe ist wie in der Kristallplatte. Das ist praktisch nicht möglich. Als Kompensatoren benutzt man Quarzkeile parallel zur optischen Achse oder senkrecht zur optischen Achse geschnittene, drehbare Platten inaktiver Kristalle. In beiden Fällen ist die in Betracht kommende Doppelbrechung gering und demgemäß auch δ'' sehr klein. Besitzt die Kristallplatte, deren Ganguntersehied gemessen werden soll, starke Doppelbrechung, so kann δ' nur dadurch verkleinert werden, daß die Platte in ein stärker brechendes isotropes Medium (Kanadabalsam oder Flüssigkeit) eingebettet wird. Die weitere Behandlung des Problems führt jedoch noch zu einer besseren Lösung.

Wegen des Unterschiedes der Winkeldifferenzen δ' und δ'' müssen wir annehmen, daß die resultierende Welle im allgemeinen elliptisch polarisiert ist. Die Einstellung auf Kompensation wird dann als vollzogen gelten, wenn das Hauptachsenazimut ψ der resultierenden Welle in bezug auf die Polarisationsebene der einstellenden Welle, absolut genommen, ein Minimum ist. Für dieses Azimut ψ ergibt sich aus der Wellengleichung (21) die Beziehung

$$(24)\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg}\{2(\psi - \varepsilon_1') + \pi\} = \frac{2 \operatorname{cotg} \varepsilon_1' \operatorname{tg} \bar{\varepsilon}_1' \operatorname{cotg} \bar{\varepsilon}_1'' \cos 2\pi \frac{d\Gamma}{\lambda}}{1 - \operatorname{cotg}^2 \varepsilon_1' \operatorname{tg}^2 \bar{\varepsilon}_1' \operatorname{cotg}^2 \bar{\varepsilon}_1''} .$$

Bei festem, aber beliebigem Azimut ε_1' der in der Subtraktionslage befindlichen Kombination Platte + Kompensator ergibt sich hieraus als Bedingungsgleichung für $\psi_{\min}$:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 2\varepsilon_1')(1 - \operatorname{cotg}^2 \varepsilon_1' \operatorname{tg}^2 \bar{\varepsilon}_1' \operatorname{cotg}^2 \bar{\varepsilon}_1'') \sin 2\pi \frac{d\Gamma}{\lambda} = 0 .$$

Bei beliebigem Azimut ε_1' wird somit ψ ein Minimum für $d\Gamma = 0$. Hieraus folgt der Satz: *In der Subtraktionslage wird unabhängig vom Azimut der Gangunterschied immer fehlerfrei gemessen.*

Dieser aus der elektromagnetischen Theorie abgeleitete Satz stimmt überein mit dem Satz 2 auf p. 186 der geometrischen Theorie. *In der Kompensationsstellung ist also die austretende Welle stets linear polarisiert; aber ihr Azimut ψ_{min} ist von Null verschieden.* Für die geometrische Diagonallage

$$\varepsilon_1' = \frac{\pi}{4}$$

ergibt sich für das Kompensationsazimut ψ_{min} aus (24)

$$\operatorname{tg}\left(\psi_{min} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \delta'\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \delta''\right)}.$$

Da auch bei sehr starker Doppelbrechung die Werte δ' und δ'' höchstens einige Grad betragen, so kann man diese Gleichung mit sehr großer Annäherung in der einfachen Form schreiben

$$\psi_{min} = \delta' - \delta''. \tag{25}$$

Für die Subtraktionslage und geometrische Diagonallage des Systemes Kristallplatte + Kompensator ist in der Kompensationsstellung das Azimut der resultierenden geradlinig polarisierten Welle gleich der Differenz der Winkeldifferenzen δ für Kristallplatte und Kompensator. Infolge der geradlinigen Polarisation der austretenden Welle kann man auch für Kristalle von sehr starker Doppelbrechung vollkommen dunkle Kompensationsstreifen erreichen, ohne die Kristalle in ein stark brechendes Medium einzubetten. Man braucht nur den Analysator aus seiner Nullage um den Betrag ψ_{min} herauszudrehen, dann liegt die Polarisationsebene der bei Kompensation resultierenden geradlinig polarisierten Welle senkrecht zur Polarisationsebene des Analysators.

Aus der bewiesenen Allgemeingültigkeit des Satzes, daß in der Subtraktionslage (unabhängig vom Azimut) der Gangunterschied in der Kristallplatte prinzipiell[1]) fehlerfrei gemessen wird, ergibt sich die Forderung, die Subtraktionslage

1) D. h. abgesehen von den aus der Empfindlichkeit der Methode sich ergebenden zufälligen Beobachtungsfehlern.

von Kristallplatte und Kompensator so genau wie möglich zu ermitteln. Diese Bestimmung läßt sich auf Messung von Auslöschungsrichtungen zurückführen. Setzen wir voraus, die mechanische Einrichtung sei so getroffen, daß sich sowohl die Kristallplatte wie auch der Kompensator in ihrer Ebene meßbar drehen lassen. Zunächst werden die Polarisationsprismen möglichst genau gekreuzt. Diese Einstellung läßt sich bei Benutzung intensiven Lichtes und normal polarisierender Prismen auch ohne weitere Hilfsmittel sehr genau ausführen. Dann schaltet man den Kompensator ein und bestimmt seine Auslöschungslage. Auch diese Einstellung ist durch Mittelbildung aus einigen Ablesungen genau zu ermitteln, wenn man in die Mitte des Gesichtsfeldes eine Stelle des Kompensators bringt, für die

$$\Gamma = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

ist. Hierauf schaltet man die Kristallplatte hinzu und bestimmt in der Lichtart, für welche man die Doppelbrechung messen will, die Auslöschungslage. Diese Lichtart ist also nach Möglichkeit ebenfalls so zu wählen, daß für sie

$$\Gamma = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

ist. Man dreht nun Kristallplatte und Kompensator aus der Auslöschungslage um 45° heraus, gegebenenfalls die Kristallplatte um weitere 90°. Schließlich dreht man den Analysator aus seiner Nullage um einen kleinen Betrag, bis der Kompensationsstreifen stärkste Verdunkelung zeigt. Diese nachträgliche Drehung des Analysators kommt nur bei der Messung an Kristallen von starker Doppelbrechung in Frage. Beim Übergang zu einer anderen Lichtart muß die Lage der Kristallplatte um den gemessenen Dispersionsbetrag der Auslöschungsrichtung geändert werden.

Das beschriebene Verfahren zur Ermittelung der genauen Subtraktionslage versagt, wenn die Messung in Lichtarten erfolgen muß, für die Γ wesentlich von

$$\frac{2n+1}{2}\lambda$$

verschieden ist, oder wenn, wie meist üblich, über die Orientierung des Kompensators mechanisch von vornherein verfügt ist. In diesen Fällen empfiehlt sich statt des verschieb-

baren Keilkompensators die Benutzung eines Drehplattenkompensators. Das Prinzip eines solchen ist bereits von Biot[1]) angegeben worden; seine Benutzung zur Messung von Gangunterschieden stammt von W. Nikitin.[2]) Später hat Verfasser[3]) die Theorie eines drehbaren Kompensators entwickelt und das Meßinstrument so weit verbessert, daß es bei gleichem Meßbereiche für kleinere Gangunterschiede eine bei weitem größere, für größere Gangunterschiede etwa dieselbe Empfindlichkeit besitzt wie ein Keilkompensator nach Babinet. Das einfache Meßinstrument hat gegenüber den verschiebbaren Keilkompensatoren den Vorteil, daß für *alle* Gangunterschiede schon ganz geringe Abweichungen von der genauen Subtraktionslage eine deutliche Ursymmetrie des Kompensationsstreifens erkennen lassen. Dadurch ist es möglich, auch wenn der Kompensator fest und nur annähernd in der Diagonallage orientiert ist, doch die Subtraktionslage für alle Lichtarten sehr genau innezuhalten.[4])

10. Analyse elliptisch polarisierten Lichtes.

Nach der geometrischen Theorie der Interferenzerscheinungen liegen für eine in der geometrischen Diagonallage befindliche Kristallplatte die Hauptachsen der austretenden elliptisch polarisierten Welle parallel und senkrecht zur Polarisationsebene der einfallenden Welle. Jede elliptische Schwingung kann durch Einschaltung eines Viertelwellenlängenblättchens, dessen Polarisationsrichtungen parallel den Hauptachsen der Schwingungsellipse liegen, in eine lineare Schwingung übergeführt werden. Bildet die Polarisationsebene der schnelleren Welle in der Kristallplatte, im positiven Drehungssinne gemessen, mit der Polarisationsebene des Polarisators den Winkel $+\pi/4$, liegt ferner die Polarisationsebene der schnelleren Welle im Viertelwellenlängenblättchen parallel der Polarisationsebene des Polarisators und bildet die austretende

---

1) Vgl. in H. Rosenbusch u. E. A. Wülfing, Mikroskop. Physiogr. usw. Stuttgart 1904. Bd. I. 1. p. 298.

2) W. Nikitin, Zeitschr. f. Krist. 47. p. 378. 1910.

3) M. Berek, Zentralbl. f. Min. usw. 1913. p. 388—396, 427—435, 464—470, 580—582.

4) Diese Kompensatoren und die zugehörigen Rechentafeln werden von der Firma E. Leitz, Wetzlar, angefertigt.

lineare Schwingung mit der Polarisationsebene des Polarisators, ebenfalls im positiven Drehungssinne gemessen, den Winkel σ, so besteht zwischen σ und dem Gangunterschied Γ in der Kristallplatte die einfache Beziehung

$$\Gamma = \frac{\sigma \lambda}{\pi} . \tag{26}$$

Der Winkel σ wird durch Einstellung des Analysators auf Auslöschung gemessen. Dieses Verfahren zur Messung von Gangunterschieden durch Analyse des elliptisch polarisierten Lichtes rührt von H. de Sénarmont her. G. G. Stokes[1]) und E. Mascart[2]) haben die Methode verallgemeinert und gezeigt, wie man den Glimmerkompensator auch dann noch zur Analyse benutzen kann, wenn der Gangunterschied der Glimmerplatte innerhalb gewisser Grenzen von $\frac{1}{4}\lambda$ verschieden ist. Eine ausführliche Theorie auf geometrischer Grundlage haben G. Horn[3]) und E. C. Müller[4]) gegeben.

Nach der elektromagnetischen Theorie ergibt sich in der geometrischen Diagonallage der Kristallplatte für das Hauptachsenazimut ψ der resultierenden Welle nach Gleichung (12)

$$\operatorname{cotg} 2\psi = \operatorname{cotg} 2\delta \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda} . \tag{27}$$

Infolgedessen ist nach Hinzuschaltung eines Viertelwellenlängenblättchens in der Normallage die austretende Welle im allgemeinen nicht geradlinig polarisiert, und beim Drehen des Analysators tritt in keiner Lage vollkommene Auslöschung ein; es gibt nur Stellungen minimalster Helligkeit, für welche offenbar eine andere Beziehung gilt als Gleichung (26). Wir wollen diese Beziehung unter der Voraussetzung ableiten, daß Kristallplatte und Viertelwellenlängenblättchen fehlerfrei orientiert sind.

Die Koordinatenachsen x und y seien parallel zu den Polarisationsrichtungen der schnelleren bzw. langsameren Welle in der Kristallplatte, die Koordinatenachsen x' und y' parallel zu den Polarisationsrichtungen der schnelleren bzw. langsameren Welle im Kompensatorblättchen. Die Wellengleichung

1) G. G. Stokes, Phil. Mag. (4) 2. p. 420. 1851.
2) E. Mascart, Traité d'optique 2. p. 69. 1891.
3) G. Horn, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XII. p. 273—297. 1899.
4) E. C. Müller, Neues Jahrb. f. Min. usw. Bd. XVII. p. 197—212. 1903.

der aus der Kristallplatte austretenden Welle, bezogen auf das xy-System, ist dann gegeben durch Gleichung (5). Um diese Wellengleichung auf das $x'y'$-System zu beziehen, führen wir die Transformation aus:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi\ ,$$

worin

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

zu setzen ist. Man erhält

$$x' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left\{G_1\cos 2\pi\frac{t}{T} - G_2\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Gamma}{\lambda}\right)\right\},$$
$$y' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left\{G_1\cos 2\pi\frac{t}{T} + G_2\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Gamma}{\lambda}\right)\right\}.$$

Diese Gleichung kann auf die Form gebracht werden

$$x' = A_1\cos 2\pi\frac{t'}{T},$$
$$y' = A_2\cos 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\lambda}\right).$$

Nach Durchgang durch das Viertelwellenlängenblättchen von Glimmer hat die austretende Welle die Gleichung

$$x' = A_1'\cos 2\pi\frac{t'}{T},$$
$$y' = A_2'\cos 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\lambda} - \frac{1}{4}\right).$$

Hierin sind A_1' und A_2' ebenso aus A_1 und A_2 nach den Gleichungen (4e) zu gewinnen wie G_1 und G_2 aus E_0. Somit gilt das für Azimut σ der resultierenden Welle in bezug auf die Polarisationsebene des Polarisators

$$\text{(28)}\qquad \operatorname{tg} 2\sigma = -\frac{2\frac{A_2'}{A_1'}\sin 2\pi\frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\lambda}}{1 - \left(\frac{A_2'}{A_1'}\right)^2}.$$

Die Durchrechnung ergibt nach einer größeren Reihe von Umformungen für das Amplitudenverhältnis

$$\text{(29)}\qquad \frac{A_2'}{A_1'} = -\frac{1 - \operatorname{tg}\delta'}{1 + \operatorname{tg}\delta''}\sqrt{\frac{1 - \cos 2\delta\cos 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}}{1 + \cos 2\delta\cos 2\pi\frac{\Gamma}{\lambda}}}$$

und für die Phasendifferenz

$$\sin 2\pi \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\lambda} = \frac{\sin 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\delta + \sin^2 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}} . \tag{30}$$

Setzt man diese Werte in (28) ein, so erhält man die folgende verwickelte Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\sigma = \frac{2\frac{1-\operatorname{tg}\delta'}{1+\operatorname{tg}\delta'} \sqrt{\frac{1-\cos 2\delta \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}{1+\cos 2\delta \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}} \sin 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}{\left\{1 - \left(\frac{1-\operatorname{tg}\delta'}{1+\operatorname{tg}\delta'}\right)^2 \frac{1-\cos 2\delta \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}{1+\cos 2\delta \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}\right\} \sqrt{\operatorname{tg}^2 2\delta + \sin^2 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}}} . \tag{31}$$

Diese Gleichung gibt nach der elektromagnetischen Theorie den Zusammenhang zwischen dem Drehungswinkel σ bei der Einstellung des Analysators auf minimalste Helligkeit und dem Gangunterschied Γ in der Kristallplatte unter der Voraussetzung, daß sich die Kristallplatte genau in der geometrischen Diagonallage und das Kompensatorblättchen genau in der Normallage befindet und genau ein Viertelwellenlängenblättchen ist. Das Azimut σ ist demnach auch von den Werten δ und δ', d. h. von der Größe der Doppelbrechung in Kristallplatte und Kompensator abhängig. Für $\Gamma = n\lambda$ wird $\operatorname{tg} 2\sigma = 0$, somit $\sigma = 0$, und für

$$\Gamma = \frac{2n+1}{2} \lambda$$

wird $\operatorname{tg} 2\sigma = -0$, somit

$$\sigma = \frac{\pi}{2} .$$

Im allgemeinen gibt demnach die aus der geometrischen Theorie abgeleitete Formel (26) nur richtige Werte für den Gangunterschied Γ, wenn dieser gleich einem ganzen (geraden oder ungeraden) Vielfachen einer halben Wellenlänge ist. Das Maximum des Fehlers bei Benutzung der Formel (26) tritt ein für einen Gangunterschied

$$\Gamma = \frac{2n+1}{4} \lambda .$$

Das ist sowohl aus (31) wie auch aus (27) ersichtlich (ψ wird dann $\pi/4$ statt 0). In diesem Falle vereinfacht sich (31) folgendermaßen:

$$(32) \qquad \operatorname{tg} 2\sigma = \frac{2\,\frac{1-\operatorname{tg}\delta'}{1+\operatorname{tg}\delta'}\cos 2\vartheta}{1-\left(\frac{1-\operatorname{tg}\delta'}{1+\operatorname{tg}\delta'}\right)^2} = \frac{\cos 2\vartheta}{\operatorname{tg} 2\delta'}.$$

Der Wert δ' für das Kompensatorblättchen ist nach den Angaben auf p. 183 für Spaltungsplatten von Muscovit, auf Luft bezogen, $\delta' = 1{,}0'$. Nehmen wir für den Wert ϑ der Kristallplatte den Betrag $\vartheta = 4^0$ an, so entspricht dies einem Höchstfalle der Doppelbrechung, wie er von keinem der in der Tabelle auf p. 176 genannten Kristalle erreicht wird. Man erhält mit diesen Werten aus (32) $\sigma = 44^0\,59'$. Berechnet man nun mit diesem Winkel σ nach der Formel (26) den Gangunterschied, so erhält man $\Gamma = 0{,}24946\,\lambda$. Da in Wirklichkeit nach Voraussetzung $\Gamma = 0{,}25000$ ist, so wird der maximale Fehler, der bei Benutzung der Formel (26) entstehen kann, $\Delta\Gamma = 0{,}00054\,\lambda$ oder für Na-Licht $0{,}32\,\mu\mu$. Schon dieser Betrag ist außerordentlich gering und kommt gegenüber den Justierungsfehlern nicht in Frage. Beachtet man ferner, daß das Glimmerblättchen wegen seiner sehr geringen Dicke aufgekittet ist, und daß schließlich der angenommene Betrag der Doppelbrechung des Kristalls einen Höchstwert darstellt, so ist in jedem Falle der tatsächliche Höchstfehler noch bei weitem geringer.

Die hiermit sich kundtuende Berechtigung der geometrischen Theorie bei der Analyse elliptisch polarisierten Lichtes ist jedoch nur im Zufall begründet. Die Gleichung (32) lehrt, daß der Winkel σ im wesentlichen von der Größe der Winkeldifferenz δ' des Kompensators bestimmt wird. Glimmer läßt sich infolge seiner hervorragenden Spaltbarkeit am leichtesten zur Herstellung von $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen verarbeiten, und zufällig ist gleichzeitig δ' außerordentlich klein wegen der sehr schwachen Doppelbrechung senkrecht zur Spaltungsrichtung. Wären wir gezwungen, unsere $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen aus einem Material herzustellen, dessen δ' beispielsweise 3^0 betrüge, so ergäbe sich selbst bei verschwindender Doppelbrechung der Kristallplatte (ϑ nahezu 0) der Winkel $\sigma = 42^0\,0'$ und nach Formel (26)

der Gangunterschied $\Gamma = 0{,}2333\,\lambda$. Der Fehler wäre in diesem Falle $\Delta\Gamma = 0{,}0167\,\lambda$ bzw. für Na-Licht $9{,}8\,\mu\mu$. Ein solcher Betrag würde die Benutzung der geometrischen Theorie nicht mehr rechtfertigen.

11. Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse.

Bei schiefer Inzidenz sind, wie durch frühere Arbeiten bekannt ist, im allgemeinen die aus einer doppeltbrechenden Kristallplatte austretenden beiden Wellen nicht genau parallel den in der Kristallplatte fortschreitenden Wellen polarisiert; auch stehen ihre Polarisationsebenen nicht genau senkrecht aufeinander. Bei senkrechter Inzidenz liegen zwar die Polarisationsebenen der austretenden beiden Wellen parallel denen in der Kristallplatte; es ergeben sich aber nach der vorliegenden Untersuchung auf Grund der elektromagnetischen Theorie *für die Polarisationsverhältnisse der resultierenden Welle* Unterschiede im Vergleich zur geometrischen Theorie. Diese Abweichungen lassen sich übersichtlich darstellen mit Hilfe des nach Gleichung (8) durch die Lichtbrechungsverhältnisse im anisotropen und im umhüllenden isotropen Medium definierten Winkels δ. Befindet sich die Kristallplatte in der Diagonallage, so ist für Wellenlängen- und Halbwellenlängenplatten das Azimut der resultierenden geradlinig polarisierten Wellen in bezug auf die Polarisationsebene der einfallenden Welle nicht Null bzw. $\pi/2$, sondern δ bzw. dessen Komplementwinkel. δ wächst im allgemeinen mit der Größe der Doppelbrechung. Infolge der Dispersion von δ ergibt sich eine sekundäre Dispersion der Polarisationsrichtungen in der austretenden resultierenden Welle, auch bei einachsigen Kristallen. Für zwei Lichtarten, für deren eine die Kristallplatte eine Wellenlängenplatte und deren andere eine Halbwellenlängenplatte ist, schließen in der Diagonallage die Polarisationsebenen der resultierenden Wellen nicht den Winkel $\pi/2$ ein, sondern bilden einen um nahezu $2\,\delta$ davon verschiedenen Winkel miteinander. Durch Einbetten der Kristallplatte in ein Medium von höherem Brechungsindex als dem der Luft können die Unterschiede zwischen elektromagnetischer und geometrischer Theorie verringert oder ganz aufgehoben werden. Die genannten Erscheinungen treten auch in sog. vollkommen durchsichtigen Medien auf und sind lediglich eine Folge der Doppel-

brechung. Sie erreichen in Kristallen stärkerer Doppelbrechung Beträge, die sich unschwer feststellen lassen müßten.

Für die Theorie der orthoskopischen Meßmethoden ergeben sich aus der elektromagnetischen Theorie nachstehende Folgerungen: Bei der Bestimmung der Auslöschungsrichtungen gibt die geometrische Theorie der Interferenzerscheinungen, eine annähernd richtige Justierung vorausgesetzt, auch für empfindliche Meßmethoden eine hinreichend genaue Annäherung, da in der Normallage der Einfluß von δ verschwindet. Bei der Messung von Gangunterschieden nach der Subtraktionsmethode kommt es nicht so sehr darauf an, die einzelnen nach der geometrischen Theorie geforderten Orientierungen streng innezuhalten, als vielmehr nur darauf, die genaue Subtraktionslage zu ermitteln. Dann wird auch bei fehlerhaftem Azimut des Systemes Kristallplatte + Kompensator der Gangunterschied stets richtig bestimmt. Der Analysator darf zur Erzielung von möglichst dunklen Kompensationsstreifen aus seiner richtigen Nullage herausgedreht werden. Diese Drehung kommt nur bei Kristallen starker Doppelbrechung in Frage. Bei der Messung von Gangunterschieden durch Analyse elliptisch polarisierten Lichtes sind die Abweichungen zwischen geometrischer und elektromagnetischer Theorie infolge der Verwendung von Glimmer für das $\frac{1}{4}\lambda$-Blättchen außerordentlich gering.

Die experimentelle Prüfung der abgeleiteten Sätze mußte unterbleiben, da dem Verfasser zurzeit nicht die erforderlichen Instrumente zur Verfügung stehen.

Im Felde, Juli 1918.

(Eingegangen 1. September 1918.)

4. *Bemerkung zum Nachtrage der R. Bärschen Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität“*[1]*; von F. Ehrenhaft und D. Konstantinowsky.*

Im Anschluß an den obenstehenden Nachtrag bemerken wir: Der Hinweis auf die Notwendigkeit, das zur Messung verwendete Voltmeter gerade für solche Untersuchungen besonders genau zu eichen, war nur *ein* Punkt der seinerzeitigen Diskussion in Zürich.

In der in den Arch. de Gen., Juli 1918, p. 47 erschienenen Voranzeige seiner Annalenarbeit hatte R. Bär die Schlußfolgerung in dem Satze „la structure atomique de l'électricité est mise en évidence d'une façon éclatante“ ausgesprochen, während er in der Annalenarbeit[1]) selbst das Resultat phänomenologisch nur mehr dahin zusammenfaßt: „Die reziproken Haltepotentiale oder Ladungen von mikroskopischen Al-Teilchen verhalten sich innerhalb der experimentell bestimmten Versuchsfehler wie ganze Vielfache einer Grundladung. Für hinreichend kleine Partikel sind diese Multipla die kleinsten ganzen Zahlen.“

Von dieser zweiten Zusammenfassung besitzt der erste Satz keine Beweiskraft, da die Ladungen, welche ein Probekörper hintereinander annimmt, sich innerhalb der Versuchsfehler aus rein arithmetischen Gründen als ganze Vielfache einer Grundladung darstellen lassen müssen. Dem zweiten Satze hingegen fehlt die Grundlage; denn wenn man die Einengung genügend scharf durchführt, d. h. wenn man, immer noch im Einklange mit den maximal zu erwartenden Versuchsfehlern, die Genauigkeit der Versuche (die Einengungen) genügend weit treibt, verschwinden auch an den kleinen Probekörpern die einfachen Vielfachen und an deren Stelle treten größere Vielfache. Und zwar gilt dies auch noch für Probekörper, die so klein sind, daß sie mit der Bärschen Anordnung nicht mehr sichtbar gemacht werden können. Daß es R. Bär nicht gelungen ist, auch dieses zweite Ergebnis mit

1) R. Bär, Ann. d. Phys. 57. p. 161. 1918.

voller Deutlichkeit wiederzufinden, liegt eben an der von ihm gewählten Versuchsanordnung, die derartige Beobachtungen nicht zuläßt. (Fernrohrbeobachtung statt wie bei uns Verwendung eines Mikroskopes genügender Apertur, Beurteilung der Bewegung des Teilchens und Ablesung des Voltmeters durch eine statt wie bei uns durch zwei Personen usw.)

Wir haben das in Rede stehende und von R. Bär in seiner genannten Arbeit übernommene Beobachtungs- und Rechenverfahren (Einengungsmethode) seinerzeit für Schlußfolgerungen über die Frage der Existenz eines unteilbaren Elektrons mit dem klassischen Ladungswerte vorgeschlagen und ausgebildet. Für diesen Fall ist aber die Diskussion über die größeren oder kleineren Vielfachen von untergeordneter Bedeutung, da selbst bei kleinen Vielfachen (also weiter gelassenen Grenzen der Einengung) der Absolutwert des durch dieses Rechenverfahren bestimmten größten gemeinschaftlichen Maßes derjenigen Ladungen, welche ein Probekörper hintereinander annimmt, der Wert des sogenannten Elektrons bedeutend unterschreitet. Für die Beantwortung dieser Hauptfrage lassen sich aus den Bärschen Ergebnissen aber keine Schlüsse ziehen, da Bär — wie er sich überdies selbst bewußt ist — durch die Verwendung von Aluminium als Elektrodensubstanz in atmosphärischer Luft statt in trockenen inerten Gasen die Möglichkeit einer Größenbestimmung der von ihm beobachteten Probekörper und der Absolutwerte der gemessenen Ladungen aus der Hand gegeben hat. Es erscheint daher vielleicht nicht unangebracht, zu betonen, daß die Messungen von R. Bär mit der von uns gefundenen Tatsache, daß Ladungen in der Natur bestehen, welche nur Bruchteile der klassischen Elektronenladung sind, *nicht* im Widerspruche stehen. Aus diesen Gründen kann R. Bär die oben erwähnte Schlußfolgerung seiner Voranzeige in den Arch. de Genève nicht beweisen.

Im übrigen werden die Ergebnisse und Schlußfolgerungen der Einengungsmethode im Zusammenhange mit anderen Fragen an dieser Stelle noch zur Sprache kommen.

Wien, Universität, 25. November 1918.

(Eingegangen 27. Dezember 1918.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

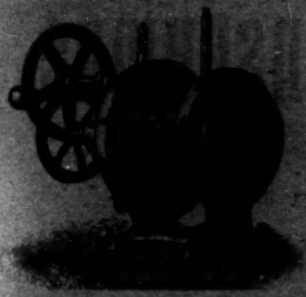
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

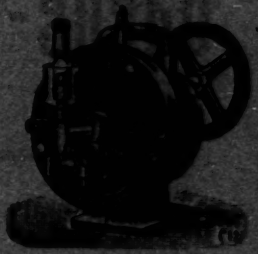
Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P. | System Gaede, D.R.P. angemeldet



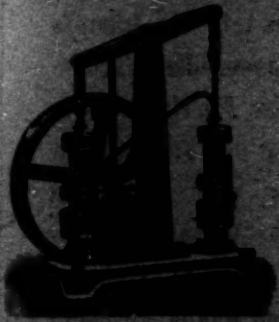
Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.**



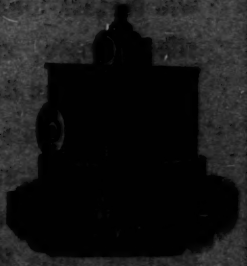
Alle Arten von Luftpumpen!

Trockene rotierende Luftpumpen.

Trockene Schieber-luftpumpen.

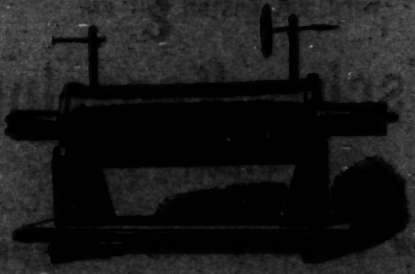
Quecksilberluftpumpen aller Systeme.

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen und Verzeichnisse!

Inhalt.

Seite

1. Gregor Huch. Versuch einer Theorie des Kanalstrahlenlichtes. (Zweite Abhandlung.) 201
2. L. Vegard. Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. Bemerkungen zu den Äußerungen des Hrn. C. Schaefer und Frl. Martha Schubert 291

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren sonst möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. *Versuch einer Theorie des Kanalstrahlenlichtes; von Gregor Huch.*

Zweite Abhandlung.[1])

XIII. Strahlung und Bewegungsenergie.

Bisher sind alle Vergleiche, die wir mit Vegard gezogen haben, von dem Verhältnis S_r/S_b der ruhenden und der bewegten Strahlung ausgegangen, und wir haben an zwei unter verschiedenen Bedingungen aufgenommenen Photogrammen immer nur die Veränderung dieses Verhältnisses festgestellt. Wir denken uns jetzt die Aufgabe gestellt, die *absoluten* Werte der Strahlungen zu vergleichen. Dazu müssen nicht nur die nebensächlichen Versuchsbedingungen, Beobachtungszeit, Geometrie der Versuchsanordnung, Bedingungen der photographischen Technik, konstant gehalten werden, eine rein technische Schwierigkeit, die aber beim Vergleiche von S_r/S_b ausgeschaltet war, sondern die zu vergleichenden Werte müssen auch auf gleiche Einheiten der Kanalstrahlen bezogen werden. Wir müssen also die Kanalstrahlen messen. Eine solche Messung kann aber keinen einfachen Intensitätswert liefern, wie etwa eine Messung des elektrischen Stromes; denn der Kanalstrahl ist ein Gebilde von verschiedenen Eigenschaften, deren gegenseitige Abhängigkeit noch unbekannt ist, und deren Einfluß auf die Strahlung erst ermittelt werden soll: Zahl der Teilchen, Mischung von Strahlern verschiedener Art, Masse und Schwingungsfähigkeit, Geschwindigkeit, die durch Masse und Geschwindigkeit gegebene Energie, elektrische Ladung. Unter diesen Eigenschaften ist die Teilchenzahl (die Zahl der in der Zeiteinheit durch den Querschnitt tretenden Teilchen), die wir bisher in Analogie zur Intensität des elektrischen Stromes als Intensität (i) des Kanalstrahles definiert haben, genauerer Messung kaum zugänglich, ebenso die Art und die Mischung der Strahler; Bewegungsenergie und Ladung, welche der Messung

1) I. Abh. Ann. d. Phys. 57. p. 1. 1918. Gleichung (1) bis (24) und Tabelle I bis IV siehe I. Abh.

zugänglich sind, hat Vegard gemessen (vgl. Abschn. I, p. 5). Solange aber die Eigenschaften des Kanalstrahles in ihrem gegenseitigen Verhältnisse erhalten bleiben, liefert uns jede beliebige Eigenschaft ein Maß aller übrigen, also einen Parameter der Intensität des Kanalstrahles schlechthin. Die Eigenschaften des Kanalstrahles bleiben in einem konstanten Verhältnis, solange die Bedingungen im Entladungsraume konstant gehalten werden; wir können also Kanalstrahlen gleicher Entladungsbedingungen im Beobachtungsraume verschiedenen Versuchsbedingungen unterwerfen und die Ergebnisse mit Hilfe einer Messung einer der aufgezählten Eigenschaften auf Strahlen gleicher Intensität beziehen. Diese theoretische Vergleichungsmöglichkeit erleidet insofern eine Einschränkung, als die Eigenschaften des Strahles am Beobachtungsorte noch durch die Bedingungen im Beobachtungsraume verändert werden können. In Betracht kommt außer der selektiven Absorption, deren Einfluß aber nicht erheblich sein kann, vor allem die vom Gasdruck abhängende Veränderung der elektrischen Ladung. Wir sind genötigt, die Ladung von den übrigen Eigenschaften abzusondern und ihren Einfluß auf die Strahlung für sich zu untersuchen; wir werden aber sehen, daß eine deutbare Beziehung zwischen Ladung und Strahlung nicht besteht. Mit dieser Einschränkung gestatten uns also die Vegardschen Energiemessungen, die unter verschiedenen Versuchsbedingungen gemessenen absoluten Werte der Strahlung auf die gleiche Einheit der Kanalstrahlen zu beziehen. Darin liegt vor allem der Wert dieser Messungen für unsere Untersuchung. Als solche veränderliche, die Entladungsbedingungen nicht wandelnde Versuchsbedingung kommt nach dem bisherigen Stande der Versuchstechnik allerdings nur der Gasdruck in Betracht. Es dürfte aber möglich sein, auch die Geschwindigkeit unabhängig von den Entladungsbedingungen zu verändern.

Tab. V gibt die Ergebnisse der Vegardschen Messungen. Die Bewegungsenergie bezeichnen wir zum Unterschiede der Schwingungsenergie mit B, die Ladung der Strahlen mit L. Die unten geschlossenen Spalten 1, 3, 7 enthalten die von Vegard in Tab. XV gegebenen Werte; Spalte 5 ist durch Addition aus Spalte 1 und 3 berechnet, Spalte 2, 4, 6, 8 je aus den voranstehenden Spalten berechnet, geben die Verhältniszahlen für je drei untereinander stehende, unter gleichem

Drucke aufgenommene Werte, wobei der der kleinsten Spannung entsprechende Wert gleich Eins gesetzt ist. Sie stellen also den Spannungseffekt des Verhältnisses S/B dar. Die Druckeffekte gibt Tabelle VI. Spalte 1, 4, 7, 10, 12, 13, 14 dieser Tabelle sind unmittelbar aus Spalte 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 der Tabelle V bestimmt. Spalte 2, 5, 8 erhält man, wenn man die Proportion der vorangehenden Spalten (1, 4, 7) durch die Proportion der Gasdrucke (2,86:1) dividiert, Spalte 3, 6, 9, 11, wenn man die der kleinsten Spannung entsprechenden Werte von Spalte 1, 4, 7, 10 gleich Eins setzt.

Durch Division der Werte von Spalte 7 der Tabelle V in die Werte von Spalte 1, 3, 5 erhält man das Verhältnis Strahlung/Ladung, welches ich zum Vergleiche durch alle Effekte verfolgt habe (Spalte 9—14) und das ich an späterer Stelle erörtern werde. Spalte II (Tab. V) gibt die Nummer der Reihenfolge, in welcher die

Tabelle V.

Wasserstoff, Linie H_β (nach Vegard, Ann. d. Phys. 39. p. 147, Tab. XV).

Versuchsbedingungen				Strahlung und Bewegungsenergie						Ladung und Bewegungsenergie	Strahlung und Ladung				
Gasdruck mm Hg		Spannung Funke	Spannung Volt	$\frac{S_r}{B}\cdot c$		$\frac{S_b}{B}\cdot c$		$\frac{S_r+S_b}{B}\cdot c$		$\frac{L}{B}\cdot c_1$	$\frac{S_r}{L}\cdot\frac{c}{c_1}$		$\frac{S_b}{L}\cdot\frac{c}{c_1}$		$\frac{S_r+S_b}{L}\cdot\frac{c}{c_1}$	
I	II	III	IV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0,1	III	2	8500	12,8	1	43,5	1	56,3	1	36,0	1	0,355	1	1,4	1	1,54	1
	II	6	20000	11,3	0,87	14,0	0,32	25,3	0,47	24,2	0,67	0,468	1,32	0,579	0,41	1,05	0,67
	I	10	27000	11,7	0,91	8,5	0,20	20,2	0,36	20,5	0,57	0,571	1,61	0,415	0,30	0,985	0,64
0,035	IV	2	8500	8,7	1	26,1	1	29,8	1	12,4	1	0,298	1	2,12	1	2,41	1
	V	6	20000	8,3	0,89	10,6	0,41	18,9	0,46	7,5	0,61	0,440	1,48	1,41	0,62	1,86	0,77
	VI	10	27000	2,7	0,78	4,7	0,18	7,4	0,28	3,9	0,31	0,695	2,34	1,91	0,57	1,90	0,79

Werte bei Vegard aufgeführt sind. c und c_1 sind Konstanten, welche von den angewendeten willkürlichen Einheiten abhängen.

Wenn man die Erregung der ruhenden und der bewegten Strahlung als zwei getrennte, voneinander unabhängige Vorgänge ansieht, so muß man erwarten, daß die ruhende Strahlung proportional der Zahl der Stöße, also proportional dem Gasdrucke wächst. Vegard zieht in der Tat diesen Schluß und erklärt die Abweichungen von der genauen Proportion aus den Fehlern der Messungen. Unter der gleichen Voraussetzung muß man aber auch für die *bewegte* Strahlung die Proportion mit dem Gasdrucke fordern. Wenn wir mit dem ersten Stoße beginnen, so steigt der Energiegehalt des bewegten Strahlers mit jedem folgenden Stoße so lange an, bis der Energieverlust (die Ausstrahlung) zwischen zwei Stößen, welcher eine Funktion des Energiegehaltes (oder der Schwingungstemperatur[1]) ist, gleich dem Energiezuwachs (der Erregung) beim Stoße geworden ist. Erst wenn die Strahlung der Erregung gleich geworden ist, wird der Strahler nach jedem folgenden Stoße immer wieder die gleiche Energie besitzen, wird also das Gleichgewicht der Vorgänge erreicht sein. Da wir den Zustand des Gleichgewichtes der Vorgänge voraussetzen, so muß also auch die bewegte Strahlung der Erregung gleich oder (wenn wir mit verschiedenen Maßen messen) proportional sein (vgl. auch I. Abh. p. 40). Bleibt deshalb die Summe der Ausstrahlungen der bewegten Strahler, wie die Tabellen zeigen, hinter der Proportion der Gasdrucke zurück, so muß auch die Summe aller von diesen Strahlern aufgenommenen Erregungen dahinter zurückbleiben.

Die Summe aller Erregungen ist gleich dem Produkte aus der Zahl der Erregungen und dem Werte der einzelnen Erregung. Da aber die Zahl der Erregungsvorgänge dem Gasdrucke proportional ist, so muß die einzelne Erregung, der bei jedem Stoße in Schwingung umgesetzte Betrag an Schwingungsenergie, mit steigendem Gasdrucke abnehmen. Der bei höherem und der bei niederem Drucke stattfindende Stoß

1) Die Definition der Schwingungstemperatur oder Helligkeit (gleich dem Quotienten aus Schwingungsenergie und -kapazität) vgl. I. Abh. p. 14.

Tabelle VI.

Wasserstoff, Linie H_β (aus Tab. V berechnet).

Druckeffekt der Verhältnisse von Strahlung und Bewegungsenergie, Ladung und Bewegungsenergie, Strahlung und Ladung.

Versuchsbedingungen			Strahlung und Bewegungsenergie									Ladung und Bewegungsenergie		Strahlung und Ladung		
Verhältnis d. Gasdrucke	Spannung		$\left(\frac{S_r}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{S_r}{B}\right)_D$			$\left(\frac{S_b}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{S_b}{B}\right)_n$			$\left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_D$			$\left(\frac{L}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{L}{B}\right)_n$		$\left(\frac{S_r}{L}\right)_{nD} : \left(\frac{S_r}{L}\right)_D$	$\left(\frac{S_b}{L}\right)_{nD} : \left(\frac{S_b}{L}\right)_D$	$\left(\frac{L}{S_r+S_b}\right)_{nD} : \left(\frac{L}{S_r+S_b}\right)_D$
$nD:D$	Funke	Volt	$A:B$	$\frac{A}{B} : \frac{nD}{D}$	$\left(\frac{A}{B}\right)_n : \frac{A}{B}$	$A:B$	$\frac{A}{B} : \frac{nD}{D}$	$\left(\frac{A}{B}\right)_n : \frac{A}{B}$	$A:B$	$\frac{A}{B} : \frac{nD}{D}$	$\left(\frac{A}{B}\right)_n : \frac{A}{B}$	$A:B$	$\left(\frac{A}{B}\right)_n : \frac{A}{B}$			
I	II	III	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2,86:1	2	8500	3,46:1	1,21:1	1	1,67:1	0,58:1	1	1,89:1	0,66:1	1	2,90:1	1	1,19:1	0,58:1	0,64:1
	6	20000	3,43:1	1,20:1	0,99	1,32:1	0,46:1	0,79	1,82:1	0,64:1	0,96	3,22:1	1,1	1,06:1	0,41:1	0,57:1
	10	27000	4,35:1	1,52:1	1,26	1,81:1	0,63:1	1,09	2,75:1	0,96:1	1,46	5,14:1	1,78	0,84:1	0,35:1	0,53:1
	Mittel		3,57:1	1,32:1		1,60:1	0,56:1		2,15:1	0,75:1		3,75:1		0,97:1	0,51:1	0,57:1
	$\frac{S}{B} : \frac{S_r+S_b}{B}$			1,74:1			0,75:1			1:1						
Versuchsbedingungen			Druckeffekt	Verhältnis des Druckeffektes zur Proportion des Gasdruckes	Druck-Spannungseffekt	Druckeffekt	Verhältnis des Druckeffektes zur Proportion des Gasdruckes	Druck-Spannungseffekt	Druckeffekt	Verhältnis des Druckeffektes zur Proportion des Gasdruckes	Druck-Spannungseffekt	Druckeffekt	Druck-Spannungseffekt	Druckeffekt		

unterscheiden sich aber nur durch den verschiedenen Energiegehalt (die verschiedene Schwingungstemperatur) des bewegten Strahlers. Wenn wir also keinen Energieausgleich annehmen wollen, so können wir ein Zurückbleiben der bewegten Strahlung hinter der Proportion der Gasdrucke nur erklären, wenn wir annehmen, daß die Erregung mit steigender Schwingungstemperatur des Strahlers abnimmt. Vegard neigt zu dieser Annahme, die aber, wie ich unter Abschnitt III (*Verschiedene Erklärungsversuche*) gezeigt habe, zu sehr wenig plausiblen Konsequenzen führt, wenigstens, wenn man den ganzen Effekt damit erklären will.

Nehmen wir aber einen Ausgleich der Schwingungsenergien an, so wird die Energie $E_{s\,\min}$, welche der bewegte Strahler beim Stoße besitzt, zum Teil auf den ruhenden Strahler überfließen, und zwar wird dieser überfließende Betrag um so größer sein, je heißer der bewegte Strahler beim Stoße ist, d. h. je kürzer seine freie Zeit war, je weniger Schwingungsenergie er also seit dem letzten Stoße verloren hat. Dann muß aber nicht nur die Veränderung von S_s hinter der Veränderung des Gasdruckes zurückbleiben, sondern es muß sich auch S_r stärker ändern als der Gasdruck. Dem Gasdrucke proportional sein kann nur die gesamte Ausstrahlung $(S_r + S_s)$, welche dem Betrage gleich ist, der aus der kinetischen Energie des Strahlers in Schwingungsenergie und aus Schwingungsenergie in Strahlung umgesetzt wird.

Die Vergleichung von Strahlung und Bewegungsenergie ist also die stärkste Probe auf unsere Voraussetzung.

Um unsere Folgerungen mathematisch zu formulieren, gehen wir von dem Betrage ΔE aus, welcher bei jedem Stoße aus der Bewegungsenergie in Schwingungsenergie umgesetzt wird. Wir setzen voraus, daß dieser Energiezuwachs oder die „Erregung" nur von den Bedingungen des Stoßes (Masse, Schwingungsfähigkeit, Geschwindigkeit der stoßenden Teilchen) aber nicht (oder nicht in erster Ordnung) von der Schwingungstemperatur der stoßenden Teilchen abhängt. Dann ist die Summe der Energien des ganzen aus beiden Strahlern gebildeten Systemes nach dem Stoße gleich der Summe aus der neuerzeugten und der im bewegten Strahler noch vorhandenen alten Energie

$$(25)\qquad \begin{cases} E_{r\max} + E_{b\max} = \Delta E + E_{b\min} \\ \qquad\qquad = \Delta E + \alpha^{\Delta/v} E_{b\max}, \\ E_{r\max} + (1-\alpha^{\Delta/v}) E_{b\max} = \Delta E, \end{cases}$$

wobei α nach unseren Definitionen den Bruchteil, auf welchen die Energie des Strahlers in der Zeiteinheit, $\alpha^{\Delta/v}$ den Bruchteil, auf welchen sie in der freien Zeit sinkt, und $(1-\alpha^{\Delta/v})$ den in der freien Zeit ausgestrahlten Bruchteil

$$\left(\int_{T_\Delta} \sigma\, dt\right)$$

bedeutet. Wir haben für das Verhältnis der maximalen Energien die Definition eingeführt [Gleichung (00), I. Abh. p. 23 u. 36]

$$\frac{E_{r\max}}{E_{b\max}} = \vartheta(x),$$

wobei $\vartheta(x)$ die oben angegebene Bedeutung hat. Daraus folgt

$$(26)\qquad E_{r\max} = \frac{\Delta E}{\frac{1-\alpha^{\Delta/v}}{\vartheta(x)} + 1},$$

$$(27)\qquad E_{b\max} = \frac{\Delta E}{1-\alpha^{\Delta/v} + \vartheta(x)},$$

$$(28)\qquad E_{b\min} = \alpha^{\Delta/v} E_{b\max} = \frac{\Delta E}{\frac{\vartheta(x)+1}{\alpha^{\Delta/v}} - 1},$$

$$(29)\qquad \int_{T_\Delta} \sigma\, dt = \int_{T_\Delta} \frac{dE_b}{dt}\, dt = E_{b\max} - E_{b\min} = \frac{\Delta E}{\frac{\vartheta(x)}{1-\alpha^{\Delta/v}} + 1}.$$

Tragen wir diese Werte in Gleichung (2) und (4) ein, so erhalten wir für die absoluten Werte der Strahlung die Ausdrücke

$$(30)\qquad S_r = \frac{\Delta E}{\Delta\left(\frac{1-\alpha^{\Delta/v}}{\vartheta(x)} + 1\right)} iXT_a = \frac{\Delta E \cdot D}{\frac{1-\alpha^{R/D\cdot v}}{\vartheta(x)} + 1} iX\frac{1}{R}T_a,$$

$$(31)\qquad S_b = \frac{\Delta E}{\Delta\left(\frac{\vartheta(x)}{1-\alpha^{\Delta/v}} + 1\right)} iXT_a = \frac{\Delta E \cdot D}{\frac{\vartheta(x)}{1-\alpha^{R/D\cdot v}} + 1} iX\frac{1}{R}T_a$$

und für die Summe

$$(32)\qquad S_r + S_b = \frac{\Delta E}{\Delta} iXT_a = \Delta E \cdot D\, iX \cdot \frac{1}{R} T_a.$$

Die Gasdichte kommt in diesen Gleichungen je zweimal vor. Als Exponent von α wirkt sie auf S_r und S_b in entgegengesetztem Sinne.

Wir entwickeln diese Gleichungen wieder wie in Abschnitt X für die extremen Fälle.

Erlöschen der bewegten Strahler oder fehlender Energieausgleich. — Erlischt der bewegte Strahler in der freien Zeit, so wird

$$\alpha^{\Delta|v} = 0.$$

In diesem Falle ist das Verhältnis der maximalen Energien nicht mehr durch den Ausgleich einer vom bewegten Strahler mitgeführten Energie, sondern nur durch die Verteilung der beim Stoße erzeugten Energie bedingt. In diesem Falle wird

(26a) $$E_{r\max} = \frac{\Delta E}{\frac{1}{x} + 1},$$

(27a) $$E_{b\max} = \frac{\Delta E}{x + 1},$$

(28a) $$E_{b\min} = 0,$$

(29a) $$\int_{T_A} \frac{dE_b}{dt}\, dt = \frac{\Delta E}{x+1} = E_{b\max}.$$

Findet kein Schwingungsausgleich statt, so ist beim Gleichgewichte aller Vorgänge die von jedem Strahler ausgestrahlte Energie gleich der beim Stoße empfangenen Energie, welche sich nach einem Verhältnisse k (Stoßkapazität) auf die beiden Strahler verteilt. Also

$$E_{r\max} = \Delta E_r,$$

$$\int_{T_A} \frac{dE_b}{dt}\, dt = \Delta E_b.$$

Aus

$$\frac{\Delta E_r}{\Delta E_b} = k; \quad \Delta E_r + \Delta E_b = \Delta E$$

folgt wieder

(26b) $$E_{r\max} = \frac{\Delta E}{\frac{1}{k} + 1},$$

(29b) $$\int_{T_A} \frac{dE}{dt}\, dt = \frac{\Delta E}{k+1}.$$

Die von jedem ruhenden oder bewegten Strahler zwischen zwei Stößen ausgestrahlte Energie ist also in beiden Fällen gleich groß und von D und v unabhängig; dagegen kann der Energiegehalt des bewegten Strahlers im zweiten Falle beliebig ansteigen (vgl. Abschn. X, 3, I. Abh., p. 40).

$$E_{b\max} = \frac{\Delta E}{(1+k)(1-\alpha^{\Delta/v})}. \tag{27b}$$

Der Ausdruck $\alpha^{\Delta/v}$ nähert sich dem Werte Eins um so mehr, je weniger Energie der Strahler in der freien Zeit verliert. Würde er gleich Eins (d. h. der Verlust gleich Null), so würde $E_{b\max}$ gleich ∞.

Daraus folgt für die absoluten Werte der gemessenen Intensitäten [Gleichung (30) bis (32)]

$$S_r = \frac{\Delta E}{\Delta\left(\frac{1}{k}+1\right)} i X T_a = \frac{\Delta E \cdot D}{\frac{1}{k}+1} i \frac{X}{R} T_a, \tag{30a}$$

$$S_b = \frac{\Delta E}{\Delta(k+1)} i X T_a = \frac{\Delta E \cdot D}{k+1} i \frac{X}{R} T_a, \tag{31a}$$

$$S_r + S_b = \frac{\Delta E}{\Delta} i X T_a = \Delta E \cdot D\, i \frac{X}{R} T_a. \tag{32a}$$

Sowohl wenn wir annehmen, daß die bewegten Strahler erlöschen, als wenn wir annehmen, daß kein Energieausgleich stattfindet, d. h. daß die Erregungen der beiden Strahler voneinander unabhängige Vorgänge sind, schließen wir auf vollkommene Proportionalität der absoluten Werte mit der Weglänge und der Gasdichte.

Vollkommener Ausgleich. Konstante Ausstrahlung zwischen zwei Stößen. — Nehmen wir vollständigen Ausgleich und lange Schwingungsdauer an, so ist wieder (vgl. p. 245 ff.)

$$\vartheta(x) = x,$$

$$\frac{dE_b}{dt} = a E_{b\max}; \quad a = \text{const.},$$

$$\int_{T_A} \frac{dE_b}{dt}\, dt = a \frac{A}{v} E_{b\max} = \frac{aR}{vD} E_{b\max},$$

$$\alpha^{\Delta/v} = 1 - a\frac{A}{v} = 1 - \frac{aR}{vD}.$$

Daraus folgt

$$E_{r\max} = \frac{\Delta E}{\frac{a\Delta}{vx}+1} = \frac{\Delta E}{\frac{aR}{vDx}+1}, \tag{26c}$$

$$E_{b\max} = \frac{\Delta E}{\frac{a\Delta}{v}+x} = \frac{\Delta E}{\frac{aR}{vD}+x}, \tag{27c}$$

$$E_{b\min} = \frac{\Delta E}{\frac{x+1}{1-\frac{a\Delta}{v}}-1} = \frac{\Delta E}{\frac{x+1}{1-\frac{aR}{vD}}-1}, \tag{28c}$$

$$\int_{T_A} \frac{dE}{dt}\,dt = \frac{\Delta E}{\frac{vx}{a\Delta}+1} = \frac{\Delta E}{\frac{vDx}{aR}+1}. \tag{29c}$$

Für die absoluten Werte der ruhenden, der bewegten und der gesamten Strahlung ergibt sich nach Gleichung (30) bis (32) wieder

$$S_r = \frac{\Delta E}{\frac{a\Delta^2}{vx}+\Delta} iXT_a = \frac{\Delta E \cdot D}{\frac{aR}{vDx}+1} i\frac{X}{R}T_a, \tag{30b}$$

$$S_b = \frac{\Delta E}{\frac{vx}{a}+\Delta} iXT_a = \frac{\Delta E \cdot D}{\frac{vDx}{aR}+1} i\frac{X}{R}T_a, \tag{31b}$$

$$S_r + S_b = \frac{\Delta E}{\Delta} iXT_a = \Delta E \cdot D \cdot i\frac{X}{R}T_a. \tag{32b}$$

In den beiden Gleichungen (30) und (31) bzw. (30b) und (31b) ist der Zähler der Gasdichte einfach proportional. Im Nenner findet sich ein Glied, welches ebenfalls von der Gasdichte abhängt, und welches in der einen Gleichung den reziproken Wert der anderen hat. Steigt D, so wird dieses Glied für S_r kleiner, der Nenner wird dadurch kleiner und S_r wächst. S_r wächst also rascher mit der Gasdichte, als der Proportion des Zählers entspricht. Für S_b nimmt das Glied zu, wenn die Gasdichte zunimmt; der Nenner wird größer, S_b kleiner, aber der Zähler wächst rascher als der Nenner. S_b wächst also mit der Gasdichte, aber weniger rasch, als der einfachen Proportion des Zählers entspricht. Der Einfluß des Gliedes auf beide Nenner ist verschieden groß, denn es ist in dem einen Falle ein Bruch, im anderen eine ganze Zahl. Nur wenn das Glied gleich Eins wird, ist er für beide Ausdrücke gleich.

Dieser Punkt läßt sich etwas genauer bestimmen. Das Glied enthält das reziproke Kapazitätsverhältnis $1/\varkappa$ und einen Ausdruck, welcher das Verhältnis der in der freien Zeit verlorenen Energie des bewegten Strahlers zu seiner maximalen Energie bezeichnet

$$(1 - \alpha^{\Delta/v})\, E_{b\,\max} = E_{b\,\max} - E_{b\,\min},$$

$$\frac{a\,R}{v\,D} = 1 - \alpha^{\Delta/v} = \frac{E_{b\,\max} - E_{b\,\min}}{E_{b\,\max}}.$$

Dieser Ausdruck ist immer kleiner als Eins, solange $E_{b\,\min}$ nicht gleich Null wird, d. h. der bewegte Strahler in der freien Zeit nicht völlig erlischt. Ist also $\varkappa$ gleich Eins (d. h. die Schwingungskapazität des ruhenden gleich der des bewegten Strahlers), so kann sich S_r niemals stärker mit dem Gasdrucke ändern als S_b. Für Wasserstoff ist aber $\varkappa$ erheblich kleiner als Eins; deshalb muß bei steigender Verdünnung ein Augenblick eintreten, in welchem das Glied

$$\frac{a\,R}{v\,D\,\varkappa} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1 - \alpha^{\Delta/v}}{\vartheta(\varkappa)}$$

gleich Eins wird, und von dem an S_r sich stärker von der Proportion des Gasdruckes entfernt als S_b.

Diese Überlegungen sind etwas durchsichtiger, wenn wir den extremen Fall konstanter Ausstrahlung [Gleichung (30b) und (31b)] zugrunde legen; sie gelten aber ebenso für den nicht extremen Fall zwischen den Stößen sinkender Ausstrahlung und für das Glied $(1 - \alpha^{\Delta/v})/\vartheta(\varkappa)$ der Gleichungen (30) und (31); erst wenn der bewegte Strahler erlischt oder kein Ausgleich stattfindet, werden alle drei Strahlungen der Gasdichte einfach proportional [Gleichung (30a), (31a), (32a)].

Da das veränderliche Glied von v und $\varkappa$ abhängt, so haben gleiche Änderungen des Gasdruckes nicht ganz gleiche Wirkungen, wenn sie bei verschiedenen Geschwindigkeiten und bei verschiedenem Kapazitätsverhältnis eintreten. Der Druckeffekt des absoluten Strahlungswertes hat also auch noch einen Geschwindigkeits- und einen Spannungseffekt, auch wenn der Energiezuwachs ΔE von Spannung und Geschwindigkeit unabhängig ist (Druck-Spannungseffekt von S/B). In allen Fällen aber muß die gesamte Ausstrahlung $(S_r + S_b)$ dem Drucke proportional bleiben, solange ΔE konstant bleibt.

Für das Verhältnis *Strahlung/Bewegungsenergie* finden wir folgende Ausdrücke: Es sei ($e = \frac{1}{2} m v^2$) die Energie, welche das bewegte Teilchen durch das Gesichtsfeld trägt; dann ist die gemessene Bewegungsenergie

$$B = \Sigma e = i T_e e, \tag{33}$$

wobei i entsprechend unseren bisherigen Ansätzen die Zahl der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömenden und vom Thermoelement gemessenen Teilchen und T_e die Beobachtungszeit bezeichnet, welche wir für die thermoelektrische und die optische Messung als gleich annehmen. Dann ist, wenn wir die Gleichungen in der allgemeinen und der für den extremen Fall gültigen Form [Gleichung (30) bis (32), (30b) bis (32b)] nebeneinander stellen

$$\frac{S_r}{B} = \frac{\frac{\Delta E}{e}}{A\left(\frac{1 - a^{A/v}}{\vartheta(x)} + 1\right)} X = \frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{a R}{v D x} + 1} \cdot \frac{X}{R}, \tag{34}$$

$$\frac{S_b}{B} = \frac{\frac{\Delta E}{e}}{A\left(\frac{\vartheta(x}{1 - a^{A/v}} + 1\right)} X = \frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{v D x}{a R} + 1} \cdot \frac{X}{R}, \tag{35}$$

$$\frac{S_r + S_b}{B} = \frac{\Delta E}{A \cdot e} \cdot X = \frac{\Delta E}{e} \cdot D \cdot \frac{X}{R}. \tag{36}$$

Daraus folgt

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{S_r}{B}\right)_1 : \left(\frac{S_r}{B}\right)_2 &= \left(\frac{\frac{\Delta E}{e}}{A\left(\frac{1 - a^{A/v}}{\vartheta(x)} + 1\right)} \right)_1 : \left(\frac{\frac{\Delta E}{e}}{A\left(\frac{1 - a^{A/v}}{\vartheta(x)} + 1\right)} \right)_2 \\ &= \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{a R}{v D x} + 1} \right)_1 : \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{a R}{v D x} + 1} \right)_2, \end{aligned} \right. \tag{34a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{S_b}{B}\right)_1 : \left(\frac{S_b}{B}\right)_2 &= \left(\frac{\frac{\Delta E}{e}}{A\left(\frac{\vartheta(x)}{1 - a^{A/v}} + 1\right)} \right)_1 : \left(\frac{\frac{\Delta E}{e}}{A\left(\frac{\vartheta(x)}{1 - a^{A/v}} + 1\right)} \right)_2 \\ &= \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{v D x}{a R} + 1} \right)_1 : \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{v D x}{a R} + 1} \right)_2, \end{aligned} \right. \tag{35a}$$

$$\text{(36a)}\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{S_r+S_b}{B}\right):\left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_2 &= \left(\frac{\Delta E}{\Delta e}\right)_1:\left(\frac{\Delta E}{\Delta e}\right)_2\\ &= \left(\frac{\Delta E}{e}\cdot D\right)_1:\left(\frac{\Delta E}{e}\cdot D\right)_2.\end{aligned}\right.$$

Für den Vergleich unter konstanten Entladungsbedingungen wird

$$\vartheta(x)_1 = \vartheta(x)_2.$$

Nach unseren bisherigen Ausführungen nehmen wir auch an

$$\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_1 = \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_2$$

und wir erhalten, wenn wir die allgemeine Form der Gleichungen und die für den extremen Fall gültige Form nebeneinander stellen

$$\text{(34b)}\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{S_r}{B}\right)_1:\left(\frac{S_r}{B}\right)_2 &= \frac{1}{A_1\left(\frac{1-a^{A_1/v_1}}{\vartheta(x)}+1\right)}:\frac{1}{A_2\left(\frac{1-a^{A_2/v_2}}{\vartheta(x)}+1\right)}\\ &= \frac{D_1}{\frac{aR}{v_1D_1}+x}:\frac{D_2}{\frac{aR}{v_2D_2}+x},\end{aligned}\right.$$

$$\text{(35b)}\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{S_b}{B}\right)_1:\left(\frac{S_b}{B}\right)_2 &= \frac{1}{A_1\left(\frac{\vartheta(x)}{1-a^{A_1/v_1}}+1\right)}:\frac{1}{A_2\left(\frac{\vartheta(x)}{1-a^{A_2/v_2}}+1\right)}\\ &= \frac{D_1}{v_1D_1x+aR}:\frac{D_2}{v_2D_2x+aR},\end{aligned}\right.$$

$$\text{(36b)}\quad \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_1:\left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_2 = \frac{1}{A_1}:\frac{1}{A_2} = D_1:D_2.$$

Für den Druckeffekt wird auch $v_1 = v_2$, und die Gleichungen lauten für den extremen Fall

$$\text{(34c)}\quad \left(\frac{S_r}{B}\right)_1:\left(\frac{S_r}{B}\right)_2 = \frac{D_1}{\frac{\text{const}}{D_1}+1}:\frac{D_2}{\frac{\text{const}}{D_2}+1},$$

$$\text{(35c)}\quad \left(\frac{S_b}{B}\right)_1:\left(\frac{S_b}{B}\right)_2 = \frac{D_1}{\text{const}\,D_1+1}:\frac{D_2}{\text{const}\,D_2+1},$$

$$\text{(36c)}\quad \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_1:\left(\frac{S_r+S_b}{B}\right) = D_1:D_2.$$

Für die Untersuchung des Druckeffektes genügt es aber, wenn wir, wie wir getan haben, B als Parameter betrachten und

$$\left(\frac{S_1}{B}\right)_1 = \left(\frac{S}{B}\right)_2 = \frac{S_1}{B}:\frac{S_2}{B} = S_1:S_2$$

setzen.

Betrachten wir daraufhin die Tabb. V und VI, welche die an der Linie H_β vorgenommenen Messungen wiedergeben, so sehen wir, daß die ruhende Strahlung deutlich stärker zunimmt, als der Proportion des Gasdruckes entspricht. Die Abweichung ist nicht nur recht groß (+32 Proz.), sondern auch durchaus systematisch, ja sie beträgt ca. zwei Drittel der entgegengesetzten Abweichung der bewegten Strahlung (−44 Proz.). Wir können sie deshalb nicht gut auf Versuchsfehler zurückführen, sondern halten sie für einen Beweis der in dieser Abhandlung entwickelten Theorie. Wie wir sehen werden, ist dieses Übersteigen der Proportion des Gasdruckes bei Vegards Versuchen in anderen Gasen noch stärker, weil Vegard dort den Gasdruck stärker verändert hat.

Die Veränderung der bewegten Strahlung bleibt um 44 Proz. hinter der Veränderung des Gasdruckes zurück, was der Theorie entspricht. Aber auch die Summe der Strahlungen, für welche wir die einfache Proportion fordern müssen, bleibt hinter der Proportion des Gasdruckes um 25 Proz. zurück. Diese Abweichung ist die geringste von allen. Wenn wir also in einem der drei Fälle die einfache Proportion suchen, können wir sie nur in diesem finden.

Die Messungen Vegards, die wir hier auswerten, beziehen sich auf die ruhende und bewegte Strahlung der Linie H_β. Nach Analogie der für das Verhältnis S_r/S_b gefundenen Gesetzmäßigkeiten müssen wir erwarten, daß die Werte für H_α nicht vollkommen die gleichen sind. Wir würden mit größerer Sicherheit Schlüsse ziehen, wenn wir das Verhalten beider Linien als Unterlage hätten. Es ist nun möglich, das Verhältnis S/B auch für H_α aus Vegards Angaben zu berechnen, ohne neue Fehlerquellen in die Rechnung zu bringen. Vegard ist in der Weise verfahren, daß er durch eine Aufnahme quer zur Strahlenrichtung die ungeschiedene Ausstrahlung $(S_r + S_b)$ des Kanalstrahles gemessen und gleichzeitig in der beschriebenen Weise (I. Abh., p. 5) am Faradayzylinder die von dem Strahle mitgeführte Energie B bestimmt hat. Die transversal gemessene Gesamtstrahlung $(S_r + S_b)$ wurde dann mit Hilfe der aus Fig. 1 gewonnenen Werte von S_r/S_b auf S_r und S_b verteilt. Diese Teilstrahlungen wurden dann auf die Energie B bezogen. Eine photographische Aufnahme des Spektrums liefert uns aber immer die Linien H_α und H_β zugleich, und

wir können die gemessene Bewegungsenergie ebensogut auf H_α wie auf H_β beziehen. Ferner stehen offenbar die longitudinal gemessenen Intensitäten der beiden Linien in demselben Verhältnis zueinander wie die transversal gemessenen. Es ist deshalb

$$(S_r + S_b)_\alpha : (S_r + S_b)_\beta = \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_\alpha : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_\beta,$$

$$(\mathrm{x}) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{S_r + S_b}{B}\right)_\alpha = \dfrac{(S_r + S_b)_\alpha}{(S_r + S_b)_\beta} \cdot \left(\dfrac{S_r + S_b}{B}\right)_\beta \\ a = \dfrac{b}{c} \cdot d. \end{cases}$$

In Gleichung (x) ist d aus Tab. V, b und c aus Tab. I bekannt; damit ist a gegeben, das dann mit Hilfe von Tab III auf

$$\left(\frac{S_r}{B}\right)_\alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{S_b}{B}\right)_\alpha$$

verteilt werden kann. Man kann aber auch

$$\left(\frac{S_r}{B}\right)_\alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{S_b}{B}\right)_\alpha$$

unmittelbar in derselben Weise bestimmen wie

$$\left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_\alpha.$$

So habe ich die Tabb. Va und VIa berechnet, welche den ersten Spalten von Tabb. V und VI analog sind. Die Ände-

Tabelle Va.

Wasserstoff, Linie H_α (aus Tab. I u. V berechnet). Strahlung und Bewegungsenergie.

Gasdruck mm Hg	Spannung		$\frac{S_r}{B} \cdot c$		$\frac{S_b}{B} \cdot c$		$\frac{S_r + S_b}{B} \cdot c$	
	Funke	Volt						
I	III	IV	1	2	3	4	5	6
0,1	2	8500	11,6	1	72,8	1	85,0	1
	6	20000	9,6	0,83	20,0	0,27	29,7	0,35
	10	27000	11,0	0,95	13,0	0,18	23,6	0,29
0,035	2	8500	3,23	1	33,3	1	36,5	1
	6	20000	3,05	0,94	13,6	0,41	16,6	0,45
	10	27000	2,52	0,78	6,0	0,18	8,5	0,23

Tabelle VIa.

Wasserstoff, Linie H_α (aus Tab. V a berechnet).

Druckeffekt der Verhältnisse von Strahlung und Bewegungsenergie.

Versuchsbedingungen			Strahlung und Bewegungsenergie									
Verhältnis d. Gasdrucke	Spannung		$\left(\frac{S_r}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{S_r}{B}\right)_D$				$\left(\frac{S_b}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{S_b}{B}\right)_D$				$\left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_D$	
$nD:D$	$\frac{Z}{qm}$	Volt	$A:B$	$\frac{A}{B}:\frac{nD}{D}$	$\left(\frac{A}{B}\right)_{nD}:\frac{A}{B}$	Druck-Spannungseffekt	$A:B$	$\frac{A}{B}:\frac{nD}{D}$	$\left(\frac{A}{B}\right)_{nD}\cdot\frac{A}{B}$	Druck-Spannungseffekt	$A:B$	$\frac{A}{B}:\frac{nD}{D}$	$\left(\frac{A}{B}\right)_{nD}:\frac{A}{B}$	Druck-Spannungseffekt
I	II	III	1	2	3		4	5	6		7	8	9	
2,86:1	2	8500	3,59:1	1,26:1	1		2,18:1	0,76:1	1		2,33:1	0,84:1	1	
	6	20000	3,51:1	1,23:1	0,98		1,49:1	0,52:1	0,68		1,80:1	0,63:1	0,77	
	10	21000	4,76:1	1,66:1	1,33		2,18:1	0,75:1	1,0		2,79:1	0,98:1	1,20	
		Mittel	3,83:1	1,38:1			1,95:1	0,68:1			2,43:1	0,85:1		
		$\frac{S_r+S_b}{B}$		1,62:1				0,80:1				1:1		
Versuchsbedingungen			Druckeffekt	Verhältnis des Druckeffektes zur Proportion des Gasdruckes	Druck-Spannungseffekt		Druckeffekt	Verhältnis des Druckeffektes zur Proportion des Gasdruckes	Druck-Spannungseffekt		Druckeffekt	Verhältnis des Druckeffektes zur Proportion des Gasdruckes	Druck-Spannungseffekt	

rungen mit dem Drucke betragen im Durchschnitt der drei Spannungen für

$$\frac{S_r}{B};\ \frac{S_b}{B};\ \frac{S_r+S_b}{B}\ :\ 3{,}83;\ 1{,}95;\ 2{,}43,$$

die Abweichungen von der Proportion des Gasdruckes: + 34 Proz.; — 32 Proz.; — 15 Proz.

Hiernach kann es nicht mehr zweifelhaft sein, welcher der beiden Strahlungen wir die größere Annäherung an die Proportion des Gasdruckes zuschreiben müssen.

Der Fehler von 15 bzw. 25 Proz. für die Gesamtstrahlung, welcher noch übrigbleibt, kann den von Vegard hervorgehobenen Schwierigkeiten in der Bestimmung von B zugeschrieben werden. Immerhin ist die Abweichung bei allen Spannungen gleichen Vorzeichens; außerdem ist sie merkwürdig ungleich, zeigt aber doch einen gewissen Gang mit der Spannung; für einige Werte überschreitet sie anscheinend die Fehlergrenze der Versuche und erreicht sogar die durchschnittlichen Abweichungen von S_b. Wir sind deshalb berechtigt, auch hinter diesen Abweichungen einen reellen Effekt zu vermuten. Nach unseren Gleichungen (36), (36a) ist

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_{D_1} : \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_{D_2} &= \left(\frac{\Delta E}{e}\cdot D\right)_1 : \left(\frac{\Delta E}{e}\cdot D\right)_2 \\ \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{D_1} : \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{D_2} &= \left(\frac{S_r+S_b}{B\cdot D}\right)_1 : \left(\frac{S_r+S_b}{B\cdot D}\right)_2 . \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Danach müßten wir die Abweichungen der Gesamtstrahlung von der Proportion des Gasdruckes auf eine Änderung der Erregung mit dem Gasdrucke zurückführen, und zwar erhielten wir für diesen Effekt aus Vegards Tabellen folgende Werte:

		für H_β	für H_α
für 2 mm Funkenlänge	$\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{nD} : \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_D$	= 0,66 : 1	= 0,84 : 1
„ 6 „ „	„ „	= 0,64 : 1	= 0,63 : 1
„ 10 „ „	„ „	= 0,96 : 1	= 0,98 ; 1
Mittel	„ „	= 0,75 : 1	= 0,85 : 1

Die Erregung pro Einheit der Bewegungsenergie würde also mit steigendem Gasdrucke abnehmen, d. h. sie hinge von der Restenergie $E_{i\,\min}$ ab.

Man könnte daraus schließen, daß das bewegte Teilchen oder das System um so weniger Energie aufnimmt, je mehr Energie es beim Stoße bereits besitzt. — Die Erregung wäre also eine Funktion der Schwingungstemperatur, und wir gelangten damit zu einer Einschränkung unserer Voraussetzungen (p. 206).

Man könnte daran denken, in dieser Abhängigkeit der Stoßkapazität von der Schwingungstemperatur eine Äußerung der scheinbaren Masse des Elektrons zu suchen. Ein Elektron, das Schwingungen gleicher Frequenz, aber größerer Amplitude

ausführt, hat eine größere durchschnittliche Geschwindigkeit und könnte deshalb auch eine merkbar größere Trägheit haben als ein schwächer schwingendes. Es würde deshalb unter dem Einflusse des Induktionsstoßes seine Amplitude verhältnismäßig weniger vergrößern. Indessen sollte man erwarten, daß die in einem Zeitabschnitte von einem schwingenden Elektron ausgestrahlte Energie nicht von der Veränderung seiner schwingenden Bewegung während dieser Zeit, sondern von dem Verluste der durch Masse und Geschwindigkeit bestimmten Energie abhängt, so daß also die vermehrte Trägheit des Elektrons für die Ausstrahlung gleichgültig bliebe.

Indessen können wir aus unseren Ausführungen noch eine andere Erklärung ableiten, nach welcher die Beziehung zwischen Erregung und Gasdruck nur eine scheinbare ist.

Wenn wir die Lostrennung eines Elektrons als eine Steigerung der lichterregenden Induktionswirkung auffassen, so müssen wir folgern, daß die Abtrennung des Elektrons eintritt, sobald die Schwingungsenergie $E_{s\,max}$ einen kritischen Wert überstiegen hat. Wird aber ein Elektron losgerissen, so nimmt es einen Teil der Energie des Systems als Bewegungsenergie und latente Energie mit; die Ionisierung geschieht auf Kosten der zurückbleibenden Schwingungsenergie. Steigern wir also die in einem einzelnen System vorhandene Energie, von einem niederen Werte ausgehend, über den kritischen Wert, so wird die Ausstrahlung dieses Systemes bis zu dieser Grenze wachsen, um dann mit der Lostrennung des Elektrons plötzlich zu sinken und bei weiterer Energiezufuhr von neuem zu steigen. Die Steigerung der Energie der einzelnen Systeme kann aber sowohl durch Erhöhung von ΔE wie von $E_{s\,min}$ herbeigeführt werden, also sowohl durch Steigerung der Stoßenergie B, aus welcher der Energiezuwachs ΔE stammt, als durch Steigerung des Gasdruckes und Verkürzung der Wege, durch welche $E_{s\,min}$ erhöht wird. Für den Druckeffekt kommt der zweite Fall in Betracht. Steigerten wir also den Gasdruck, so nähme die Zahl der Elektrisierungen zu nicht bloß durch die Vermehrung der Stöße sondern auch durch Steigerung der Restenergien; deshalb nähme sie stärker zu als die Zahl der Stöße oder als der Gasdruck; es würde deshalb verhältnismäßig mehr Energie auf die Erzeugung freier Elektronen verbraucht und die übrig-

bleibende Schwingungsenergie stiege langsamer an, als der Zunahme des Gasdruckes entspricht.

Eine Abnahme des durchschnittlichen Wertes von $\Delta E/e$ mit dem Gasdrucke wäre also durchaus erklärlich, ohne daß wir Annahmen machten, die nicht aus unseren bisherigen Voraussetzungen abgeleitet werden können. Es wäre auch noch möglich, den großen Unterschied zwischen den bei verschiedenen Spannungen erhaltenen Werten von $(\Delta E/e)_p$ zu erklären. Wenn wir die bei 10 mm Funkenstrecke erhaltenen Werte (die auch in anderen Fällen Besonderheiten zeigen), den bei 2 mm und 6 mm Funkenstrecke erhaltenen Werten gegenüberstellen, so ergibt sich eine starke Abnahme des Effektes mit steigender Spannung. Wir werden daraus schließen, daß der Effekt an den Atomen stärker ist als an den Molekülen. Entweder (wenn wir die erste Annahme unterlegen) nähert sich die Schwingungsenergie der Atome früher der Sättigung (erklärbar dadurch, daß die Atome sowohl wegen ihrer größeren Geschwindigkeit als wegen ihrer größeren Kapazität eine größere Schwingungsenergie erreichen), oder (wenn wir die zweite Annahme unterlegen) die Atome werden in größerer Zahl elektrisiert (eine Voraussetzung, die wir unseren Erklärungen auch an anderer Stelle werden zugrundelegen müssen).

Gegen die hier diskutierte Auffassung spricht aber, wie wir noch näher zeigen werden, das Verhalten von

$$\frac{S_r + S_b}{B}$$

des Sauerstoffs. Die Abweichungen von der Proportion des Gasdruckes sind für dieses Gas nicht nur sehr ungleich (Abweichung bis zu 25 Proz. zwischen dem höchsten und niedrigsten Werte), sondern auch durchaus nicht eindeutig; die positiven und negativen Abweichungen sind ungefähr gleich groß.[1]) Eine die Fehlergrenze der Versuche übersteigende Abhängigkeit der Erregung von der Schwingungstemperatur können wir also nur zulassen, wenn wir annehmen, daß sie erst bei einem Werte der Schwingungstemperaturen merkbar wird, der bei den Versuchen in Sauerstoff noch nicht erreicht ist. Dann bleiben aber die starken Schwankungen der Werte im Sauerstoff unerklärlich. Eine auf alle Fälle anwendbare Erklärung

1) Vgl. Tabelle VII, B 10, p. 258.

bieten dagegen die Farbeneffekte, deren Einwirkung auf die Gesamtstrahlung wir in einem späteren Kapitel (III. Abh., XVI. Kap, Farbenausgleich) untersuchen werden.

Nehmen wir aber die Abweichungen als reell an (gleichviel, wie wir sie erklären), so können wir die wirklichen Veränderungen der Verteilung der gesamten Energie auf die beiden Strahler bestimmen, indem wir die Veränderungen von S_r/B und S_b/B nicht mit den Veränderungen des Gasdruckes, sondern mit denen von

$$\frac{S_r + S_b}{B}$$

vergleichen. Dieser Vergleich ist in der letzten Zeile der Tabelle gezogen. Wir sehen, daß die ruhende Strahlung in dem von Vegard angewendeten Druckintervalle sogar stärker zunimmt als die bewegte, ein Verhalten, welches bereits auf p. 211 gedeutet worden ist.

Aus unseren Gleichungen können wir auch den *reinen Geschwindigkeitseffekt* des Verhältnisses $\frac{\text{Strahlung}}{\text{Bewegungsenergie}}$ bestimmen. Der Geschwindigkeitseffekt ist dem Druckeffekte äquivalent, so weit er auf der Veränderung der freien Zeit

$$\left(T_A = \frac{A}{v}\right)$$

beruht, dagegen nicht äquivalent, soweit die Veränderung auf der Veränderung der Zahl der Stöße in der Zeit beruht. Wir erhalten

(34d)
$$\left(\frac{S_r}{B}\right)_{nv} : \left(\frac{S_r}{B}\right)_v = \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{nv}}{\frac{1 - a^{A/nv}}{\vartheta(x)} + 1} : \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_v}{\frac{1 - a^{A/v}}{\vartheta(x)} + 1} = \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{nv}}{\frac{aR}{nvDx} + 1} : \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_v}{\frac{aR}{vDx} + 1},$$

(35d)
$$\left(\frac{S_b}{B}\right)_{nv} : \left(\frac{S_b}{B}\right)_v = \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{nv}}{\frac{\vartheta(x)}{1 - a^{A/nv}} + 1} : \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_v}{\frac{\vartheta(x)}{1 - a^{A/v}} + 1} = \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{nv}}{nvDx + aR} : \frac{\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_v}{vDx + aR},$$

$$\text{(36 d)} \qquad \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{nv} : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{v} = \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{nv} : \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{v}.$$

Die ruhende Strahlung muß zunehmen, die bewegte abnehmen, die gesamte Strahlung beständig bleiben, wenn die Geschwindigkeit steigt.

Der reine Geschwindigkeitseffekt kommt in den Vegardschen Messungen nicht zur Darstellung; es wäre aber denkbar, ihn an homogenen Kanalstrahlen darzustellen. Aus dem magnetischen Spektrum ließe sich ein Bündel Kanalstrahlen einheitlicher Masse und Geschwindigkeit gewinnen, das kurz hinter dem Magnetfelde nur aus geladenen Teilchen bestünde und deshalb durch elektrische Felder gleichmäßig beschleunigt und verzögert werden könnte.

Im *Spannungseffekte* ist immer zugleich ein Geschwindigkeitseffekt enthalten. Theoretisch interessiert uns vor allem der *Spannungseffekt der Gesamtstrahlung* $(S_r + S_b)$. Dieser Effekt ist in den Vegardschen Messungen ziemlich groß. Es ist bei Spannungsdifferenzen zwischen $8 \cdot 10^3$, $20 \cdot 10^3$, $27 \cdot 10^3$ Volt oder 2, 6, 10 mm Funkenstrecke, wenn wir nach steigenden Spannungen ordnen

für $D_1 = 0{,}1$ mm Hg: für H_β für H_α

$$\left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_1} : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_2} : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_3} = 1 : 047 : 0{,}36 \quad = 1 : 0{,}35 : 0{,}29$$

für $D_2 = 0{,}035$ mm Hg:

$$\left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_1} : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_2} : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_3} = 1 : 0{,}46 : 0{,}23 \quad = 1 : 0{,}45 : 0{,}23$$

Die Gesamtstärke der Ausstrahlung sinkt mit steigender Spannung innerhalb der Versuchsgrenzen auf ein Drittel bis ein Viertel ihres höchsten Wertes.

Nach unseren theoretischen Ableitungen [Gleichung (36a)] ist

$$\text{(36 a)} \qquad \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_1 : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_2 = \left(\frac{\Delta E}{e} \cdot D\right)_1 : \left(\frac{\Delta E}{e} \cdot D\right)_2.$$

Halten wir D konstant, so ist

$$\text{(36 e)} \qquad \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_1} : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{V_2} = \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{V_1} : \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{V_2}.$$

Der Einfluß der veränderten Geschwindigkeit, soweit er auf der Wirkung des Gliedes

$$\frac{\vartheta(x)}{1 - e^{\Delta/v}}$$

in unseren Gleichungen beruht, ist verschwunden; ein Effekt ist nur möglich, wenn

$$\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{v_1} \neq \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{v_2},$$

d. h. wenn das Verhältnis zwischen Erregung und Bewegungsenergie von der Spannung abhängt.

Oben ist ausgeführt worden, daß die Energiemessung uns einen Parameter der Intensität des Strahles liefert, solange die Eigenschaften des Strahles konstant bleiben. In diesem Falle bleibt, wie gezeigt wurde, $\Delta E/e$ konstant oder wenigstens nahe konstant. Diese Voraussetzung konstanter Eigenschaften des Kanalstrahles ist für den Spannungseffekt nicht mehr zutreffend. Im Strahle ändern sich mit ändernder Spannung sowohl die Geschwindigkeit als die Masse und Art der Teilchen, und es ist möglich, daß beide Veränderungen einen Einfluß auf das Verhältnis $\Delta E/e$ haben.

Verfolgen wir zunächst die erste Möglichkeit. Hat die Geschwindigkeit *keinen* Einfluß auf das Verhältnis $\Delta E/e$, so steigt die Stoßerregung ΔE mit dem Quadrate der Geschwindigkeit

$$\text{(38)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta E}{e} = \dfrac{\Delta E}{\frac{1}{2} m v^2} = \text{const}, \\ \Delta E = \text{const}\, v^2. \end{cases}$$

Die Konsequenz, zu der wir damit kommen, ist keineswegs theoretisch selbstverständlich. Für manche Eigenschaften der Massestrahlen ist innerhalb gewisser Grenzen eine umgekehrte Proportionalität zur Geschwindigkeit festgestellt. Vor allem ändert sich die Absorption der Strahlen nach dem Lenardschen Gesetze in umgekehrtem Verhältnis mit v^4; es sei auch an die Ionisationswirkung der α-Strahlen erinnert. Wenn wir die verschiedenen Vorgänge bei dem Zusammentreffen zweier Teilchen unter dem gleichen Gesichtspunkte der elektromagnetischen Induktion zu verstehen suchen, so sollten wir in unserem Falle deshalb im Gegenteil eine umgekehrte Abhängigkeit von v erwarten, wenn eine Extrapolation von den bei starker Annäherung der Strahler stattfindenden Vorgängen auf die bei weniger starker Annäherung stattfindenden berechtigt wäre. Gegen diese Vermutung entscheiden Versuche Vegards in Sauerstoff, die wir in einem folgenden Abschnitte besprechen, deren wichtigstes Ergebnis wir aber hier voraus-

nehmen müssen. Nach diesen Versuchen besteht für Sauerstoff in der Tat eine vollkommene Konstanz von

$$\frac{S_r + S_b}{B},$$

also nach unserer Gleichung von $\Delta E/e$, und zwar über vier untersuchte Spannungen. Wir werden nicht annehmen wollen, daß die beiden Ursachen, die wir als möglich zur Diskussion gestellt haben, in entgegengesetztem Sinne derart wirken, daß sie sich drei Spannungsschritte hindurch gerade aufheben. Wir schließen vielmehr, daß beide Ursachen der Veränderlichkeit nicht wirksam sind, d. h. daß für Sauerstoff wirklich die Proportionalität der Erregung mit der Energie des Stoßes [1]) oder dem Quadrate der Geschwindigkeit besteht, und daß eine Änderung der Art und Masse der Strahler nicht stattfindet. Dieser Schluß wird, wie schon erwähnt, durch die magnetische Analyse der Sauerstoff-Kanalstrahlen bestätigt [2]), durch welche nur eine Art von Trägern festgestellt ist. Das eine Argument ist also konstant; deshalb muß auch das andere Argument konstant bleiben, wenn die Gesamtstrahlung konstant bleiben soll, welche deren Funktion ist. Wir haben nun keine Veranlassung, anzunehmen, daß die Beziehung zwischen $\Delta E/e$ und der Geschwindigkeit der Strahlen in Wasserstoff einem anderen Gesetze gehorcht als in Sauerstoff. Wir nehmen also auch hier Konstanz von $\Delta E/e$ bei wechselnder Geschwindigkeit an. Damit scheidet die Erklärung des Spannungseffektes von $\frac{S_r + S_b}{B}$ durch die veränderliche Geschwindigkeit der Strahler aus den Erwägungen aus.

Übrig bleibt die Erklärung des Effektes aus der veränderlichen Zusammensetzung des Strahles, und wir folgern eine Abhängigkeit des Verhältnisses

$$\frac{S_r + S_b}{B}$$

1) In die Stoßenergie, aus welcher die Schwingungsenergie stammt, gehen ein die relative Geschwindigkeit der stoßenden Teilchen und ihre Massen. Da ein Teichen ruht und unter allen Versuchsbedingungen die gleiche Masse hat, so dürfen wir die Stoßenergie durch die (relativ zum Beobachter gemessene) Bewegungsenergie des anderen Teilchens (B) ersetzen.

2) W. Wien, Physik. Zeitschr. 11. 377. 1910; von Dechend u. Hammer, Heidelb. Ber. Nr. 21. 1910; Königsberger u. Kichling, Verh. d. D. Physik. Ges. 12. p. 995. 1910; Gehrcke u. Reichenheim, Verh. d. D. Physik. Ges. 12. p. 414. 1910.

von der Natur des stoßenden Teilchens. Wir nehmen also an, daß die Erregung pro Einheit der Energie des stoßenden Teilchens für den Stoß Molekül × Molekül und Molekül × Atom verschieden groß ist.

Nach Tab. V nimmt das Verhältnis

$$\frac{S_r + S_b}{B}$$

mit steigender Spannung ab; es ist also, wenn der Index die Funkenstrecken bezeichnet

$$\left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_2 > \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_6 > \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_{10}$$

$$\left(\frac{\Delta E}{e}\right)_2 > \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_6 > \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_{10}.$$

Aus unseren früheren Überlegungen haben wir geschlossen, daß im Kanalstrahl mit wachsender Entladespannung der Anteil der Moleküle zunimmt, der Anteil der Atome abnimmt. Der Ausdruck ΔE bezeichnet den Mittelwert des Zuwachses eines Systemes beim Stoße

$$\Delta E = \frac{\Sigma \Delta E_{m,m} + \Sigma \Delta E_{a,m}}{i \frac{X}{A} T_a}, \tag{39}$$

wobei der Nenner nach unseren früheren Bestimmungen die Zahl der Stöße im Gesichtsfelde und in der Beobachtungszeit angibt und $\Delta E_{m,m}$ bzw. $\Delta E_{a,m}$ den durchschnittlichen Zuwachs eines einzelnen Systemes Molekül × Molekül bzw. Atom × Molekül bezeichnen. Dieser mittlere Zuwachs ΔE liegt also zwischen dem Zuwachs des Molekülstoßes und des Atomstoßes und nähert sich mit steigernder Entladespannung dem Werte des Molekülstoßes und umgekehrt, weil die Moleküle unter den stoßenden Teilchen mit steigender Entladespannung zahlreicher werden. Wenn also ΔE mit steigender Spannung abnimmt, so muß der Zuwachs für jenen Anteil kleiner sein, der mit steigender Spannung zunimmt; das ist der reine Molekülstoß. Also ist

$$\frac{\Delta E_{m,m}}{e} < \frac{\Delta E_{a,m}}{e}.$$

Hypothetisch können wir noch den Stoß Atom × Atom hinzufügen und schreiben

(a) $$\frac{\Delta E_{a,a}}{e} > \frac{\Delta E_{a,m}}{e} > \frac{\Delta E_{m,m}}{e}.$$

Wir können uns diese Beziehung durch eine Erweiterung des Begriffes der Stoßkapazität verdeutlichen. Wir denken uns den Energiezuwachs pro Einheit der Stoßenergie der drei Systeme durch ein gemeinsames Maß $\Delta E'$ gemessen und bezeichnen den Proportionalitätsfaktor als Stoßkapazität des Systemes; dann ist

(b) $$\frac{\Delta E_{a,a}}{e} = k_{a,a}\,\Delta E'; \quad \frac{\Delta E_{a,m}}{e} = k_{a,m}\,\Delta E'; \quad \frac{\Delta E_{m,m}}{e} = k_{m,m}\,\Delta E',$$

(c) $$\frac{\Delta E_{a,a}}{e} : \frac{\Delta E_{a,m}}{e} : \frac{\Delta E_{m,m}}{e} = k_{a,a} : k_{a,m} : k_{m,m},$$

(d) $$k_{a,a} > k_{a,m} > k_{m,m}.$$

Wie man sieht, nimmt das System um so mehr Energie auf, oder seine Stoßkapazität ist um so größer, je mehr das Atom und je weniger das Molekül an dem Systeme Anteil hat. Es liegt deshalb nahe, die Stoßkapazität des Systemes — seine Fähigkeit, Stoßenergie in Schwingungsenergie umzuwandeln — als die Resultierende oder die Summe einer korrespondierenden Eigenschaft seiner Glieder aufzufassen. Zu dem Zwecke müssen wir auch die Stoßkapazität der Glieder, die wir bisher lediglich als Verhältniszahl aufgefaßt haben, auf feste Maßstäbe beziehen. Bezeichnet $(\Delta E_a)_m$ die Erregung des Atoms in Berührung mit dem Molekül und $(\Delta E_m)_a$ die des Moleküls in Berührung mit dem Atom, $\Delta E_{a,m}$ wie bisher die Erregung des Systemes Atom × Molekül, so ist

(e) $$\Delta E_{a,m} = (\Delta E_a)_m + (\Delta E_m)_a.$$

Bezeichnen wir mit k' lediglich das Verteilungsverhältnis, so ist also

(f) $$\begin{cases} \Delta E_{a,m} = (k'_a)_m\,\Delta E_{a,m} + (k'_m)_a\,\Delta E_{a,m}, \\ \dfrac{(\Delta E_a)_m}{(\Delta E_m)_a} = \dfrac{(k'_a)_m}{(k'_m)_a} = k'_{a,m}, \\ (k'_a)_m + (k'_m)_a = 1. \end{cases}$$

Nach Gleichung (b), (e) und (f) ist

(g) $$\frac{\Delta E_{a,m}}{e} = \frac{(\Delta E_a)_m}{e} + \frac{(\Delta E_m)_a}{e} = [(k'_a)_m + (k'_m)_a]\,k_{a,m}\,\Delta E'.$$

Setzen wir

$$(k'_a)_m : k_{a,m} = (k_a)_m,$$
$$(k'_m)_a : k_{a,m} = (k_m)_a,$$

so ist

$$\frac{(\Delta E_a)_m}{e} = (k_a)_m \Delta E'; \quad \frac{(\Delta E_m)_a}{e} = (k_m)_a \Delta E',$$

(h) $$\frac{\Delta E_{a,m}}{e} = [(k_a)_m + (k_m)_a] \Delta E'.$$

Jetzt ist

$$(k_a)_m + (k_m)_a \neq 1$$

Entsprechendes gilt für die beiden anderen Systeme, und wir erhalten

(i)
$$\begin{cases} \frac{\Delta E_{a,a}}{e} = 2(k_a)_a \Delta E', \\ \frac{\Delta E_{a,m}}{e} = [(k_a)_m + (k_m)_a] \Delta E', \\ \frac{\Delta E_{m,m}}{e} = 2(k_m)_m \Delta E'. \end{cases}$$

(k) $$\frac{\Delta E_{a,a}}{e} : \frac{\Delta E_{a,m}}{e} : \frac{\Delta E_{m,m}}{e} = 2(k_a)_a : [(k_a)_m + (k_m)_a] : 2(k_m)_m.$$

Da jedes vorangehende Glied der Proportion größer ist als das folgende [Gleichung (a)], so ist

(l) $$2(k_a)_a > (k_a)_m + (k_m)_a > 2(k_m)_m.$$

Da der Anteil an Atomen dem System die größere Stoßkapazität verleiht, so schreiben wir auch im System dem Atom die größere Stoßkapazität zu

$$(k_a)_m > (k_m)_a,$$

also

(m) $$2(k_a)_m > (k_a)_m + (k_m)_a > 2(k_m)_a.$$

Aus (l) und (m) folgt

$$(k_a)_a > (k_m)_a$$
$$(k_a)_m > (k_m)_m,$$

d. h. das Atom beim Stoße mit dem Atom oder Molekül nimmt mehr Energie auf als das Molekül beim Stoße mit dem Atom oder Molekül.

Über die Beziehung zwischen $(k_a)_a$ und $(k_a)_m$ bzw. $(k_m)_a$ und $(k_m)_m$ können wir mit derselben Bestimmtheit keine Aussagen machen; wäre aber $(k_a)_m > (k_a)_a$ und $(k_m)_a < (k_m)_m$, so könnte der Unterschied nur klein sein, da die Ungleichung (l) für einen großen Unterschied keinen Raum gibt. Es scheint aber wenig wahrscheinlich, daß das Atom im Systeme Atom × Atom eine geringere Erregung empfangen sollte als in dem Systeme Atom × Molekül (und entsprechend für das Molekül). Wir setzen also

$$(39) \qquad (k_a)_a \geqq (k_a)_m \lesseqgtr (k_m)_a \geqq (k_m)_m .$$

Nehmen wir an, wir dürften

$$(39a) \qquad \begin{cases} (k_a)_a = (k_a)_m = k_a \\ (k_m)_a = (k_m)_m = k_m \end{cases}$$

setzen, dann erhielten wir sehr einfache und übersichtliche Beziehungen

$$(n) \qquad \begin{cases} \dfrac{(\Delta E_a)_a}{e} = \dfrac{(\Delta E_a)_m}{e} = k_a \Delta E', \\ \dfrac{(\Delta E_m)_a}{e} = \dfrac{(\Delta E_m)_m}{e} = k_m \Delta E', \end{cases}$$

$$(40) \qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta E_{a,a}}{e} = 2 k_a \Delta E' \quad = 2 \Delta E'_a, \\ \dfrac{\Delta E_{a,m}}{e} = (k_a + k_m) \Delta E' = \Delta E'_a + \Delta E'_m, \\ \dfrac{\Delta E_{m,m}}{e} = 2 k_m \Delta E' \quad = 2 \Delta E'_m. \end{cases}$$

Unsere Annahme würde bedeuten, daß die Erregung, welche ein Teilchen durch den Stoß empfängt, nur von der Energie des Stoßes, also der Masse und der relativen Geschwindigkeit des anderen stoßenden Teilchens, aber nicht von dessen sonstigen Eigenschaften (z. B. seiner Schwingungsfähigkeit und der Verteilung der Ladungen in seinem Raumgitter) abhängt; und die Erregung des Systemes kann dann einfach als die Summe der Erregungen der beiden Teile bestimmt werden. Da die bis hierher festgestellten Tatsachen unserer Annahme genügen, so dürfen wir sie wenigstens als Gesetz der Annäherung gelten lassen, wenn es auch theoretisch nicht unwahrscheinlich ist, daß auch die besonderen Eigenschaften

des stoßenden Körpers einen Einfluß auf die Erregung des gestoßenen haben. Damit erhalten wir sehr einfache und übersichtliche Beziehungen, und es wird möglich sein, durch Messungen an homogenen Kanalstrahlen die Stoßkapazitäten zu bestimmen.

Wir gelangen also zu dem Satze: Die Erregung eines Teilchens beim Stoße ist abhängig von seiner durch die Stoßkapazität gemessenen Eigenschaft und proportional der Energie des Stoßes; sie ist aber in erster Ordnung unabhängig von der Natur und den Eigenschaften des anderen stoßenden Teilchens. Die Erregung des Systemes ist gleich der Summe der Erregungen seiner Teile; sie ist also proportional der Summe der Stoßkapazitäten seiner Teile und proportional der Energie des Stoßes.

Genauere Untersuchungen müssen darüber entscheiden, inwieweit die Stoßkapazität auch von der Natur des zweiten Teilchens bedingt wird.

Die Stoßkapazitäten nach der Größe geordnet folgen einander in derselben Ordnung wie die Schwingungskapazitäten, und es steht nichts im Wege, sie nicht nur als Ausfluß der gleichen Eigenschaften der Teilchen anzusehen, sondern sie einander gleichzusetzen. Die Schwingungskapazität, welche in Beziehung zum Ausgleichsvorgang nur das Verteilungsverhältnis ausdrückt, bekommt durch diese Gleichsetzung ebenfalls die Beziehung zu festen Maßstäben (und es würde auch keine Schwierigkeit machen, einem Teilchen in Berührung mit verschiedenen anderen Teilchen eine verschiedene Schwingungskapazität zuzuschreiben).

Die *Spannungseffekte der beiden Teilstrahlungen* S_r/B und S_b/B bieten theoretisch weniger Interesse wie jene der gesamten Ausstrahlung

$$\frac{S_r + S_b}{B}$$

Aus den Gleichungen folgt ein Einfluß der Geschwindigkeit auf das Glied

$$\frac{\vartheta(x)}{1 - a^{A/v}} \quad \text{oder} \quad \frac{x R}{a D}.$$

Indessen müssen wir den aus den Gesetzmäßigkeiten der Gesamtstrahlung gefolgerten Veränderungen von $\Delta E/e$ mit der Spannung einen größeren Einfluß zuschreiben. Die Beziehung ist recht kompliziert; wir wollen deshalb eine andere Be-

trachtung anwenden, welche etwas durchsichtiger ist. Durch Ansätze gleich denen, die zu Gleichung (25) geführt haben, und die wir in Gleichung (2), (4), (33) einführen, erhalten wir, wenn der Druck konstant bleibt

$$\frac{S_r}{B} = (\Delta E_r + \varkappa_r E_{b\,\min}) \text{ const},$$

$$\frac{S_b}{B} = (\Delta E_b + [\varkappa_b - 1] E_{b\,\min}) \text{ const}.$$

Es ist aber, wie oben angenommen

$$\Delta E_r = k_r \Delta E',$$
$$\Delta E_b = k_b \Delta E'.$$

Also

$$\frac{S_r}{B} = (k_r \Delta E' + \varkappa_r E_{b\,\min}) \text{ const}, \tag{41}$$

$$\frac{S_b}{B} = (k_b \Delta E' + (\varkappa_b - 1) E_{b\,\min}) \text{ const}, \tag{42}$$

k_r sehen wir aber nach unseren Ausführungen als von der Art des anderen Teilchens unabhängig an. Da die ruhenden Teilchen Moleküle sind, so ist also

$$k_r = k_m,$$

deshalb ist

$$k_r \Delta E' = \text{const};$$

$k_b \Delta E'$ ist dagegen veränderlich, weil die Art der stoßenden Teilchen sich mit der Entladungsspannung ändert. Also besteht der Ausdruck für S_r/B aus einem konstanten und einem variablen Teil, der Ausdruck für S_b/B aus zwei variablen Teilen; infolgedessen muß sich S_r/B mit veränderter Entladespannung weniger ändern als S_b/B; beide müssen abnehmen, wenn $\varkappa_b$ abnimmt (d. h. wenn der Anteil der Moleküle steigt), da auch $E_{b\,\min}$ wieder von $E_{b\,\max}$, also von $\varkappa_b$ abhängt. Mit dem Spannungseffekte ist aber immer zugleich ein Geschwindigkeitseffekt verbunden, durch welchen die freie Zeit verkürzt, $E_{b\,\min}$ heraufgesetzt und deshalb S_r gesteigert wird. Der Geschwindigkeitseffekt wirkt also dem reinen Spannungseffekte von S_r entgegen. Da aber der Geschwindigkeitseffekt im Wasserstoff immer hinter dem reinen Spannungseffekt zurücktritt, wird die Richtung der Veränderung von diesem bestimmt werden. Wir erwarten also, daß S_r/B mit wachsender Spannung ein wenig, S_b/B erheb-

lich stärker abnimmt. Diese Schlußfolgerungen werden durch die Tab. V, Spalte 2 u. 4, bestätigt.

Über den Druck-Spannungseffekt haben wir bereits auf p. 219 gesprochen.

Wir können die Effekte der Verhältnisse S_r/B und S_b/B auch in Beziehung zu dem Verhältnisse S_r/S_b setzen. Nach Gleichung (7) ist das mit der freien Zeit veränderliche Glied in den Gleichungen dieses Abschnittes gleich dem Verhältnis S_r/S_b oder S_b/S_r.

$$\frac{S_r}{S_b} = \frac{\vartheta(x)}{1 - a^{\Delta/\tau}}.$$

Also ist

$$(43) \qquad \left(\frac{S_r}{B}\right)_1 : \left(\frac{S_r}{B}\right)_2 = \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{1}{S_r/S_b} + 1}\right)_1 : \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{1}{S_r/S_b} + 1}\right)_2,$$

$$(44) \qquad \left(\frac{S_b}{B}\right)_1 : \left(\frac{S_b}{B}\right)_2 = \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{S_r}{S_b} + 1}\right)_1 : \left(\frac{\frac{\Delta E}{e} \cdot D}{\frac{S_r}{S_b} + 1}\right)_2,$$

$$(36a) \qquad \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_1 : \left(\frac{S_r + S_b}{B}\right)_2 = \left(\frac{\Delta E}{e} \cdot D\right)_1 : \left(\frac{\Delta E}{e} \cdot D\right)_2.$$

Wir können Gleichung (43) und (44) aber auch auf andere Weise ableiten, nämlich aus

$$\frac{S_r}{B} + \frac{S_b}{B} = \frac{S_r + S_b}{B},$$

$$\frac{S_r}{B} : \frac{S_b}{B} = \frac{S_r}{S_b}$$

und aus Gleichung (36a). Wir erhalten damit gewissermaßen eine Probe auf unsere Ableitungen. Ersetzen wir den Zähler von (43) und (44) nach Gleichung (36a) durch

$$\frac{S_r + S_b}{B},$$

so drücken diese Gleichungen übrigens auch die Methode aus, nach der Vegard die Teilstrahlungen aus der Gesamtstrahlung berechnet hat. Ich habe die Probe auch rechnerisch mit gutem Erfolge durchgeführt.

In den Effekten der Teilstrahlungen ist (außer dem von den Veränderungen von $\varkappa$ herrührenden reinen Spannungseffekt) immer ein doppelter Effekt enthalten: die vermuteten

oder möglichen Veränderungen von $\Delta E/e$ (d. h. die Veränderungen der Erregung in ihrer Abhängigkeit von Stoßenergie und Schwingungstemperatur) und die Abhängigkeit von dem Gliede

$$\frac{\vartheta(x)}{1-\alpha^{\Delta/v}},$$

welches mit der freien Zeit veränderlich ist. Es dürfte möglich sein, diese Effekte, die wir als *Stoßeffekt* und als *Zeit-* oder *Wegeffekte* unterscheiden wollen, auch experimentell zu trennen. Verändert man die Geschwindigkeit eines durch magnetische Auslese hergestellten homogenen Strahles durch ein elektrisches Feld und verändert gleichzeitig den Druck im umgekehrten Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\left(D_1 : D_2 = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2}\right),$$

so bleibt

$$\left(T_A = \frac{A}{v} = \frac{R}{vD}\right)$$

konstant; also bleibt auch

$$(1-\alpha^{\Delta/v})$$

konstant. Unter der Voraussetzung, daß $(\vartheta(x)_1 = \vartheta(x)_2)$ ist, verschwindet dann der Nenner aus Gleichung (34) und (35) und wir erhalten

$$\left(\frac{S_r}{B}\right)_{\Delta E_1} : \left(\frac{S_r}{B}\right)_{\Delta E_2} = \left(\frac{S_b}{B}\right)_{\Delta E_1} : \left(\frac{S_b}{B}\right)_{\Delta E_2} = \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_{\Delta E_1} : \left(\frac{S_r+S_b}{B}\right)_{\Delta E_2}$$
$$= \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_1 : \left(\frac{\Delta E}{e}\right)_2.$$

Wir erhalten somit einen reinen Effekt der Erregung.

Die Restenergie ($E_{b\,\min}$) ist in diesem Falle noch nicht konstant sie ist aber $\Delta E/e$ und der Stoßenergie proportional. Entwickeln wir die Energie des Systemes für eine Reihe aufeinanderfolgender Stöße, beginnend mit einem Stoße, bei welchem der bewegte Strahler noch dunkel ist, so erhalten wir nach n Stößen

$$E_{r\,\max} = x_r\{1 + \alpha^{\Delta/v} x_b + (\alpha^{\Delta/v} x_b)^2 + \ldots (\alpha^{\Delta/v} x_b)^{n-1}\}\Delta E,$$
$$E_{b\,\max} = x_b\{1 + \alpha^{\Delta/v} x_b + (\alpha^{\Delta/v} x_b)^2 + \ldots (\alpha^{\Delta/v} x_b)^{n-1}\}\Delta E_r$$
$$E_{b\,\min} = \alpha^{\Delta/v} E_{b\,\max}$$
$$= \{\alpha^{\Delta/v} x_b + (\alpha^{\Delta/v} x_b)^2 + \ldots (\alpha^{\Delta/v} x_b)^n\}\Delta E.$$

Da $(\varkappa_r + \varkappa_b = 1)$ ist, so ist $(\varkappa_b < 1)$, ebenso ist $(\alpha < 1)$; also ist die Reihe konvergent. Deshalb ist nach einer großen Zahl von Stößen

$$E_{b\,\min} = \lim_{n=\infty} \{\alpha^{A/v}\varkappa_b + \ldots (\alpha^{A/v}\varkappa_b)^n\}\,\Delta E$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{A/v}\varkappa_b} - 1}\,\Delta E.$$

Halten wir A/v und $\varkappa_b$ konstant (indem wir Dv in der geschilderten Weise und die Entladespannung konstant halten), so ist also $E_{b\,\min}$ der Erregung ΔE proportional. Es ist also proportional der Energie des Stoßes, wenn ΔE der Energie des Stoßes proportional ist.

Die Voraussetzung $(\vartheta(\varkappa)_1 = \vartheta(\varkappa)_2)$ ist erfüllt, wenn $(\vartheta(\varkappa) = \varkappa)$ ist, d. h. wenn der Ausgleich vollkommen ist. Wäre der Ausgleich nicht vollkommen, so verteilte sich die Restenergie $E_{b\,\min}$ nach einem Verhältnis k_r'/k_b', welches von der Berührungszeit und damit von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängt, und welches verschieden wäre von der Verteilung k_r/k_b der Erregung. Es wäre also

$$\vartheta(\varkappa) = \frac{E_{r\,\max}}{E_{b\,\max}} = \frac{k_r\,\Delta E + k_r'\,E_{b\,\min}}{k_b\,\Delta E + k_b'\,E_{b\,\min}}.$$

Ferner wäre

$$\left(\frac{k_r'}{k_b'}\right)_1 \neq \left(\frac{k_r'}{k_b'}\right)_2, \quad \text{dagegen} \quad \left(\frac{k_r}{k_b}\right)_1 = \left(\frac{k_r}{k_b}\right)_2,$$

also

$$\vartheta(\varkappa)_1 \neq \vartheta(\varkappa)_2.$$

Wird dagegen

$$\left(\frac{k_r'}{k_b'}\right)_1 = \left(\frac{k_r'}{k_b'}\right)_2 = \frac{k_r}{k_b} = \varkappa,$$

so ist

$$\vartheta(\varkappa)_1 = \vartheta(\varkappa)_2 = \varkappa = \text{const}.$$

Sind die drei Proportionen in Gleichung (45) einander gleich, so ist also das zugleich ein Beweis dafür, daß der Schwingungsausgleich vollkommen ist.

Unter dieser Voraussetzung bleibt somit, wenn wir A/v konstant halten, nur ein Effekt von $\Delta E/e$ übrig, welcher bedingt ist durch die Abhängigkeit der Erregung von der

Stoßenergie und von der durch den bewegten Strahler dem Systeme zugeführten Restenergie, d. h. von der Schwingungstemperatur des Systemes beim Stoße.

Zieht man jetzt diesen Vergleich bei verschiedenen Gasdrucken, so erhält man auf jeder Druckstufe einen verschiedenen Wert von $E_{b\,\min}$, während die Stoßenergie konstant bleibt. Man kann dadurch auch den Einfluß der Schwingungstemperatur von jener der Stoßenergie trennen. Wäre es möglich, bis zum Gasdrucke herunterzusteigen, bei denen der bewegte Strahler erlischt, so erhielte man einen Effekt von $\Delta E/e$ unabhängig von Schwingungsausgleich und Schwingungstemperatur.

Die Anordnung dieses Versuches hat auch Bedeutung für die Untersuchung des Verhältnisses S_r/S_b. Bei jedem Vergleiche unter verschiedenen Geschwindigkeiten aber gleichen freien Zeiten, bleibt S_r/S_b nach Gleichung (7) konstant, wenn $\vartheta(x)$ konstant bleibt. Man hat damit noch eine Kontrolle für die Zulässigkeit der Annahme eines vollkommenen Ausgleiches.

Da die freien Zeiten bei den Vergleichen konstant gehalten werden, so darf auch eine Störung durch die Farbeneffekte nicht vermutet werden.

Zur Technik des Versuches ist noch zu bemerken, daß man die Streuung, welche sich aus der magnetischen Ablenkung ergibt, durch ein magnetisches Gegenfeld wieder rückgängig machen kann, nachdem man einen beliebigen Teil des geladenen Anteiles abgesondert hat. Man hat dadurch die Möglichkeit, größere Teile des magnetischen Spektrums oder auch den ganzen abgelenkten Teil des Kanalstrahles zu verwenden, um größere Lichtstärken zu erzielen, sofern man nicht Wert darauf legt, außer einer gleichmäßigen Geschwindigkeitsänderung auch eine einheitliche Geschwindigkeit zu erzielen.

Unsere Untersuchung dieses Abschnittes führt zu folgendem Ergenis:

Die Erregung (oder der Zuwachs), das ist die Menge von Energie, welche beim Stoße aus der kinetischen Form in die Schwingungsform umgesetzt wird, ist der Stoßenergie einfach proportional. Deshalb ist auch die Gesamtstrahlung, welche

immer der Erregung gleich ist, der kinetischen Energie des Kanalstrahles einfach proportional. Die Erregung ist für Atome und Moleküle verschieden groß, und zwar für die Atome größer als für die Moleküle; sie folgt aber für jede Art von Teilchen dem Gesetze der Proportionalität mit der Stoßenergie und ist in erster Ordnung unabhängig von der Natur des anderen stoßenden Teilchens. Die Erregung des Systemes (ruhendes + bewegtes Teilchen) ist gleich der Summe der Erregungen seiner Teile. Den Proportionalitätsfaktor, welcher die Beziehung zwischen Erregung und Stoßenergie für das einzelne Teilchen ausdrückt, nennen wir Stoßkapazität; die Stoßkapazität darf der Schwingungskapazität gleichgesetzt werden.

Steigern wir die Spannung, so nimmt die Summe der Erregungen und damit die gesamte Ausstrahlung ab, da die Moleküle im Kanalstrahl zahlreicher werden und deshalb die Summe aller Stoßkapazitäten abnimmt, so daß weniger Schwingungsenergie erzeugt wird.

Steigern wir den Druck, so nimmt die Summe der Erregungen proportional der Zahl der Stöße, also proportional dem Gasdrucke zu. Deshalb nimmt auch die gesamte Ausstrahlung, welche der Summe aller Erregungen gleich ist, mit der Proportion des Gasdruckes zu. Mit steigendem Drucke werden aber die freien Wege verkürzt; das bewegte Teilchen besitzt also beim Stoße eine höhere Schwingungstemperatur, es geht deshalb mehr Energie auf den ruhenden Strahler über; die Schwingungsenergie des ruhenden Strahlers und seine Ausstrahlung steigen deshalb stärker, jene des bewegten Strahlers weniger stark als der Gasdruck.

Eine Abhängigkeit der Erregung von der Schwingungstemperatur ist nicht mit Sicherheit nachzuweisen.

XIV. Strahlung und Ladung.

Vegard bezieht die Ladung, welche der Kanalstrahl mit sich führt, auf die Einheit seiner kinetischen Energie. Spalte 7 in Tab. V zeigt die Ergebnisse seiner Messungen. Man erkennt, daß die Ladung abnimmt, wenn die Spannung steigt oder der Gasdruck sinkt. Durch Division der Werte von Spalte 7 in die entsprechenden Werte von Spalte 1, 3, 5 erhält man das Verhältnis der Strahlung zur Ladung (S/L), welches in Spalte 9, 11, 13 dargestellt ist. Die Spalten 10, 12, 14 geben den Spannungseffekt dieses Verhältnisses, wobei

der bei der niedrigsten Spannung erreichte Wert gleich Eins gesetzt ist. Tab. VI stellt in Spalte 12, 13, 14 den Druckeffekt des Verhältnisses S/L dar. In allen Fällen sind wiederum die Verhältnisse

$$\frac{S_r}{L}, \quad \frac{S_h}{L}, \quad \frac{S_r + S_h}{L}$$

unterschieden, c und c_1 sind Konstanten.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Druckeffekte des Verhältnisses L/B (Tab. VI, Spalte 10, 11). Die Ladung nimmt mit steigendem Drucke zu, und zwar viel stärker, als der Proportion des Gasdruckes entspricht. Im Mittel der drei Spannungen ist

$$\left(\frac{L}{B}\right)_{nD} : \left(\frac{L}{B}\right)_{D} = 3{,}75 : 1 .$$

Das Verhältnis der Drucke beträgt

$$nD : D = 2{,}86 : 1 .$$

Qualitativ stimmen diese Messungen mit älteren Beobachtungen Wiens überein, nach denen ebenfalls das Verhältnis der positiven Teilchen zu den ungeladenen mit steigendem Drucke zunimmt. Vegards Beobachtungen unterscheiden sich aber dadurch, daß die Zunahme der Ladung die Proportion des Gasdruckes übersteigt.

Der Schlüssel zum Verständnis der Ladungsverhältnisse des Kanalstrahles ist durch die bekannte Entdeckung W. Wiens gegeben. Danach ist die Ladung der einzelnen Teilchen nicht konstant. Jedes Teilchen ändert auf seinem Wege dauernd seinen Ladungszustand, indem es aus dem positiven in den neutralen und wieder in den positiven Zustand übergeht, unter Umständen auch vorübergehend negative Ladung annimmt. Wenn diese Vorgänge ungeordnet sind, so muß sich dabei notwendig nach Zurücklegung einer gewissen Strecke ein Gleichgewicht zwischen geladenen und ungeladenen Teilchen herstellen. Ist dieses Gleichgewicht erreicht, so müssen die Zahlen der geladenen und der ungeladenen Teilchen in dem gleichen Verhältnis zueinander stehen, wie die mittleren Wege, welche jedes einzelne Teilchen in geladenem und ungeladenem Zustande zurückliegt. Vegards Beobachtungen

bedeuten also zugleich, daß das Verhältnis des mittleren „positiven Weges“ Λ_p zu dem mittleren „ungeladenen Wege“ Λ_u mit wachsendem Drucke größer wird, wobei unentschieden bleibt, ob der geladene Weg größer oder der ungeladene Weg kleiner wird. Nehmen wir an, daß einer der Wege nach den Gesetzen der Gastheorie in umgekehrter Proportion zu der Gasdichte steht, so muß der andere Weg von dem Gesetze abweichen, wobei unentschieden bleibt, ob der geladene Weg weniger oder der ungeladene stärker abnimmt, als der Proportion des Gasdruckes entspricht, oder ob $\Lambda_p . D$ größer oder $\Lambda_u . D$ kleiner wird.

Diese Frage wird wiederum durch Beobachtungen W. Wiens[1]) entschieden. W. Wien hat die „geladenen“ und „ungeladenen“ Wege der Kanalstrahlen unmittelbar durch Messungen bestimmt. Er entfernt durch elektrische Felder alle geladenen Teilchen aus dem Kanalstrahle und mißt in einiger Entfernung von diesen Feldern die neugebildete Ladung. Er erhält dabei zunächst einen Wert Λ, der definiert ist durch

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda_p} + \frac{1}{\Lambda_u} .$$

Dieser Wert Λ nimmt mit steigendem Gasdrucke weniger ab, als der Proportion des Gasdruckes entspricht. Beziehen wir die unter verschiedenen Gasdrucken gemessenen Werte der Weglängen mit Wien nach der kinetischen Gastheorie auf den gleichen Gasdruck, so wächst also ΛD mit steigendem Drucke. Es ist

$$\frac{1}{\Lambda D} = \frac{1}{\Lambda_p D} + \frac{1}{\Lambda_u D} .$$

Wenn $\Lambda_p . D$ und $\Lambda_u . D$ konstant bleiben, so bleibt auch ΛD konstant. Da ΛD mit steigendem Drucke wächst, so muß wenigstens eine der beiden Komponenten wachsen. Nach den Schlüssen, die wir aus den von Vegard beobachteten Veränderungen von L/B gezogen haben, kann aber nur $\Lambda_p . D$ wachsen. Wir müssen also Vegards Beobachtungen aus den Veränderungen der *positiven* Wege erklären. Wenn deshalb auch $\Lambda_u . D$ inkonstant sein sollte, so muß die Veränderung

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 39. p. 519. 1912.

von $A_p . D$ jedenfalls so viel größer sein, daß sie den Veränderungen der Summe die Richtung gibt.

Wien hat aber aus seinen Beobachtungen auch $A_p D$ und $A_u D$ direkt berechnet und kommt ebenfalls zu dem Ergebnis, daß $A_p D$ mit steigendem Drucke wächst. Es steigt in dem von Wien angewendeten Druckintervalle etwa auf den doppelten Wert. Qualitativ stimmen also seine Beobachtungen mit denen Vegards überein. Quantitativ besteht kein Widerspruch; denn wenn auch die Veränderungen von $A_p D$ bei Wien hinter den Veränderungen von B zurückbleiben, so genügt zur Erklärung, daß sie bei anderen Gasdrucken gemessen sind (0,004—0,04 mm Hg bei Wien; 0,085—0,1 mm Hg bei Vegard). Wir sind nur genötigt, anzunehmen, daß die Beziehung zwischen positivem Wege und Gasdruck sich mit dem Gasdruck ändert, und zwar in dem Sinne, daß die Veränderungen der positiven Wege sich mit sinkendem Gasdrucke der umgekehrten Proportion des Gasdruckes nähern (oder daß $A_p D$ nähernd konstant wird).

Damit löst sich auch der Widerspruch gegen die Feststellungen anderer Beobachter. Die magnetische Analyse des Kanalstrahles hat gezeigt, daß der positive Anteil bei sehr niedrigen Gasdrucken sehr stark überwiegt. Es muß also geschlossen werden, daß, wenn wir den Gasdruck über die von W. Wien angewendeten Werte weiter sinken lassen, schließlich eine Umkehrung der Beziehung zwischen positivem Wege und Gasdruck eintritt, derart, daß $A_p . D$ von dem Umkehrpunkte an mit sinkendem Drucke wieder steigt, oder daß der positive Weg wieder stärker steigt, als der umgekehrten Proportion des Gasdruckes entspricht.

Wir beginnen mit der Deutung der Vegardschen Messungen. Wir haben geschlossen, daß L/B sich deshalb ändert, weil A_p nicht in der umgekehrten Proportion des Gasdruckes abnimmt. Nun ist L der Zahl der geladenen Teilchen oder den positiven Wegen, B dem gesamten Strome oder der Summe der geladenen und ungeladenen Wege proportional. Also

$$\text{(I)} \qquad \frac{L}{B} = \frac{i_p}{i_p + i_u} = \frac{A_p}{A_p + A_u} = \frac{A_p D}{A_p D + A_u D} .$$

Nehmen wir an, daß wenigstens A_u den Gasgesetzen gehorcht, daß also $A_u D$ konstant ist, so müßte L/B immer noch hinter

den Veränderungen des Gasdruckes zurückbleiben, wenn A_p eine vom Gasdrucke unabhängige Konstante wäre. Da L/B aber stärker wächst als der Gasdruck, so muß in dem von Vegard angewendeten Druckintervalle A_p auch seinem *absoluten Werte* nach mit zunehmendem Drucke wachsen.

W. Wien hat seine Messungen der Weglängen auf eine Theorie aufgebaut, welche von der Voraussetzung ausgeht, daß die Umladungen, und zwar sowohl die Lostrennung wie die Wiederanlagerung der Elektronen (Elektrisierung und Neutralisierung) durch die Zusammenstöße der bewegten Teilchen des Kanalstrahles mit den ruhenden Teilchen des Gases verursacht werden, wobei offenbar die Vorstellung zugrunde liegt, daß die Elektronen zwischen den beiden zusammenstoßenden Teilchen ausgetauscht werden. Elektrisierung und Neutralisierung sind danach gleichartige Vorgänge, wobei nur das bewegte und das ruhende Teilchen die Rolle tauschen. Aus dieser Voraussetzung würde folgen, daß *beide* Vorgänge in gerader Proportion zu der Zahl der Zusammenstöße, *beide* Wege also in umgekehrter Proportion zum Gasdrucke stehen müssen. Solange die Abweichungen von diesem Gesetze innerhalb mäßiger Grenzen bleiben, könnten wir sie irgendeiner unbekannten sekundären Ursache zuschreiben. Wenn aber die Vorgänge, welche die positiven Wege begrenzen, d. h. die Neutralisierungen, mit steigendem Gasdrucke nicht nur relativ, sondern auch absolut seltener werden, so kann wenigstens diese Art von Vorgängen nicht durch die Zusammenstöße verursacht sein. Scheiden die Zusammenstöße aus, so bleibt nur noch die Möglichkeit der Neutralisierung durch Anlagerung freier Elektronen. Wir greifen mit Einführung dieser Annahme nur auf die ursprüngliche Auffassung Wiens zurück.[1])

Die freien Elektronen, welche bei den Neutralisierungen in Wirkung treten, müssen durch irgend welche Vorgänge im Strombette der Kanalstrahlen erzeugt werden. Die einzigen Vorgänge, welche wir dafür verantwortlich machen können, sind aber die elektrisierenden Zusammenstöße; also müssen bei diesen Zusammenstößen freie Elektronen erzeugt werden (wobei die Elektronen sowohl von den stoßenden wie von den gestoßenen Teilchen stammen können). Die Zahl der

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 80. p. 367. 1910.

erzeugten Elektronen steht offenbar in gerader Proportion mit der Zahl der Zusammenstöße und mit dem Gasdrucke. Wenn trotzdem die Neutralisationen mit steigendem Drucke abnehmen, so müssen die Elektronen bei steigendem Drucke rascher verschwinden, als sie erzeugt werden, oder ihre Lebensdauer muß stärker abnehmen, als ihre Erzeugung zunimmt.

Um unsere Erwägungen mathematisch zu formulieren, schließen wir uns an die Theorie Wiens an, wobei wir nur die in unserer Arbeit gewählten Bezeichnungen beibehalten. Es sei i die Stärke des Kanalstrahlenstromes, das ist die Zahl der Teilchen, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Strombettes treten; i_p sei die Stärke des positiven, i_u des ungeladenen Stromes; n, n_p, n_u sei die Anzahl der Teilchen in der Einheit der in der Stromrichtung gemessenen Strecke, bezogen auf die Einheit des Querschnittes q des Kanalstrahles; dann ist

$$\frac{i}{q} = nv.$$

Setzen wir den stationären Zustand der Umladungen voraus, nehmen wir also an, daß der positive und der ungeladene Strom im Fortschreiten längs des Kanalstrahles konstant bleiben, so ist auch für einen endlichen Abschnitt des Kanalstrahles

$$\text{(a)} \qquad \frac{i_p}{q} = n_p v_p; \quad \frac{i_u}{q} = n_u v_u; \quad \frac{i_p}{i_u} = \frac{n_p}{n_u}.$$

Bezeichnet dn die Veränderung der Teilchenzahl in der Zeit dt, dann ist also

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dn_p}{dt} = \dfrac{di_p}{dt} \cdot \dfrac{1}{q v_p}, \\ \dfrac{dn_u}{dt} = \dfrac{di_u}{dt} \cdot \dfrac{1}{q v_u}, \end{cases}$$

da die Teilchen die Ladung wechseln, ohne die Geschwindigkeit zu ändern, so ist ($v_p = v_u$); also

$$\text{(b')} \qquad \frac{dn_p}{dt} : \frac{dn_u}{dt} = \frac{di_p}{dt} : \frac{di_u}{dt},$$

ferner ist

$$n_p + n_u = n$$
$$i_p + i_u = i.$$

Bedingung des Gleichgewichtes der Vorgänge ist, daß in gleichen Zeiten gleichviel positive Teilchen durch Elektrisierung der ungeladenen und gleichviel ungeladene durch Neutralisierung der positiven Teilchen entstehen, also

$$\text{(c)} \qquad \frac{dn_p}{dt} = \frac{dn_u}{dt}.$$

Die Zahl der entstehenden *positiven* Teilchen ist proportional der Zahl der neutralen Teilchen, aus denen sie entstehen, und der ruhenden Teilchen, mit denen sie zusammenstoßen; also, wenn D die Gasdichte bezeichnet

$$\text{(d)} \qquad \frac{dn_p}{dt} = c_1 n_u D.$$

Es entstehen um so mehr *ungeladene* Teilchen, je größer die Zahl der positiven Teilchen ist, aus denen sie entstehen, und die Zahl N_e der freien Elektronen, mit denen sich diese verbinden.[1])

$$\text{(e)} \qquad \frac{dn_u}{dt} = c_2 n_p N_e.$$

Aus (c), (d), (e) folgt

$$c_1 n_u D = c_2 n_p N_e,$$

$$\text{(f)} \qquad \frac{n_p}{n_u} = c_3 \frac{D}{N_e}.$$

Bedingung des Gleichgewichtes der Vorgänge ist weiter, daß ebenso viele freie Elektronen verschwinden als neu gebildet

---

1) In Gleichung (b) ist die Bedingung des zeitlichen Gleichgewichts der Vorgänge eingeführt, um in Übereinstimmung mit Gleichung (g) zu bleiben, der Gleichgewichtsbedingung für das Entstehen und Vergehen der Elektronen. Wir kämen zu den gleichen Resultaten, wenn wir hier die Bedingung des räumlichen Gleichgewichtes einführten, von der Wien ausgeht, also etwa

$$\frac{di_p}{dx} = \frac{di_u}{dx}$$

setzten. Die Bedingung des räumlichen Gleichgewichtes ist aber in Gleichung (d) und (e) enthalten. Ist der stationäre Zustand der Umladungen noch nicht erreicht, so gehören n_u und n_p auf der rechten Seite dieser Gleichungen einem anderen Querschnitt des Kanalstrahles an wie n_u und n_p auf der linken Seite. n_p/n_u in Gleichung (f) ist dann nicht das Verhältnis der Zahlen am Orte der Beobachtung.

werden. Also ist

(g) $$\left(+\frac{dN_e}{dt}\right)_1 = \left(-\frac{dN_e}{dt}\right)_1.$$

Die Neubildung der Elektronen geschieht durch die elektrisierenden Stöße aus den ruhenden und den bewegten Teilchen und ist der Zahl dieser Stöße proportional. Es ist wahrscheinlich, daß ein Unterschied in der Wirkung der Stöße für die verschiedenen Anteile der Kanalstrahlen besteht; für unseren Fall ist der Unterschied des geladenen und ungeladenen Anteils wichtig; denn wir müssen entscheiden, ob wir die Zahl der Elektrisierungsvorgänge dem ungeladenen Anteil oder dem gesamten Kanalstrahlenstrome gleichsetzen wollen. Die positiven Teilchen dürften nun weit seltener ein Elektron abgeben als die neutralen Teilchen; aber sie dürften nicht so viel seltener ein ruhendes Teilchen elektrisieren. Wenn man die Wahrscheinlichkeit, daß ein ruhendes oder ein bewegtes Teilchen ein Elektron abgibt, als gleich ansieht, so dürften die positiven bewegten Teilchen also wenigstens halb soviel Elektronen erzeugen wie die ungeladenen. Da die Zahl der positiven Teilchen bei den angewendeten Drucken aber überhaupt geringer ist als der ungeladenen, so dürften wir diesen Unterschied vernachlässigen, ohne die Fehlergrenze der Versuche zu überschreiten, sicher aber, ohne die qualitative Gesetzmäßigkeit zu verwischen. Wir setzen also die elektrisierenden Stöße pro Querschnittseinheit proportional der Dichte j des Gesamtstromes. Ferner müssen sie der Gasdichte proportional sein.

(h) $$\left(+\frac{dN_e}{dt}\right)_1 = c_4 j D = c_4 \frac{i}{q} D.$$

Es verschwinden in gleichen Zeiten um so mehr Elektronen, je mehr Elektronen vorhanden sind und je kürzer die Lebensdauer T_e eines Elektrons ist.

(i) $$\left(-\frac{dN_e}{dt}\right)_2 = c_5 \frac{N_e}{T_e},$$

Aus (g), (h), (i) folgt

$$\frac{iD}{q} = \frac{c_5}{c_4} \frac{N_e}{T_e},$$

j) $$N_e = c_6 j D T_e = c_6 \frac{iDT}{q}.$$

Aus (j), (f) folgt

$$\text{(II)} \qquad \frac{n_p}{n_u} = C_1 \frac{1}{j\,T_e} = C_1 \frac{q}{i\,T_e}.$$

Die Lebensdauer der Elektronen hängt nun offenbar vom Gasdrucke ab; sie wird geringer sein, wenn die Entfernung der Moleküle geringer ist, an welche sie sich anlagern. Bezeichnen wir mit $\varrho\,(D)$ eine Funktion, welche sich in gleichem Sinne mit D ändert, so ist

$$\text{(k)} \qquad T_e \sim \frac{1}{\varrho\,(D)},$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{n_p}{n_u} = C_1 \frac{\varrho\,(D)}{j} = C_1 \frac{q\,\varrho\,(D)}{i}.$$

Aus Vegards Messungen kennen wir die Zahlenwerte für das Verhältnis L/B. Es ist aber nach Gleichung (I)

$$\frac{L}{B} = \frac{i_p}{i} C_2 = \frac{i_p}{i_p + i_u} C_2$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{i_u}{i_p}} C_2$$

und nach Gleichung (a), (III)

$$\text{(IV)} \qquad \frac{L}{B} = \frac{1}{1 + \frac{i}{q\,\varrho\,(D) \cdot C_1}} \cdot C_2.$$

Da i_p unter den für die Beobachtung des Kanalstrahlenlichtes günstigen Drucken erheblich kleiner ist als i_u, so können wir in erster Annäherung i_p in der Summe des Stromes $(i_p + i_u)$ vernachlässigen und erhalten

$$\frac{L}{B} = \frac{i_p}{i_u} C_2 = \frac{n_p}{n_u} C_2,$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{L}{B} = \frac{q\,\varrho\,(D)}{i} C.$$

Das Verhältnis $\frac{\text{Ladung}}{\text{Bewegungsenergie}}$ ändert sich also in umgekehrter Proportion mit der Stromdichte und in gerader Proportion mit der Funktion $\varrho\,(D)$ oder in umgekehrter Proportion mit

der Lebensdauer der Elektronen. Für den reinen Druckeffekt gilt

$$\frac{q}{i} = \text{const},$$

$$\text{(VI)} \qquad \left(\frac{L}{B}\right)_D = \frac{\text{const}}{T_e} = \varrho(D) \cdot \text{const},$$

$$\text{(VIa)} \qquad \left(\frac{L}{B}\right)_{D_1} : \left(\frac{L}{B}\right)_{D_2} = \varrho(D_1) : \varrho(D_2).$$

Wenn also L/B stärker wächst als der Gasdruck, so muß auch $\varrho(D)$ stärker wachsen oder die Lebensdauer der Elektronen muß stärker abnehmen, als der Proportion des Gasdruckes entspricht. Wenn wir die Elektronen und die Moleküle als raumfüllende Körper betrachten, welche aneinander haften bleiben, wenn das eine in den von dem anderen eingenommenen Raum eindringt, wenn wir also die Anschauungen der klassischen Gastheorie anwenden, so muß

$$\frac{1}{T_e} \sim D$$

sein. In diesem Falle wäre

$$\left(\frac{L}{B}\right)_D = D \cdot \text{const}.$$

Die Ladung nähme in der Proportion des Gasdruckes zu, und die Zahl der freien Elektronen wäre nach Gleichung (i), (j) eine vom Drucke unabhängige Konstante. Dieser Grenzfall dürfte bei sehr hohen Verdünnungen nahe erreicht sein. Werden aber die mittleren Entfernungen zwischen Elektronen und Molekülen klein, so müssen die zwischen ihnen wirkenden anziehenden Kräfte zur Geltung kommen, Kräfte, welche mit dem Quadrate oder einer höheren Potenz der Entfernung abnehmen. Die Veränderungen der Funktion $\varrho(D)$ steigen dann über die Proportion von D und zwar um so rascher, je höher D steigt.

L/B steigt also stärker als der Gasdruck, weil in den mittleren, den Gasdrucken der Versuche entsprechenden Entfernungen die anziehenden Kräfte zwischen Elektronen und Molekülen wirksam sind.

Voraussetzung unserer Ansätze ist, daß die Zahl der freien Elektronen nur durch Erzeugung und Anlagerung verändert wird. Wenn also Elektronen von dem Orte der Be-

obachtung auswandern (diffundieren), so müssen sie durch ebenso viele einwandernde Elektronen ersetzt werden. Ganz streng gelten unsere Ansätze deshalb nur für Kanalstrahlen von unendlichem Querschnitte. Setzen wir bei endlichem Querschnitte den Gasdruck dauernd herab, so vergrößern wir die freien Wege der Elektronen und erhöhen die Diffusion. Es wandern also immer mehr Elektronen aus dem Strombette des Kanalstrahles in andere Gebiete des Gases und an die Glaswand. Erlangt die Zunahme der Abwanderung bei sinkendem Gasdrucke schließlich einen stärkeren Einfluß auf die Zahl der freien Elektronen als die Zunahme der Lebensdauer, so müssen die freien Elektronen bei sinkendem Gasdrucke schließlich wieder abnehmen, die geladenen Wege also wieder ansteigen. So erklärt es sich, daß der geladene Anteil bei sehr starker Verdünnung wieder zunimmt und schließlich das Übergewicht erlangt. Gehen wir schrittweise von den Drucken der Vegardschen Versuche zu den niedrigsten Drucken über, so wird die Abnahme der Ladungen und der positiven Wege bei sinkendem Gasdrucke, die wir aus Vegards Beobachtungen gefolgert haben, nachlassen über einen Punkt, in dessen Nähe L/B dem Gasdrucke proportional ist, bis zu einem Wendepunkte, in dessen Nähe L/B bei Veränderungen des Gasdruckes konstant bleibt, um dann unterhalb des Wendepunktes bei sinkendem Drucke wieder zu steigen. So wird erklärt, daß Wien, der bei niedrigeren Drucken als Vegard gearbeitet hat, ein geringeres Ansteigen der geladenen Wege mit der Spannung festgestellt hat. Alle drei Beobachtungen (Vegards, Wiens und der mit magnetischer Ablenkung arbeitenden Beobachter) fügen sich also den gleichen Voraussetzungen.

Ist unsere Erklärung richtig, so muß nach Gleichung (V) der geladene Anteil des Kanalstrahles auch zunehmen, wenn man den Querschnitt des Kanalstrahles vergrößert, ohne die Stromstärke zu verändern; bei hohen Verdünnungen (bei denen die Diffusion Einfluß erlangt) muß er zunehmen, wenn man den Querschnitt verkleinert und die Stromdichte konstant hält.

Bei den Versuchen unter sehr niedrigen Drucken ist noch folgendes zu berücksichtigen. Alle Teilchen des Kanalstrahles beginnen ihre Bahn in positiv geladenem Zustande. Das Gleichgewicht wird erst nach einer gewissen Strecke

(unter Umständen freilich bereits vor der Kathode) erreicht, wahrscheinlich auch erst nach einigen Schwankungen um den stationären Wert der Verteilung. Setzen wir den Druck herab, so verkürzen wir innerhalb eines gewissen Druckintervalles die positiven Wege, rücken also den Punkt, an welchem die stationäre Verteilung das erstemal erreicht ist, näher an die Kathode heran. Von dem Augenblicke an aber, wo die positiven Wege mit sinkendem Drucke wieder wachsen, entfernt sich auch dieser Punkt dauernd von der Kathode. Wenn wir mit dem Meßapparate dieser Bewegung nicht folgen, so werden wir schließlich in ein Gebiet kommen, in welchem die meisten Teilchen noch ihre ursprüngliche Ladung haben. Die Messungen bei sehr niedrigem Drucke dürften also auch deshalb so hohe Ladungen der Strahlen ergeben, weil sie nicht im Gebiete des Gleichgewichtes der Vorgänge gemacht sind, und die Ladungen dürften abnehmen, wenn man den Faradayzylinder weiter von der Kathode entfernt.

Es besteht noch ein Widerspruch zwischen unserer Erklärung und gewissen Versuchen Wiens.[1]) Wien hat die Frage geprüft, welchen Einfluß der Ionisierungszustand des Gases, also die Menge der freien Elektronen, auf die Weglängen hat. Er hat zu diesem Zwecke durch sekundäre Ursachen (ein glühendes Platinnetz, eine besondere Entladung) eine starke Ionisierung des Gases erzeugt, aber keinen Einfluß auf das Verhältnis zwischen geladenen und ungeladenen Teilchen festgestellt. Wenn wir aber annehmen, daß die Erzeugung der Elektronen durch den Kanalstrahl selbst

$$\left(+\frac{dN_e}{dt}, \text{ Gleichung (g)}\right)$$

pro Raumeinheit erheblich größer ist als die Erzeugung von Elektronen durch die sekundäre Ursache, so kann der Zuwachs, welchen die Zahl der Elektronen durch diese sekundäre Ursache erfährt, innerhalb des Kanalstrahlenbettes ohne wesentlichen Einfluß sein. Dabei ist sehr wohl möglich, daß die außerhalb des Strahles gemessene Ionisierung des Gases sehr stark gesteigert ist.

Endlich ergibt sich, wie bereits bei der Erläuterung der Abhängigkeit der Erregung von der Schwingungstemperatur

1) W. Wien, l. c. p. 538.

(p. 218) gezeigt wurde, daß auch der ungeladene Weg der Teilchen dem Gasdrucke nicht vollkommen proportional sein kann, weil er außer von der Energie des Stoßes auch von der Restenergie $E_{1\,\min}$ abhängt.

Zum genaueren Verständnis des Mechanismus der Umladevorgänge und ihrer Abhängigkeit vom Drucke möchte ich schließlich noch eine Bemerkung machen: Unsere Erklärung verlangt, daß nach einer Drucksteigerung weniger freie Elektronen an die bewegten Teilchen, mehr freie Elektronen an die ruhenden Teilchen gehen. Durch eine Drucksteigerung wird also die Zahl der dem ruhenden Gase in der Zeit zuwachsenden negativen Ladungen vermehrt. Bestand vorher, d. h. bei dem niederen Drucke, ein Gleichgewicht aller Vorgänge, so würde durch diesen Zuwachs eine dauernde Zunahme der negativen Ladungen im ruhenden Gase eintreten, wenn das Gleichgewicht nicht durch Veränderung irgendeines anderen Vorganges wieder hergestellt würde. Da die Steigerung der Ladungen nicht unbegrenzt sein kann, so muß eine solche Kompensation eintreten. Wenn keine andere Kompensation einträte, so würde das ruhende Gas, nachdem es einen gewissen Grad negativer Ladung erreicht hat, nicht mehr so leicht freie Elektronen annehmen, und die erzeugten Elektronen würden jetzt wieder in größerer Zahl an die bewegten Gasteilchen gehen. Dann würde aber mit der Herstellung des Gleichgewichtes auch der alte Ladungszustand im Kanalstrahl wieder hergestellt werden, und unsere Erklärung der Veränderungen dieses Ladungszustandes wäre undurchführbar. Die Schwierigkeit löst sich durch zwei Erwägungen. Mit dem Verschwinden der Elektronen an die neutralen ruhenden Gasteilchen wächst auch die Zahl der *positiv* geladenen Teilchen im ruhenden Gase, da auch die im ruhenden Gase erzeugten positiven Teilchen ebenso wie die bewegten positiven Teilchen weniger freie Elektronen finden. Diese positiven Moleküle des ruhenden Gases neutralisieren mit den negativen durch Austausch der Ladungen. So wird das Gleichgewicht der Vorgänge nach einer Drucksteigerung bei einem höheren Werte der geladenen ruhenden Gasteilchen und bei einem niederen Werte der freien Elektronen wieder hergestellt, indem zugleich die Lebensdauer der durch die Anlagerung schwerer beweglich gewordenen La-

dungen wächst. Hiernach entsteht also durch die Anlagerung der Elektronen gar keine negative Ladung im Gase, sondern nur eine Zunahme der Zahl der (positiv und negativ) geladenen Moleküle. Wenn wir diese Vorstellung weiter verfolgen, so werden wir allerdings finden, daß die Kompensation keine vollständige ist, weil die Veränderungen im Ladungszustande des Kanalstrahles selbst nicht kompensiert werden. Es wird deshalb ein mit dem Drucke veränderlicher Überschuß von Ladungen im Gase übrigbleiben. Aber dieser Überschuß ist im allgemeinen *positiv* geladen, da alle Teilchen des Kanalstrahles im Beginne ihrer Bewegung positiv geladen sind, und da sie dadurch, daß sie neutralisieren, ihre positive Ladung an das umgebende Gase weitergeben. Der positive Überschuß des ruhenden Gases nimmt ab, wenn die positive Ladung des Strahles zunimmt. Nur unter besonderen Bedingungen (bei starker Diffusion der Elektronen oder bei einem starken Unterschiede des Gasdruckes im Beobachtungs- und Entladungsraume, derart, daß der Strahl beim Übergang in den Beobachtungsraum an positiver Ladung zunimmt) dürfte ein negativer Überschuß im Gase bestehen. Der Überschuß (des einen oder anderen Vorzeichens) wandert in der Richtung des durch den Kanalstrahl erzeugten elektrischen Gefälles, um zum Teil an den Elektroden (Kathode oder Auffangelektrode), zum Teil an den Teilchen des Kanalstrahles zu neutralisieren.

Ich vermute aus diesen Erwägungen, daß die Effekte ein wenig gesteigert werden, wenn man die Ladungen des ruhenden Gases durch ein den Weg des Kanalstrahles umgebendes Netz zur Erde leitet.

Das Verhältnis L/B hat ferner einen starken Spannungseffekt (Tab. V, Spalte 7, 8). Die Ladung pro Einheit der Bewegungsenergie nimmt ab, wenn die Spannung steigt. Das bedeutet nach unserer Auffassung, daß die Ladung abnimmt, wenn die Zahl der Moleküle im Kanalstrahle steigt. Mit der Zunahme der Moleküle nimmt die Zahl der ladungsfähigen Teilchen im Strahle pro Einheit der Bewegungsenergie ab, weil die Bewegungsenergie des einzelnen Teilchens im Verhältnis seiner Masse zunimmt. Mit der Abnahme der Teilchen muß aber im gleichen Verhältnisse die Ladung des Strahles abnehmen; sie kann sich aber nicht stärker ändern,

als der Änderung der Teilchenzahl entspricht. Hierfür gibt es eine Grenze: im reinen Atomstrahle und im reinen Molekülstrahle steht die Zahl der Teilchen pro Einheit der Bewegungsenergie im umgekehrten Verhältnis ihrer Massen, d. h. im Verhältnis 2:1. In dem von Vegard verwirklichten Falle aber wird die Proportion, die nur ein außerhalb des experimentell Möglichen liegenden Grenzfall bezeichnet, nicht nur erreicht, sondern sogar überschritten; die Ladung sinkt im Maximum auf ein Drittel. Also reicht unser Erklärungsgrund nicht aus; vielmehr müssen wir annehmen, entweder, daß die neutralen Moleküle weniger leicht ionisiert werden als die neutralen Atome, oder, daß die positiven Moleküle leichter neutralisiert werden als die positiven Atome. Entweder müssen also die neutralen Moleküle des Kanalstrahles den ruhenden Teilchen näher kommen, damit die elektrisierende Wirkung eintritt, oder die positiven Moleküle ziehen das Elektron mit größerer Kraft an als die gleichnamigen Atome. Durch beide Annahmen wird erklärt, daß mit der Zunahme der Moleküle im Strahle der Durchschnitt der Strecke steigt, welche die Teilchen in neutralem Zustande zurücklegen.

Die geringere Elektrisierungsfähigkeit des Moleküls könnte als eine Folge seiner geringeren Schwingungsfähigkeit angesehen werden. Seine zusammenhaltenden Kräfte sind durch die Bindung verstärkt; es nimmt deshalb weniger Schwingungsenergie auf und erreicht schwerer den zur Elektrisierung nötigen Energiegehalt; vielleicht kann es auch mehr Energie aufnehmen, ehe es zur Abgabe eines Elektrons gezwungen ist. Die größere Neutralisierungsmöglichkeit würde erklärt, wenn man annimmt, daß zu der elektrischen Anziehung zwischen positivem Rest und Elektron noch eine Kraft hinzukommt, welche mit der Masse wächst. Es ist sehr wohl möglich, daß beide Annahmen zutreffen, daß also das Elektron durch das Molekül stärker angezogen und stärker festgehalten wird als durch das Atom.

Bemerkenswert ist endlich der Druck-Spannungseffekt von L/B. Der Druckeffekt steigt mit der Spannung; der Spannungseffekt sinkt mit dem Drucke immerhin erheblich stärker, als wir dies bei den anderen Druckspannungseffekten bemerkt haben, welche der Fehlergrenze der Versuche ziemlich nahe lagen. Nach steigenden Spannungen geordnet, ver-

halten sich die Druckeffekte von L/B wie 1 : 1,1 : 1,8. Nach Gleichung (VI), welche einen angenäherten Ausdruck für den Druckeffekt gibt, ist dieser Einfluß der Spannung nicht erklärlich. Gehen wir aber auf Gleichung (IV) zurück, so sehen wir, daß der Druckeffekt nicht nur von der Funktion des Druckes $\varrho\,(D)$ abhängt, welche mit der Lebensdauer des Elektrons zusammenhängt, sondern auch von den Konstanten i und C_1. i, die Teilchenzahl, hat aber einen anderen Wert, wenn wir B bei verschiedener Spannung bestimmen; denn mit der Zunahme der Moleküle im Strome nimmt die Zahl der Teilchen pro Einheit der Bewegungsenergie ab, weil ihre Masse zunimmt. In der Konstanten C_1 aber sind die Konstanten c_1 und c_2 aus Gleichung (d), (e) enthalten. Die Konstanten c_1 und c_2 sind bestimmt durch die Wahrscheinlichkeit, welche für die positiven Teilchen besteht, ein Elektron zu finden, für die neutralen, ionisiert zu werden. Wenigstens eine dieser Wahrscheinlichkeiten ist, wie aus dem Spannungseffekte geschlossen wurde, für Atome und Moleküle verschieden groß; also wird c_1 bzw. c_2 und deshalb auch C_1 einen anderen Wert haben, wenn das Verhältnis von Atomen und Molekülen im Kanalstrahl ein anderes ist.

Die Erklärung der Gesetzmäßigkeiten von S/B und L/B führt uns zur Erklärung der Gesetzmäßigkeiten von S/L.

Wenn zwei Größen in gesetzmäßiger Abhängigkeit von einer dritten stehen, so hängen sie auch gesetzmäßig voneinander ab. Es ist deshalb zu erwarten, daß das Verhältnis $\frac{S}{L}\left(\frac{\text{Strahlung}}{\text{Ladung}}\right)$, das wir in Tab. V, Spalte 9—14 und Tab. VI, Spalte 12—14 dargestellt haben, Regelmäßigkeiten zeigt. Je nachdem S/B und L/B sich mit den Versuchsbedingungen im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne ändern, wird die Veränderung des Quotienten

$$\frac{S}{L}\left(=\frac{\frac{S}{B}}{\frac{L}{B}}\right)$$

größer oder kleiner sein, und es kann auch geschehen, daß die Veränderungen der Komponenten sich gerade aufheben, so daß S/L konstant bleibt. Auf einen unmittelbaren ursächlichen Zusammenhang zwischen Strahlung und Ladung werden wir aus solchen Regelmäßigkeiten deshalb erst dann mit einiger Wahrscheinlichkeit schließen dürfen, wenn sie eine

plausible Erklärung zulassen. Immerhin wird eine Konstanz von S/L bedenklicher sein, weil es etwas vom Zufall an sich hat, wenn die Veränderungen des Zählers S/B und des Nenners L/B gleich groß sein sollen, ohne einen unmittelbaren ursächlichen Zusammenhang zu haben.

Wollen wir eine ursächliche Beziehung zwischen Strahlung und Ladung suchen, so kommen zwei Möglichkeiten in Betracht. Die geladenen Teilchen können die ausschließlichen *Träger*, und sie können die ausschließlichen *Erreger* der Strahlung sein. In dem einen Falle muß die bewegte, im anderen die ruhende Strahlung von der Zahl der geladenen Teilchen abhängen; in dem einen Falle suchen wir also eine Gesetzmäßigkeit von S_b/L, im anderen von S_r/L. Sind die Geladenen die Träger der Strahlung, so müssen sie bei gleicher Anzahl um so mehr Schwingungsenergie empfangen und ausstrahlen, je mehr Stöße sie ausüben; das Verhältnis S_b/L müßte also mit steigendem Gasdrucke zunehmen. In Wirklichkeit nimmt es aber (Tab. VI, Spalte 13) sehr stark ab. Sind die Geladenen die Erreger, so müßten sie umgekehrt im ruhenden Gase in der gleichen Zeit um so mehr Licht erzeugen, je mehr Stöße sie ausüben; das Verhältnis S_r/L müßte also mit steigendem Gasdrucke zunehmen. Wie die Tabelle zeigt (Tab. VI, Spalte 12), bleibt es annähernd konstant bei unsystematischen Ausschlägen bis zu $+19$ und -16 Proz.

Die Konstanz (die in unserem Falle immerhin nicht erheblich ungenauer ist, als die in anderen Fällen gefundenen Regelmäßigkeiten) fordert aber, wie ausgeführt, an sich zur Nachprüfung auf. Außerdem besticht die Voraussetzung, welche wir prüfen; denn die Lichterregung hervorgerufen durch den Vorübergang einer Ladung an einem neutralen Körper erfüllt die Analogie der elektromagnetischen Induktion am vollkommensten. Ich sehe aber auch keine Möglichkeit, durch Hilfsannahmen das Fehlen einer Beziehung zum Gasdrucke zu erklären. Man könnte vermuten, daß das Verhältnis zwischen der Ausstrahlung der ruhenden Teilchen und der Ladung der Kanalstrahlen konstant würde, wenn jedes bewegte Teilchen während seines geladenen Zustandes nur *einen* lichterregenden Stoß ausführte. Eine solche Beziehung könnte hergestellt werden durch die Annahme, daß die bewegten Teilchen, wenn sie ein ruhendes Teilchen erregen, ihren Ladungs-

zustand verändern (z. B. ein Elektron verlieren). Nach dieser Annahme würde die Zahl der in der Zeit erregten ruhenden Teilchen allerdings proportional sein der Zahl der in der gleichen Zeit entstehenden und vergehenden Ladungen im Strahle. Die Größe L, mit welcher wir die Strahlung vergleichen, gleich der Summe der in der Beobachtungszeit durch den Querschnitt des Kanalstrahles tretenden Ladungen, ist aber nicht der Zahl der entstehenden und vergehenden Ladungen proportional, sondern dem Produkte aus dieser Zahl und der Lebensdauer oder dem Wege Λ_p der einzelnen Ladung. Der Weg Λ_p ist aber, wie ausgeführt wurde, eine Funktion der Gasdichte, also müßte S_r/L auch unter der diskutierten Annahme von der Gasdichte abhängen.

Endlich bleibt noch die etwas komplizierte Annahme, daß Licht erregt wird, wenn ein Geladenes mit einem anderen Geladenen zusammenstößt. Damit sind wir aber wiederum genötigt, die Konstanz von S_r/L aus zwei Komponenten, der Zahl der ruhenden und der bewegten Geladenen, zu erklären, deren Veränderungen gerade gleichen und entgegengesetzten Einfluß auf die Funktion haben müßten.

Wir haben bisher allen unseren Erklärungen die Annahme zugrunde gelegt, daß die den Dopplereffekt zeigenden Linien des Kanalstrahlenlichtes durch den einfachen Stoß erregt werden. Um einen Zusammenhang zwischen Ladung und Ausstrahlung herzustellen, könnte man aber auch zu der Annahme übergehen, daß die Lichterregung für diese Linien mit den Umladungsvorgängen zusammenhängt, derart, daß ein Teilchen zum Leuchten erregt wird, wenn es eine Ladung empfängt oder verliert. Auch in diesem Falle würde ein Teilchen während eines geladenen Zustandes nur einmal Ursache eines Leuchtvorganges werden. Diese Beziehung müßte vor allem an dem Verhalten von S_r/L erkannt werden. Da die geladenen Wege bei Vegards Versuchen, wie gezeigt wurde, mit steigendem Drucke wachsen, so nehmen die Umladungen pro Einheit der durch den Querschnitt tretenden Ladungen (L) ab. Daraus würde folgen, daß auch S_r/L mit wachsendem Drucke abnehmen müßte. Dieser Folgerung entspricht wirklich die Beobachtung, wenn auch die Abnahme anscheinend größer ist, als man erwarten sollte. Wir geben aber durch die Annahme, welche wir machen, die unmittel-

bare Beziehung zwischen der Ausstrahlung des *ruhenden* Gases und der Ausstrahlung der bewegten Teilchen auf. Die Erklärung der Konstanz von S_r/L begegnet also den gleichen Schwierigkeiten, die wir beheben wollen. Wir können nur eine mittelbare Beziehung zwischen den beiden Größen herstellen, was durch folgende Überlegungen versucht werden soll.

Die Umladungsvorgänge sind Elektrisierungen oder Neutralisierungen. Die Elektrisierungen hängen nach unseren Ausführungen von der Zahl der Zusammenstöße ab, sind also, wenn nur der Gasdruck geändert wird, diesem proportional. Deshalb müssen sie dieselben Beziehungen zu einer dritten Größe L haben wie der Gasdruck. Da L sich mit dem Gasdrucke ändert, so könnte also S_r/L nicht vom Gasdrucke unabhängig sein.

Die Neutralisierungen im ruhenden Gase hängen ab von der Zahl der im ruhenden Gase vorhandenen Ladungen, meßbar durch L_r, und der Zahl der freien Elektronen. Die Ladung L_r wird durch erzeugende und vernichtende Vorgänge, Elektrisierungen und Neutralisierungen, im Gleichgewichte gehalten in derselben Weise wie die Ladung des bewegten Gases ($L_b = L$), und der nächstliegende Schluß ist, daß L_r und L_b sich in gleichem Sinne mit den Bedingungen ändern. Die Neutralisierungen im ruhenden Gase stehen dann in gleicher Abhängigkeit von L_b wie von L_r. Da sie aber außerdem von der Zahl der freien Elektronen abhängen, können sie L_b nur proportional sein, wenn die Zahl der freien Elektronen konstant bleibt. Da diese aber, wie oben gezeigt, vom Gasdrucke abhängt, muß auch die Beziehung zwischen Neutralisierungen und Ladung, und deshalb muß unter der diskutierten Voraussetzung auch S_r/L vom Gasdrucke abhängen. Freilich ist die Parallelität zwischen L_b und L_r schwerlich genau, die Möglichkeit durch irgend welche komplizierten Überlegungen oder Annahmen die Konstanz von S_r/L zu erklären, ist deshalb immerhin nicht ganz ausgeschlossen.

Wir geben aber schließlich, indem wir mit der diskutierten Annahme von der einfachen Stoßerregung als Ursache des Leuchtens abgehen, auch die Voraussetzung auf, daß die Erregung eines ruhenden Teilchens immer gesetzmäßig mit derjenigen eines bewegten Teilchens zusammenhängt. Damit fällt die Annahme des Schwingungsausgleiches, auf welcher

die Erklärungen beruhen, die wir für die Gesetzmäßigkeiten im Verhalten der Dopplerstreifen gefunden haben. Wir würden also unter neuen Voraussetzungen eine neue Erklärung suchen müssen, wozu sich vorläufig kein Weg zeigt.

Unsere Betrachtungen bezogen sich auf den Druckeffekt von S/L. Auch der Spannungseffekt dieses Verhältnisses zeigt keine Gesetzmäßigkeiten, die sich aus einer unmittelbaren Abhängigkeit der beiden Glieder des Verhältnisses deuten ließen (Tab. V, Spalte 9—14). S_r/L nimmt mit steigender Spannung zu, S_b/L nimmt ab, $\frac{S_r + S_b}{L}$ nimmt weniger, aber immer noch um 45 Proz. ab.

Die Erklärung der mit den Versuchsbedingungen erfolgenden Veränderungen von S/L aus den Veränderungen von S/B und L/B ist also von allen versuchten Erklärungen allein plausibel; ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Strahlung und Ladung besteht nicht.

Die Hypothese, daß das Kanalstrahlenlicht an das Vorhandensein, das Entstehen oder das Verschwinden geladener Teilchen gebunden ist, dürfen wir also mit großer Wahrscheinlichkeit abweisen. Es bleibt nur die Lichterregung durch den Stoß übrig, wobei noch zu entscheiden ist, ob die geladenen Teilchen, wenn auch nicht ausschließlich, so doch neben den neutralen Teilchen Träger und Erreger des Leuchtens sind. Daß die neutralen Teilchen nicht allein an der Lichterregung Anteil haben, dürfen wir aber an dem Vorhandensein einer quantitativ deutbaren Beziehung zwischen der Ausstrahlung und der Bewegungsenergie des gesamten aus geladenen und ungeladenen Teilchen zusammengesetzten Kanalstrahles schließen. Man könnte dieser Folgerung allerdings durch die Annahme entgehen, daß die geladenen Teilchen nur einen so kleinen Bruchteil des Strahles ausmachen, daß ihr Anteil an der Bewegungsenergie vernachlässigt werden darf. Bis zu diesem Punkte unserer Schlußfolgerungen können wir deshalb die geladenen Teilchen nicht mit der gleichen Sicherheit als Träger und Erreger des Leuchtens bezeichnen wie die ungeladenen.

Eine hinreichende Sicherheit geben aber uns Vegards spektrographische Untersuchungen im Magnetfelde. Der Kanalstrahl, zwischen den Polen eines starken Elektromagneten be-

obachtet, zeigte das gleiche Spektrum, wenn das Feld erregt und wenn es nicht erregt war; dagegen wurde die Intensität des Leuchtens durch das Feld stark geschwächt. Daraus folgt, daß die geladenen Teilchen, welche durch das magnetische Feld aus dem Kanalstrahle entfernt wurden, einen merkbaren Anteil an den Leuchtvorgängen hatten, und daß ihre Wirkung gleichartig mit derjenigen der neutralen Teilchen war, welche bei erregtem und nicht erregtem Felde beobachtet wurden. Die geladenen und ungeladenen Teilchen erregen das ruhende Gas in gleicher Weise und werden selbst in gleicher Weise erregt.[1])

Vegards Untersuchungen werden ergänzt durch eine ältere Untersuchung von Bärwald.[2]) Dieser teilte den Kanalstrahl im Magnetfelde in den geladenen und den ungeladenen Anteil und beobachtete in beiden Anteilen hinter der Teilungsstelle den Dopplereffekt. Die Effekte waren in beiden Anteilen im wesentlichen dieselben.

Auch Wilsar[3]) untersucht den Dopplereffekt der Kanalstrahlen hinter dem Magnetfelde, und zwar beobachtet er die Kanalstrahlen unmittelbar nach dem Verlassen des Feldes. Das untersuchte Gas war Sauerstoff. Auch hier wurde die Strahlung durch das Magnetfeld stark (um ca. ein Drittel) geschwächt; das Verhältnis S_r/S_b wurde nicht geändert bis auf eine kleine Abnahme der bewegten Strahlung zugunsten der ruhenden um 8 Proz. Wir werden schließen, daß auch im Sauerstoff die ungeladenen Teilchen, welche bei erregtem und nicht erregtem Felde, und die geladenen, welche nur bei nicht erregtem Felde beobachtet wurden, gleiche Wirkung haben.

Für die Beurteilung der Untersuchungen im Magnetfelde, insbesondere der Untersuchungen Bärwalds und Wilsars, ist es wichtig, daß wir durch die zitierte Untersuchung Wiens die Größenordnung der Wege kennen, auf denen sich die Um-

1) Vegard selbst hat sich später (Ann. d. Phys. **52**. p. 83. 1917) zu der Ansicht bekannt, daß nur das neutrale Teilchen leuchtet, aber nicht aus Gründen, die irgendwie mit seinen eigenen oder anderen Versuchen zusammenhängen, sondern — weil das positive Wasserstoffatom in dem Bohrschen Atommodell kein Elektron hat.

2) H. Bärwald, Ann. d. Phys. **34**. p. 883. 1911.

3) H. Wilsar, Ann. d. Phys. **39**. p. 1284. 1912.

ladevorgänge vollziehen. Da diese Wege einige Zentimeter betragen, so ist der Einwand hinfällig, daß der hinter dem Magnetfelde beobachtete Strahl seinen Ladungszustand bereits wesentlich geändert haben könne.

Es bleibt noch eine kleine Unstimmigkeit zwischen den Beobachtungen Vegards auf der einen, Bärwalds und Wilsars auf der anderen Seite. Bei letzteren wird das Verhältnis S_r/S_b durch das Magnetfeld zu ungunsten der bewegten Strahlung geändert, und zwar, ohne daß das Maximum merklich verschoben, die Geschwindigkeitsverteilung merklich geändert wurde. Diese Änderung läßt sich aus unseren Ausführungen recht gut erklären. Die Atome, welche bei gleicher Geschwindigkeit eine geringere Bewegungsenergie besitzen als die Moleküle, werden leichter abgelenkt als diese. Dadurch tritt der gleiche Effekt ein, den eine Erhöhung der Spannung bewirkt, nämlich eine Zunahme von S_r/S_b. Daß Vegard den Effekt nicht beobachtet hat, könnte dadurch erklärt werden, daß er stärkere (10000 Gauss gegen 6—9000 Gauss bei Bärwald, 9—10000 Gauss bei Wilsar) und räumlich ausgedehntere Felder benutzt hat. Es mögen also bei ihm überhaupt keine geladenen Teilchen das Feld passiert haben, so daß auch keine Bevorzugung der Atome stattgefunden hat. Indessen scheint mir doch auch bei Vegard ein Effekt vorhanden zu sein, wenn man die Platte 1, deren Zuverlässigkeit er anzweifelt (l. c. p. 164 u. 165) aus dem Vergleiche ausscheidet. Die bewegten Strahlungen verhalten sich dann bei den Beobachtungen ohne und mit Feld wie 1: 0,93. Der Effekt stimmt in der Größe sogar mit dem von Wilsar und Bärwald beobachteten recht gut überein.

Die dargestellten, von optischen Fragestellungen aus gewonnenen Ergebnisse stehen in Widerspruch mit Ergebnissen von Versuchen, bei denen das Interesse an den Wirkungen vorwaltete, welche der Kanalstrahl beim Auftreffen auf eine Fläche hervorruft. Königsberger und seine Mitarbeiter, Dechend und Hammer u. a. haben festgestellt, daß der abgelenkte positive Strahl unter Bedingungen (tiefen Drucken) nicht mehr leuchtet, unter denen der neutrale Strahl noch leuchtet, obgleich beide Strahlen deutliche Fluoreszenzflecke auf der auffangenden Platte erzeugten. Man könnte daraus schließen, daß nur die neutralen Teilchen leuchten und daß sich im

abgelenkten Strahle, wenn er bei höherem Drucke leuchtet, wieder ein starker Anteil neutraler Teilchen gebildet hat. Dieser Erklärung widersprechen aber Versuche Wiens[1]), der gezeigt hat, daß die Aussonderung des positiven Strahles zwar keinen Einfluß auf das Leuchten des unabgelenkten Strahles hat, wenn sie kurz hinter der Kathode geschieht, daß sie dagegen das Leuchten eines Teilstrahles erheblich schwächt, wenn sie in größerer Entfernung von der Kathode geschieht. Das eine Resultat stimmt also mit den Ergebnissen Wilsars, Vegards, Bärwalds überein, das andere nicht. Die allen diesen Versuchen gemeinsame Bedingung für das Leuchten des positiven Strahles ist nicht eine bestimmte Dichte des Gases, sondern eine bestimmte absolute Menge Gases zwischen Kathode und Beobachtungsort. Danach müssen wir also annehmen, daß die positiven Teilchen erst auf dem Wege durch das Gas ihre Leuchtfähigkeit erlangen. Wir kommen damit auf einen Gesichtspunkt, auf den wir bereits bei der Behandlung von L/B hingewiesen haben.

Alle diese der magnetischen Methode folgenden Versuche sind bei sehr hoher Verdünnung angestellt, weil die Schärfe des Fluoreszenzfleckes mit steigendem Gasdrucke abnimmt. Die freien Wege sind also recht groß, und es werden hinter der Kathode viele Teilchen im Strahle vorhanden sein, die seit Beginn ihres Falles noch keinem anderen Teilchen begegnet sind. Da alle Teilchen ihre Bahn mit positiver Ladung beginnen, so sind diese unberührten Teilchen auch noch positiv geladen, und in der Nähe der Kathode mag der positive Strahl zum größten Teile aus solchen unberührten Teilchen bestehen und deshalb dunkel bleiben. Die Zahl dieser unberührten Teilchen im Strahle muß aber mit der Entfernung von der Kathode abnehmen, und man wird schließlich nur noch positive Teilchen beobachten, welche bereits lichterregende Zusammenstöße und Begegnungen anderer Art, Umladungen und Rückladungen, erfahren haben. In größerer Entfernung von der Kathode wird der positive Strahl deshalb leuchten.

Auf die Bedeutung, welche die Kathodenentfernung bei hoher

---

1) W. Wien, Physik. Zeitschr. 11. p. 377. 1910; Ann d. Phys. 30. p. 349. 1910. Vgl. auch Dechend u. Hammer, Heidelb. Ber. Nr. 21. p. 10. 1910.

Verdünnung auf die Messungen hat, ist bereits bei der Behandlung der Ladungserscheinungen hingewiesen worden (p. 244/245). Konstante und vergleichbare Resultate können nur erzielt werden, wenn das Gleichgewicht der Vorgänge im Strahle (für optische Beobachtungen das Gleichgewicht zwischen Erregung und Ausstrahlung) erreicht ist. Der Strahl erreicht dieses Gleichgewicht aber erst nach Durchdringung einer Gasschicht, die eine gewisse absolute Anzahl von Molekülen enthält. Verdichtung des Gases und Vergrößerung der Entfernung von der Kathode führen in gleicher Weise zur Erreichung dieses Zustandes.

Wir sind in diesem Abschnitte zu dem Ergebnis gekommen, daß die Ladung der Strahler auf den Leuchteffekt keinen nachweisbaren Einfluß hat, d. h. daß geladene und ungeladene Teilchen für die untersuchten Linien in gleicher Weise Träger und Erreger des Leuchtens sind.

Die Beziehungen zwischen Ladung und Gasdruck und zwischen Ladung und Entladungsspannung wurden aufgeklärt unter der Annahme, daß die Elektrisierung durch molekularen Stoß, die Neutralisierung durch die Verbindung mit freien Elektronen herbeigeführt wird.

Bei hohen Verdünnungen hängen die Ergebnisse der Versuche von der Entfernung zwischen Beobachtungsort und Kathode ab, weil das Gleichgewicht der Vorgänge im Kanalstrahl erst erreicht wird, wenn der Strahl durch eine bestimmte Gasmenge hindurchgegangen ist.

XV. Der Dopplereffekt in Sauerstoff, Stickstoff, Quecksilber.

Vegard[1]) hat in einer späteren Arbeit Versuche in Sauerstoff und Stickstoff beschrieben, welche mit denselben Mitteln ausgeführt wurden wie die Versuche in Wasserstoff. Tabb. VII bis IX geben die Ergebnisse seiner Versuche. In den Tabellen enthalten wiederum die unten geschlossenen Spalten die aus Vegards Tabellen entnommenen Werte; die übrigen sind in der in Abschnitt XIII angegebenen Weise aus diesen Werten berechnet. Die mit einem * bezeichneten Werte sind will-

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 625, 1913.

Tabelle VII.

Sauerstoff, $\lambda = 4119$ Å (Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 630, Tab. III).

	Spannung		Gasdruck		$S_r : S_b$		$\frac{S_r}{B} \cdot c$		$\frac{S_b}{B} \cdot c$			$\frac{S_r + S_b}{B} \cdot c$		$\frac{\Delta E}{e} = \frac{S_r + S_b}{B \cdot D} \cdot c$	
	Volt	Verhältnis	mm Hg	Verhältnis	$S_r : S_b$	Verhältnis	willkürliche Einheit	$\frac{S_r}{B} \cdot c : D$ (Verh.)	willkürliche Einheit	Verhältnis	$\frac{S_b}{B} \cdot c : D$ (Verh.)	willkürliche Einheit	Verhältnis		
	I	II	III	IV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Spannungseffekt	11800	1	0,0225	1	1 : 0,72	1	1,00*		0,72	1		1,72	1	1	A Spannungseffekt
	22300	1,89	0,0225	1	1 : 0,51	1,41	1,06		0,54	0,75		1,60	0,93	0,93	
	30400	2,58	0,0225	1	1 : 0,44	1,63	1,11		0,49	0,68		1,60	0,93	0,93	
	45000	3,82	0,0225	1	1 : 0,38	1,89	1,14		0,43	0,60		1,57	0,91	0,91	
Drucketfekt	19900	1	0,0054	1	1 : 0,78	1	1,00*	1	0,78	1	1	1,78	1	1	B Druckeffekt
	19900	1	0,0086	1,59	1 : 0,62	1,26	1,50	0,95	0,93	1,19	0,75	2,43	1,37	0,86	
	19900	1	0,0157	2,91	1 : 0,54	1,44	3,80	1,14	1,78	2,28	0,78	5,08	2,86	0,98	
	19000	1	0,0276	5,13	1 : 0,47	1,66	6,80	1,33	3,20	4,10	0,80	10,00	5,62	1,10	

Tabelle VIII.

Stickstoff, $\lambda = 4530{,}3$ Å (nach Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 627, Tab. I).

	Spannung		Gasdruck		$S_r : S_b$		
	Volt	Verhältnis	mm Hg	Verhältnis	S_r/S_b	Verhältnis	
	I	II	III	IV	1	2	
Spannungseffekt	15000	1	0,011	1	1 : 0,78	1	A
	30000	2	0,011	1	1 : 0,64	1,22	
	15000	1	0,040	3,55	1 : 0,64	1	Spannungseffekt
	30000	2	0,040	3,55	1 : 0,45	1,42	
Druckeffekt	15000	1	0,011	1	1 : 0,78	1	B
	15000	1	0,040	3,55	1 : 0,64	1,22	Druckeffekt
	30000	2	0,011	1	1 : 0,64	1	
	30000	2	0,040	3,55	1 : 0,45	1,42	

Tabelle IX.

Stickstoff (nach Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 628, Tab. II).

	Spannung		Gasdruck		$\frac{S_r}{B}$ $\lambda = 4530{,}3$ Å	$\frac{S_r}{B}$ $\lambda = 4278$ Å Bandenkopf	
	Volt	Verhältnis	mm Hg	Verhältnis			
	I	II	III	IV	1	2	
Spannungseffekt	18400	1	0,032	1	1,00*	1,00*	A
	31800	1,73	0,032	1	1,06	1,10	
	45000	2,45	0,032	1	1,04	1,04	Spannungseffekt
Druckeffekt	30400	1	0,0110	1	1,00*	1,00*	B
	30400	1	0,0395	3,59	3,42	3,57	Druckeffekt

kürlich gleich Eins gesetzt. Von zwei unter einem gemeinsamen Kopfe stehenden Spalten gibt die zweite (Spalte 2, 6, 9 in Tab. VII) immer die Verhältniszahlen des Druck- und Spannungseffektes in der Weise, daß der erste Wert als Einheit genommen ist. Wo Vegard bereits den ersten Wert gleich Eins setzt (Tab. VII, Spalte 3), erübrigt sich diese Spalte. Über Spalte 4, 7, 10 in Tab. VII später.

Vegard hat bei den Versuchen wenigstens für Sauerstoff die Bedingungen, Spannung und Druck, in viel weiteren Grenzen verändert als bei seinen Versuchen im Wasserstoff. Dagegen hat er die Kurve des Dopplereffektes nicht angegeben. Wir können also die Reduktion von S_b auf $S_{b\,red}$ nicht durchführen. Wir bemerken aber, daß S_b im Verhältnis zu S_r mit wachsendem Drucke und wachsender Spannung stark abnimmt, daß also sowohl ein Druckeffekt als auch ein Spannungseffekt vorhanden ist. Wir untersuchen zunächst den Druckeffekt des Strahlungsverhältnisses.

Der Druckeffekt von S_r/S_b des Sauerstoffs (Tab. VII, Feld *B*, Spalte 1, 2, III, IV) ist viel kleiner als jener des Wasserstoffs, der des Stickstoffs (Tab. VIII) kleiner als jener der beiden anderen Gase. Für Sauerstoff beträgt der Effekt:

$$\left(\frac{S_r}{S_b}\right)_{D_1} : \left(\frac{S_r}{S_b}\right)_{D_2} : \ldots = 1 : 1{,}26 : 1{,}44 : 1{,}66 ,$$

bei einer Druckänderung von

$$D_1 : D_2 : \ldots = 1 : 1{,}59 : 2{,}91 : 5{,}13 .$$

Der Effekt bleibt um 21 Proz., 51 Proz., 67 Proz. hinter den Änderungen des Gasdruckes zurück. Für Stickstoff beträgt der Druckeffekt auf zwei Spannungsstufen 1 : 1,22 und 1 : 1,44 bei einer Druckänderung von 1 : 3,55.

Um mit größerer Sicherheit vergleichen zu können, habe ich für alle Druckstufen der drei Gase den einer gleichen Druckänderung, und zwar einer Verdoppelung des Druckes entsprechenden Druckeffekt berechnet unter der Voraussetzung, daß der Effekt innerhalb der Druckstufe linear verläuft. Das Ergebnis ist in Tab. X dargestellt. Dieser „Effekt des verdoppelten Gasdruckes" ist dann auf den mittleren Gasdruck der Druckstufe bezogen. Der Effekt beträgt im Durchschnitte 1 : 1,72 (bzw. 1 : 1,59) für Wasserstoff, 1 : 1,27 für Sauerstoff, 1 : 1,17 für Stickstoff. S_b nimmt also gegenüber S_r in O und N viel langsamer ab, als der Druck steigt. Daraus folgt, daß $(1 - \alpha^{A/v})$ in Gleichung (7) dem Drucke auch nicht mehr in grober Annäherung proportional ist, oder daß $E_{b\,min}$ erheblich kleiner ist als $E_{b\,max}$. Das Leuchten des bewegten Teilchens sinkt also in der freien Zeit im Stickstoff stärker als im Sauerstoff, im Sauerstoff viel stärker als im Wasserstoff. Der

Tabelle X.

Druckeffekt bei Verdoppelung des Gasdruckes (aus Tab. III, IV, VII, VIII berechnet).

		Sauerstoff $\lambda = 4119$ Å			Stickstoff $\lambda = 4530{,}3$ Å			Wasserstoff H_α, H_β, reduziert, unreduziert					
										$(S_r/S_b)_D : (S_r/S_b)_{2D}$			
										reduziert		unreduziert	
	Verhältnis der Gasdrucke	Spannung Volt	Mittlerer Gasdruck mm Hg	$\left(\frac{S_r}{S_b}\right)_D : \left(\frac{S_r}{S_b}\right)_{2D}$	Mittlerer Gasdruck mm Hg	Spannung Volt	$\left(\frac{S_r}{S_b}\right)_D : \left(\frac{S_r}{S_b}\right)_{2D}$	Mittlerer Gasdruck mm Hg	Spannung Volt	H_α	H_β	H_α	H_β
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Einzelwerte			0,0070	1 : 1,44		15000	1 : 1,13		8500	1 : 1,39	1 : 1,68	1 : 1,37	1 : 1,60
	1 : 2	19900	0,0122	1 : 1,18	0,026	30000	1 : 1,21	0,68	20000	1 : 1,61	1 : 1,91	1 : 1,52	1 : 1,81
			0,0217	1 : 1,19					27000	1 : 1,62	1 : 2,08	1 : 1,53	1 : 1,71
Mittelwerte	1 : 2	19900	0,0136	1 : 1,27	0,026	22500	1 : 1,17	0,68	18500	1 : 1,54	1 : 1,89	1 : 1,47	1 : 1,71
										1 : 1,72		1 : 1,59	

Unterschied gegen Wasserstoff könnte durch die bei gleicher Entladespannung und Bewegungsenergie geringere Geschwindigkeit (oder größere freie Zeit) der Sauerstoff-Kanalstrahlen erklärt werden, auch wenn man einen Unterschied in der Größe von α nicht zugestehen wollte.

Sehr auffallend ist der höhere Wert des Effektes für Sauerstoff auf der niedrigsten Druckstufe. Nach unserer Theorie sollten wir im Gegenteil den höheren Effekt bei höherem Gasdrucke erwarten. Die gute Übereinstimmung der Werte auf den beiden anderen Druckstufen verbietet uns aber, hinter dieser Abweichung ein allgemeines Gesetz zu suchen.

Auch die Veränderungen des Strahlungsverhältnisses mit der Spannung (Spannungseffekt von S_b/S_r, Tab. VII, Feld A, Spalte I, II, 1, 2) sind in Sauerstoff sehr viel kleiner als in Wasserstoff. Es verhalten sich für Sauerstoff

$$\left(\frac{S_r}{S_b}\right)_{V_1} : \left(\frac{S_r}{S_b}\right)_{V_2} : \ldots = 1 : 1{,}41 : 1{,}63 : 1{,}89\,,$$

bei einer Veränderung der Spannung von

$$V_1 : V_2 : \ldots = 1 : 1{,}89 : 2{,}58 : 3{,}82\,.$$

Dagegen beträgt der unreduzierte (d. h. den Geschwindigkeitseffekt mitenthaltende) Spannungseffekt für Wasserstoff im Mittel beider Farben: 1 : 2,56 : 5,59, die gleichzeitige Spannungsänderung: 1 : 2,35 : 3,18. Da Vegard für Sauerstoff keine Schwärzungskurven gibt, so können wir die gerade für die Beurteilung des Spannungseffektes so wichtige Reduktion von S_b auf $S_{b\,red}$ [Gleichung (13a), (13)] nicht durchführen. Wir können deshalb auch nicht in der für Wasserstoff angewendeten Weise entscheiden, inwieweit die beobachteten Veränderungen auf einen Geschwindigkeits- oder einen echten Spannungseffekt zurückgeführt werden müssen.

Einen ungefähren Anhalt zu einer quantitativen Beurteilung geben uns die in Abh. I, p. 59 angestellten Überlegungen. Danach dürfen wir das Verhältnis 1 : 1,30 : 2,16 bei einer Spannungsänderung von 1 : 2,5 : 3,4 in Annäherung als oberen Grenzwert des reinen Geschwindigkeitseffektes für Wasserstoff ansehen. Diese Proportion stimmt in ihrem Verhältnis zur Proportion der Spannungen mit dem Spannungseffekte in Sauer-

stoff recht gut überein, wobei aber der Effekt in Sauerstoff dem Druckeffekte entsprechend wiederum der kleinere ist.

Es bleibt also für einen echten Spannungseffekt, der irgend mit dem entsprechenden Effekte des Wasserstoffs verglichen werden könnte, kein Platz. Daraus folgt, daß entweder zwei mit der Spannung veränderliche Anteile, also Atome und Moleküle, nicht vorhanden sind, oder daß die beiden Anteile annähernd gleiche Schwingungskapazität haben, von welchen Annahmen offenbar die zweite weniger wahrscheinlich ist. Nun haben W. Wien, Königsberger, Dechend u. a., wie schon erwähnt, durch magnetische Analyse der Kanalstrahlen nachgewiesen[1]), daß der Sauerstoff-Kanalstrahl ganz überwiegend aus Teilchen gleicher Art, und zwar aus Atomen besteht. Unsere aus der optischen Analyse gezogenen Schlüsse werden also durch die magnetische Analyse vollkommen gedeckt.

In Stickstoff stimmen die Spannungseffekte zufällig auch im Zahlenwerte mit den Druckeffekten überein. Aber die Spannung ist im Verhältnis 1:2, der Druck im Verhältnis 1:3,55 geändert. Nach den Fallgesetzen wächst die Geschwindigkeit mit der Quadratwurzel der treibenden Kraft. Diese Beziehung gilt auch für die maximalen Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen, wenn positive Teilchen aus der Nähe der Anode bis zum Kanal gelangen können. Das gäbe für unseren Fall ein Verhältnis der Geschwindigkeiten von $1:\sqrt{2}$. Auf die mittlere Geschwindigkeit dürfen wir diese Beziehung nicht ohne weiteres übertragen, solange wir über die Orte, aus denen die größte Menge der bewegten Teilchen stammt, nichts aussagen können. Aber selbst, wenn das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten sehr stark von dem Verhältnis der maximalen Geschwindigkeiten ($1:\sqrt{2}$) abweichen sollte, dürfte es immer noch sehr weit hinter dem Verhältnisse der Drucke (1:3,55) zurückbleiben. Ebensoweit müßte ein reiner Geschwindigkeitseffekt hinter dem Druckeffekte zurückbleiben. Da der Spannungseffekt den Druckeffekt erreicht, so ist es sehr wahrscheinlich, daß er neben dem Geschwindigkeitseffekte auch noch einen echten Spannungseffekt enthält, d. h. daß sich Strahler verschiedener Kapazität im Kanal-

1) Vgl. Anm. p. 223.

strahle des Stickstoffs befinden, deren Mischung mit der Spannung veränderlich ist, wenn diese Folgerung mangels einer breiteren experimentellen Unterlage auch nicht mehr als Wahrscheinlichkeitswert hat. Dechend und Hammer, welche Stickstoffteilchen als Träger der Kanalstrahlen mit der magnetischen Methode nachgewiesen haben, konnten nur Atome feststellen, da sie die Strahlen aus NO-Gas gewonnen haben, das N_2-Teilchen nicht liefern kann.[1])

Die Effekte des Sauerstoffs unterscheiden sich auch dadurch von denen des Wasserstoffs, daß die bewegte Intensität immer erheblich kleiner ist als die ruhende. Sie schwankt zwischen 0,78—0,38 der ruhenden Intensität gegen 10,9—0,6 bei Wasserstoff. Nach Gleichung (18) ist

$$\varkappa = \frac{\varkappa_r}{\varkappa_b} \gtrless \frac{S_r}{S_b},$$

d. h. das Verhältnis der Strahlungen gibt einen oberen Grenzwert für das Verhältnis der Kapazitäten. Beide Verhältnisse werden sich um so mehr annähern, je mehr die Energie des bewegten Strahlers auf dem freien Wege sinkt; denn wenn der bewegte Strahler erlischt, verschwindet $a^{A/v}$ in Gleichung (7) und S_r/S_b wird gleich $\varkappa_r/\varkappa_b$. Ist $\varkappa_r = \varkappa_b$, so muß also S_r/S_b größer als Eins sein, und es muß um so mehr über Eins steigen, je weniger Energie der bewegte Strahler aus dem freien Wege ausstrahlt, es muß Eins um so näher sein, je mehr er sich dem Erlöschen nähert. Für Wasserstoff war S_r/S_b fast immer kleiner als Eins (bis zu $^1/_{10}$), ein um so kleinerer Bruch mußte deshalb $\varkappa_r/\varkappa_b$ sein, d. h. die durchschnittliche Kapazität des bewegten Strahlers mußte erheblich größer sein als die des ruhenden, woraus auf eine sehr viel größere Kapazität der Atome gegenüber den Molekülen geschlossen wurde. Da der bewegte Strahler des Sauerstoffs weiter abklingt, so müßte also S_r/S_b noch kleiner sein, wenn das Verhältnis der Kapazitäten dasselbe wäre. In Wirklichkeit ist aber S_r/S_b nicht nur größer als in Wasserstoff, sondern auch in allen Fällen größer als Eins. Das Kapazitätsverhältnis steht mithin dem Werte Eins viel näher; aber wir sind nicht verhindert, es für kleiner zu halten. Dementsprechend steht die Schwingungskapazität des ruhenden Strahlers, den wir als Molekül

1) Heidelb. Ber. Nr. 21. 1910.

ansehen, jener des bewegten, den wir als Atom ansehen, viel näher als in Wasserstoff.

In Stickstoff ist S_r/S_b ebenfalls immer größer als Eins. Es liegt ungefähr zwischen den gleichen Grenzen wie S_r/S_b des Sauerstoffs, oder es ist in unserem Falle in Annäherung

$$\left(\frac{S_r}{S_b}\right)_0 = \left(\frac{S_r}{S_b}\right)_N.$$

Da das bewegte Stickstoffteilchen, wie wir aus dem Druckeffekte geschlossen haben, weiter abklingt als das bewegte Sauerstoffteilchen, so muß $(1 - \alpha^{A/w})$ für Stickstoff größer und dem Werte Eins näher sein als für Sauerstoff, $(S_r/S_b)_N$ muß also nach Gleichung (7) dem Werte $(\varkappa)_N$ näher sein als $(S_r/S_b)_0$ dem Werte $(\varkappa)_0$ oder, da $\varkappa$ immer kleiner als das Strahlungsverhältnis ist:

$$(\varkappa)_0 < (\varkappa)_N < \left(\frac{S_r}{S_b}\right)', \text{ [1]}$$

wobei $(S_r/S_b)'$ den in unserem Falle gemessenen, für N und O annähernd gleich großen Wert des Strahlungsverhältnisses bezeichnet. Wenn wir nicht annehmen wollen, daß das Verhältnis der Kapazitäten der Atome und Moleküle, das wir aus den Versuchen in Wasserstoff gefolgert haben, sich für die anderen Gase geradezu umkehrt, so ist $\varkappa$ immer kleiner als Eins, solange der Kanalstrahl nicht lediglich aus Molekülen besteht. Also ist auch

$$(\varkappa)_0 < (\varkappa)_N < 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\varkappa_r}{\varkappa_b}\right)_0 < \left(\frac{\varkappa_r}{\varkappa_b}\right)_N < 1.$$

Daraus folgt, daß die Kapazität der bewegten Teilchen im Stickstoff jener der ruhenden näher steht als im Sauerstoff. Das läßt zwei Deutungen zu: Entweder steht die Kapazität der Atome des Stickstoffs jener der Moleküle näher wie die Kapazität der Atome des Sauerstoffs, oder der Stickstoffstrahl besitzt einen merkbaren Anteil an Molekülen. Die letztere Deutung stimmt sehr gut mit den Schlüssen überein, die wir oben (p. 263) aus dem Verhältnisse von Spannungseffekt und Druckeffekt gezogen haben.

Diese Schlüsse aus der Analogie zwischen dem Sauerstoff-

1) Wir unterscheiden $(\varkappa)_N$, das Verhältnis der Schwingungskapazitäten des Stickstoffs, von $\varkappa_N$ der Kapazität des Stickstoffteilchens in Berührung mit einem anderen Gase.

und dem Stickstoffspektrum dürfen freilich nur mit dem Vorbehalte gezogen werden, daß die Durchschnittswerte der vorliegenden Messungen für das Verhalten der Spektra typisch sind. Angesichts der Dürftigkeit des Materials und der stark schwankenden Einzelwerte ist diese Voraussetzung keineswegs sicher. Unsere Schlüsse gewinnen aber dadurch, daß wir von zwei Ausgangspunkten aus zu dem gleichen Ergebnisse kommen. Es liegt mir aber auch daran, die Methoden zu einer weiteren Untersuchung der Frage zu entwickeln.

Daß das Sauerstoffmolekül, verglichen mit dem Atom des gleichen Gases, eine höhere Schwingungsfähigkeit besitzt als das Wasserstoffmolekül, können wir daraus erklären, daß die beiden im Molekularverbande stehenden Atome des Sauerstoffs nicht so eng gekoppelt sind und deshalb größere Schwingungsfähigkeit haben. Aus der Tatsache, daß der Wasserstoff-Kanalstrahl aus Molekülen und Atomen, der Sauerstoff-Kanalstrahl ausschließlich oder ganz überwiegend aus Atomen besteht, folgt andererseits, daß die Kräfte, welche vor der Kathode wirken und die den Verband des Moleküls zu zerreißen suchen, in dem einen Falle ausreichen, den ganzen Strahl zu atomisieren, in dem anderen nicht. Daraus darf geschlossen werden, daß der Widerstand der Moleküle gegen diese Kräfte in dem einen Falle (Sauerstoff) geringer ist als in dem anderen (Wasserstoff). Und daraus folgt wiederum, daß die Bindung der beiden im Molekularverbande stehenden Atome des Sauerstoffs loser ist als jener der anderen Gase. Die höhere Schwingungsfähigkeit des Moleküls und die Neigung, Atome zu bilden, entspringen also der gleichen Ursache, der lockeren Bindung der beiden Atome im Molekül.

Das Verhältnis $\frac{\text{Strahlung}}{\text{Bewegungsenergie}}$ des Sauerstoffs gibt Vegard in der Weise an, daß er sowohl für den Druckeffekt als für den Spannungseffekt einen für die ruhenden Strahler gefundenen Wert als Einheit setzt (der mit * bezeichnete Wert in Tab. VII, Spalte 3). Die Werte von

$$\frac{S_b}{B} \quad \text{und} \quad \frac{S_r + S_b}{B},$$

sind in Spalte 5 und 8 in diesen Einheiten ausgedrückt; in Spalte 6 und 9 ist nochmals der erste Wert gleich Eins gesetzt, um den Druck- und Spannungseffekt auszudrücken.

Spalte 4, 7, 10 des zweiten Feldes, berechnet aus

$$\left(\frac{S}{B} : D\right),$$

zeigen die Abweichung von der Proportion des Gasdruckes.

Die ruhende Strahlung, auf die Einheit der Bewegungsenergie bezogen, steigt soviel stärker als der Gasdruck, daß auch Vegard Bedenken trägt, die Abweichungen aus Versuchsfehlern zu erklären. Die Abweichungen von der einfachen Proportion des Gasdruckes betragen auf drei verschiedenen Druckstufen -5 Proz., $+14$ Proz., $+33$ Proz., wobei der höhere Wert je der größeren Abstufung des Druckes entspricht; die bewegte Strahlung (Spalte 5, 6, 7) weicht in denselben drei Stufen von der Proportion des Druckes ab um -25 Proz., -22 Proz., -20 Proz. Wir sehen aber aus Spalte 9 und 10, daß die Gesamtstrahlung bis auf einen unsystematischen Fehler dem Gasdrucke proportional ist. Die Abweichungen betragen in denselben Druckstufen -14 Proz., -2 Proz., $+10$ Proz. Wir finden also unsere aus der Annahme eines Schwingungsausgleiches abgeleiteten Beziehungen [Gleichungen (30), (31) bzw. (34), (35)] für Sauerstoff bestätigt: Auf die Bewegungsenergie als Parameter bezogen, bleibt der absolute Wert der gesamten Strahlung dem Gasdrucke proportional, während er für die ruhende Strahlung diese Proportion übersteigt, für die bewegte dahinter zurückbleibt.

Spalte 10 (Tab. VII, Feld B) gibt zugleich die Veränderungen von $\Delta E/e$ [Gleichung (37)] mit dem Drucke. Man sieht, daß die Erregung keine regelmäßigen Beziehungen zum Gasdrucke zeigt. Der bei der Behandlung der Wasserstoffeffekte (p. 217) als möglich diskutierte Effekt besteht also wenigstens für Sauerstoff nicht; eine Abnahme der Erregung mit der Schwingungstemperatur oder mit der Zunahme der Zahl der Elektrisierungen ist nicht nachzuweisen.

Der *Spannungseffekt* der auf die Bewegungsenergie bezogenen Gesamtstrahlung

$$\left(\frac{S_r + S_b}{B}\right);$$

(Tab. VII, Spalte 8—10, Feld A) ist sehr klein (7 und 9 Proz. gegen mehrere 100 Proz. bei Wasserstoff). Daraus folgt nach Gleichung (36c), daß $\Delta E/e$ auch mit wachsender Spannung

nicht oder nur sehr wenig veränderlich ist. Wir schließen also, daß ΔE, der Zuwachs an Schwingungsenergie, der Bewegungsenergie des stoßenden Teilchens proportional ist, und daß ein aus der Mischung von Strahlern verschiedener Kapazität herrührender Effekt nicht vorhanden ist. Damit kommen wir in Übereinstimmung mit der magnetischen Analyse des Kanalstrahles.[1]) Da die kleinen Abweichungen systematisch sind, im Unterschiede vom Druckeffekte von $\Delta E/e$ (Feld 3), so könnte man aber immerhin einen geringen, magnetisch nicht mehr nachweisbaren, mit der Spannung veränderlichen Anteil der Moleküle im Kanalstrahl für möglich halten. Der im folgenden Abschnitte zu besprechende Effekt bietet indessen eine bessere Erklärung.

Da hiermit der echte Spannungseffekt aus der Erklärung ausscheidet, so können die Änderungen der Teilstrahlung mit der Spannung nur aus den Änderungen der Geschwindigkeit erklärt werden. S_b/B nimmt, wie die Theorie fordert, mit wachsender Geschwindigkeit regelmäßig (bis zu 40 Proz.) ab, während S_r/B ebenso regelmäßig (bis zu 14 Proz.) ansteigt. Wäre ein erheblicher echter Spannungseffekt vorhanden, so müßte auch S_r/B wie bei Wasserstoff mit wachsender Spannung abnehmen. In Gleichung (34), (35) bleibt also für Sauerstoff $\Delta E/e$ konstant, während allein $\alpha^{A/v}$ veränderlich ist. Auch der Spannungseffekt von S_r/S_b (Sp. 2, A) kann deshalb nur aus den Veränderungen von v erklärt werden. Damit werden die oben (p. 263) gezogenen Schlüsse abermals bestätigt.

Das bei weitem wichtigste Ergebnis dieser Feststellungen ist, daß $\Delta E/e$ bei Änderungen des Druckes und der Spannung konstant bleibt, d. h. daß der Zuwachs des Systemes an Schwingungsenergie der Energie des Stoßes proportional und von dem Zustande des stoßenden Körpers (seiner Schwingungstemperatur) wenigstens in erster Ordnung unabhängig ist. Wir haben dieses Ergebnis bei der Behandlung der Effekte des Wasserstoffs vorweggenommen.

Für Stickstoff gibt Vegard nur das Verhältnis S_r/B (Tab. IX). Es bleibt bei veränderter Spannung in Annäherung konstant und ist dem Gasdrucke proportional. Der gesuchte Effekt ist also nicht nachzuweisen; die kleine Abweichung von der Proportion des Druckes ist sogar negativ.

1) Vgl. p. 223 u. 263.

Aber wir sehen aus der Analogie der Sauerstoffeffekte (erste Druckstufe), daß der Wert für eine Druckstufe sehr wohl ein wenig aus der Regel herausfallen kann, die sich an den übrigen Werten und an dem Durchschnittswerte deutlich genug erkennen läßt. Bei dem verhältnismäßig starken Abklingen des bewegten Stickstoffteilchens könnten wir übrigens nur einen kleinen Effekt erwarten.

Eine für unsere Zwecke sehr wertvolle Ergänzung der Vegardschen Versuche ist durch Wilsar gegeben worden.[1]) Bei diesen Versuchen enthalten Beobachtungsraum und Entladungsraum verschiedene Gase. Das bewegte Teilchen, welches aus dem Entladungsraume stammt, gehört also immer einem anderen Gase an als das ruhende Teilchen. Bei allen Versuchen wurden die Gase in Beobachtungs- und Entladungsraum vertauscht, so daß dasselbe Gas das eine Mal die bewegten, das andere Mal die ruhenden Strahler stellte und jedesmal mit dem gleichen anderen Gase in Berührung kam. Auf diese Weise wurden einerseits Sauerstoff und Stickstoff, andererseits Wasserstoff und Stickstoff miteinander in Beziehung gesetzt. Figg. 5 und 6 geben Ausschnitte der durch Ausmessung der photographischen Platte erhaltenen Kurven. Die Reduktion nach dem Schwarzschildschen Gesetze ist nicht durchgeführt. Aus den Angaben im Texte (p. 1302) ist außerdem zu entnehmen[2]):

Bei Versuchen mit Sauerstoff-Kanalstrahlen in Stickstoff und Stickstoff-Kanalstrahlen in Sauerstoff erschien das unverschobene Spektrum des ruhenden Gases und ein verschobenes Spektrum des bewegten Gases. Das verschobene Spektrum dieser Versuche unterschied sich insofern von dem verschobenen Spektrum, welches auftrat, wenn im Beobachtungs- und Entladungsraume gleiche Gase enthalten waren, als nur die stärksten Linien beobachtet wurden. (Aus Wilsars Angaben geht nicht ganz deutlich hervor, ob dieser Unterschied darauf zurückgeführt werden kann, daß das bewegte Spektrum schwächer war, oder ob eine Verschiebung der Intensitäten zwischen den stärkeren und schwächeren

1) H. Wilsar, Ann. d. Phys. **39**. p. 1251. 1912.

2) Die Diagramme allein geben insofern kein ganz richtiges Bild, als in den dargestellten Abschnitten des Spektrums keine dopplerfähigen Stickstofflinien existieren. Zu beachten ist, daß auch die Sauerstofflinie 4367 Å (Fig. 5) dem dopplerfreien Spektrum angehört.

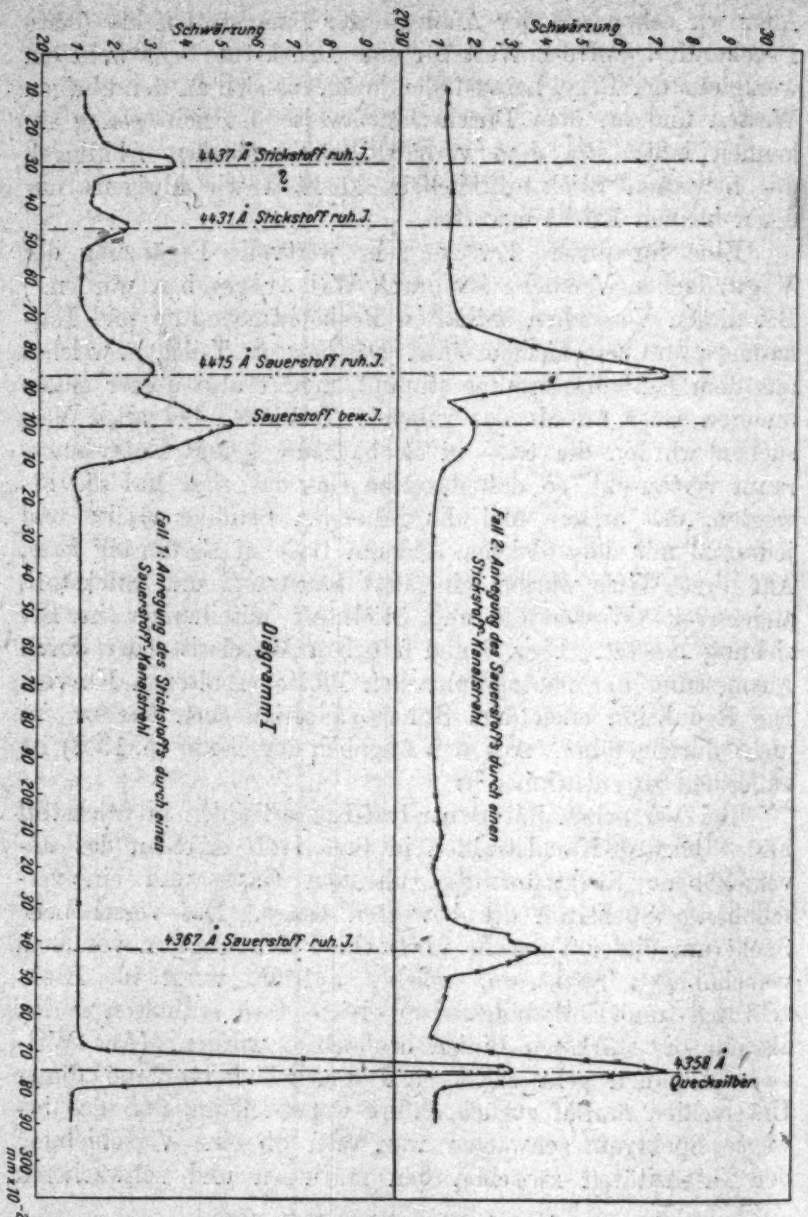


Fig. 5. (Wilsar Fig. 27, p. 1304.)

Linien angenommen werden muß; doch dürfte wohl die erste Annahme zulässig sein.)

Bei Versuchen mit Wasserstoff-Kanalstrahlen in Stickstoff und Stickstoff-Kanalstrahlen in Wasserstoff erschien das verschobene oder das unverschobene Spektrum des Wasserstoffs, je nachdem Wasserstoff ruhte oder Wasserstoff stieß.

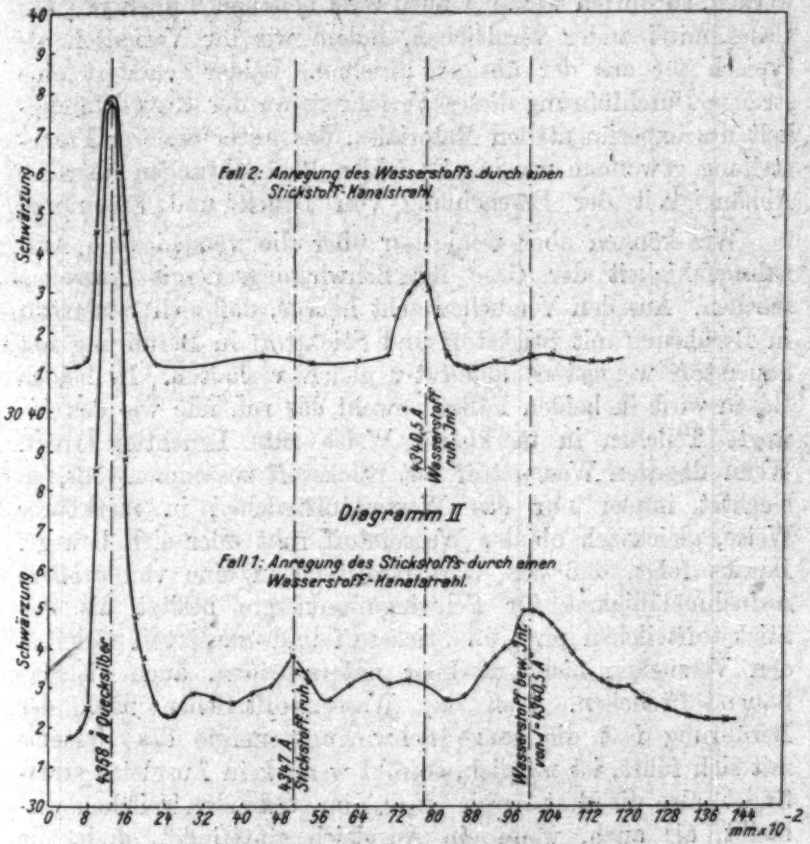


Fig. 6. (Wilsar Fig. 29, p. 1306.)

Das dopplerfähige Stickstoffspektrum fehlte; dagegen traten, wie aus dem Diagramm (Fig. 6) hervorgeht, Linien des dopplerfreien Stickstoffspektrums auf (4347 Å).

Bei diesen Zweigaseversuchen fehlt die enge Beziehung zwischen je einer verschobenen und einer zugehörenden ruhenden Linie. Aber wir können unsere Methode und unsere Gleichungen anwenden, indem wir die Gesamtheiten aller dopplerfähigen Linien der beiden Gase miteinander vergleichen. Wir untersuchen dann, wie das Spektrum des einen Gases sich

mit den Versuchsbedingungen gegen das Spektrum des anderen Gases verändert. Wenn wir keinen Grund haben, anzunehmen, daß die dopplerfähigen Linien in ihrem gegenseitigen Verhältnis durch die Versuchsbedingungen wesentlich geändert werden, so dürfen wir aber auch zwei beliebige Linien je eines Gases miteinander vergleichen, indem wir ihr Verhalten als typisch für das der übrigen ansehen. Leider scheitert eine strenge Durchführung dieses Verfahrens an der Unvollständigkeit des experimentellen Materiales, das unter anderer Fragestellung gewonnen wurde. Es fehlen Beobachtungen über die Abhängigkeit der Erscheinung von Druck und Spannung.

Wir können aber wenigsten über die verschiedene Aufnahmefähigkeit der Gase für Schwingungsenergie Aussagen machen. Aus den Versuchen geht hervor, daß sich Sauerstoff in Berührung mit Stickstoff und Stickstoff in Berührung mit Sauerstoff wenigstens qualitativ gleich verhalten. In beiden Gasen wird in beiden Fällen sowohl das ruhende wie das bewegte Teilchen in merkbarer Weise zum Leuchten erregt. Wenn dagegen Wasserstoff mit Stickstoff zusammenstößt, so leuchtet immer nur das Wasserstoffteilchen in merkbarer Weise, gleichviel, ob der Wasserstoff ruht oder sich bewegt. Daraus folgt, daß das Wasserstoffteilchen eine viel größere Aufnahmefähigkeit für Schwingungsenergie besitzt als das Stickstoffteilchen und, da Stickstoff und Sauerstoff sich bei den Versuchen nicht merkbar unterscheiden, auch als das Sauerstoffteilchen. Daß das Wasserstoffteilchen nach der Berührung fast die ganze Schwingungsenergie des Systems mit sich führt, ist möglich, sowohl wenn kein Ausgleich stattfindet, also die Restenergie ($E_{b\,\min}$) im stoßenden Teilchen verbleibt, als auch, wenn ein Ausgleich stattfindet, d. h. die Restenergie auf das ruhende Teilchen übergeht. In dem einen Falle würden wir nach unserer bisherigen Terminologie von einer höheren Stoßkapazität, im anderen von einer höheren Schwingungskapazität des Wasserstoffs sprechen.

Auch aus theoretischen Erwägungen können wir die Frage nach dem Vorhandensein eines Schwingungsausgleiches zwischen Teilchen verschiedener Gase nicht beantworten. Sind die zusammenstoßenden Gasteilchen gleichen Gases, so besteht zwischen ihren Schwingungen Resonanz; die Bedingungen des Ausgleiches sind dann besonders günstig. Da die Resonanz

beim Zusammentreffen von Teilchen verschiedener Gase fehlt, so wäre es wohl möglich, daß die Berührungszeit zur Herstellung eines wahrnehmbaren Ausgleiches nicht ausreicht. Wir müssen uns deshalb mit einigen methodischen Bemerkungen begnügen.

Gehen wir wieder von Gleichung (7) aus, so ist

$$\frac{S_r}{S_b} = \frac{\vartheta(\varkappa)}{1 - \alpha^{A/v}},$$

In dieser Gleichung gehören jetzt S_r und S_b verschiedenen Gasen an; $\vartheta(\varkappa)$ ist das Verhältnis der maximalen Schwingungsenergien (der Schwingungsenergien nach dem Stoße) des ruhenden und des bewegten Gases; also z. B. des Sauerstoffs und des Stickstoffs

$$\vartheta(\varkappa)_{0,N} = \frac{(E_r \max)_0}{(E_b \max)_N}.$$

Es ist also

$$(45) \qquad \frac{S_{r0}}{S_{bN}} = \frac{\vartheta(\varkappa)_{0,N}}{1 - \alpha_N^{A/v}}; \qquad \frac{S_{rN}}{S_{b0}} = \frac{\vartheta(\varkappa)_{N,0}}{1 - \alpha_0^{A/v}}.$$

Findet ein Ausgleich statt, so ist der Nenner mit dem Gasdrucke veränderlich; das Verhältnis S_{r0}/S_{bN} bzw. S_{rN}/S_{b0} zeigt also einen Druckeffekt.

Ist der Ausgleich vollkommen, so wird $\vartheta(\varkappa)_{0,N}$ gleich dem konstanten Verhältnis $(\varkappa)_{0,N}$ der Schwingungskapazitäten, und es bleibt nur $\alpha_0^{A/v}$ bzw. $\alpha_N^{A/v}$ und damit der Nenner veränderlich. Die Ausstrahlung in der freien Zeit ist aber von den Vorgängen beim Stoße, also auch von den Beziehungen auf den anderen Strahler unabhängig. Der Druckeffekt muß deshalb die gleiche Größe haben, wie bei den Versuchen, bei denen das bewegte Gas dem ruhenden gleich ist.

Findet kein Ausgleich statt, so strahlt jedes Teilchen die gesamte beim Stoße empfangene Energie aus, und die Ausstrahlungen verhalten sich wie die beim Stoße empfangenen Energien. Ein Druckeffekt ist unmöglich. Nach Gleichung (8) ist dann

$$(46) \qquad \frac{S_{r0}}{S_{bN}} = \frac{\Delta E_{r0}}{\Delta E_{bN}} = \frac{k_{r0}}{k_{bN}} = (k)_{0,N} = \text{const};$$

$$(46) \qquad \frac{S_{rN}}{S_{b0}} = \frac{\Delta E_{rN}}{\Delta E_{b0}} = \frac{k_{rN}}{k_{b0}} = (k)_{N,0} = \text{const.}^{1})$$

Das Vorhandensein eines Schwingungsausgleiches läßt sich also feststellen, und man kann auch feststellen, ob der Ausgleich weniger weit fortschreitet als zwischen Teilchen gleichen Gases.

Für die Umtauschversuche (Versuche, bei denen das ruhende und das bewegte Gas die Rollen tauschen) liegen die Verhältnisse dann besonders einfach, wenn es gelingt, einen reinen Molekülstrahl zu untersuchen. In diesem Falle stimmen die ruhenden und die bewegten Teilchen jedes Gases in allen Eigenschaften überein. Es ist also (wenn wir N und O als Repräsentanten zweier Gase nehmen, ohne Rücksicht darauf, ob sie einen Molekülstrahl liefern können) im Falle fehlenden Ausgleiches

$$k_{r0} = k_{b0} = k_0; \qquad k_{rN} = k_{bN} = k_N$$

$$(k)_{0,N} = \frac{1}{(k)_{N,0}}$$

$$(47) \qquad \frac{S_{r0}}{S_{bN}} = \frac{S_{b0}}{S_{rN}} = \frac{k_0}{k_N} \quad \text{oder} \quad \frac{S_{r0}}{S_{bN}} : \frac{S_{b0}}{S_{rN}} = 1.$$

Reinen Molekülstrahl und fehlenden Ausgleich vorausgesetzt, bleibt also das Verhältnis der Ausstrahlung beim Umtausche der Gase konstant, und es macht keinen Unterschied, welches Gas ruht und welches sich bewegt.

Findet ein vollkommener Ausgleich statt, so erhalten wir auf dieselbe Weise

$$(48) \qquad \begin{cases} \dfrac{S_{r0}}{S_{bN}} : \dfrac{S_{b0}}{S_{rN}} = 1 : (1 - \alpha_0{}^{\Delta/v})(1 - \alpha_N{}^{\Delta/v}), \\ \dfrac{S_{r0}}{S_{bN}} : \dfrac{S_{b0}}{S_{rN}} \neq 1. \end{cases}$$

Findet ein unvollkommener Ausgleich statt, so gilt wenigstens die in der letzten Ungleichung ausgesprochene Beziehung.

Im allgemeinen sind nun bei den Umtauschversuchen ruhende und bewegte Teilchen nicht von gleicher Kapazität.

---

1) Dabei sind aber k_{r0} und k_{b0} bzw. k_{rN} und k_{bN} nicht gleich, weil die bewegten Teilchen anderer Art sind als die ruhenden (Atome und Moleküle).

Da wir aber aus den Versuchen in reinen Gasen Grenzwerte für das Verhältnis der Kapazitäten festsetzen können, so ist es wohl auch möglich, die zwischen verschiedenen Gasen möglichen Effekte mit Hilfe dieser Grenzwerte einzugrenzen, so daß wir vielleicht auch aus den Umtauschversuchen am gemischten Kanalstrahle Schlüsse ziehen können.

Wilsars Diagramme zeigen auch eine auffallende ruhende Linie des Quecksilbers, hervorgerufen durch den Quecksilberdampf, der aus der Pumpe in den Beobachtungsraum gelangt. Eine bewegte Strahlung des Hg-Dampfes konnte nicht auftreten, da die Versuchsanordnung (Kühlung des zur Pumpe führenden Weges) ein Eindringen des Dampfes in den Entladungsraum verhinderte. Wurde aber die Kühlung weggenommen, so trat eine schwache, bewegte Hg-Linie auf. Die beobachtete Linie gehört also dem dopplerfähigen Spektrum des Quecksilbers an, d. h. sie stammt von den Zusammenstößen der aus dem Entladungsraume kommenden, den Kanalstrahl bildenden Teilchen des einen Versuchsgases mit den Teilchen des ruhenden Quecksilberdampfes. Sie ist stärker als irgendeine andere Linie des beobachteten Spektrums. Daß so geringe Mengen Dampfes eine so intensive Wirkung ausüben können, beweist, daß die isolierten Hg-Teilchen eine sehr große Kapazität besitzen, vielfach größer als die des Wasserstoffs.

Wilsar[1]) hat auch die drei Gase als Kanalstrahlen durch reinen Quecksilberdampf geleitet. Dabei zeigte sich nur das unverschobene Spektrum des Quecksilbers; das Spektrum des bewegten Gases konnte nicht wahrgenommen werden. Das Versuchsergebnis zeigt wiederum die überlegene Kapazität des Quecksilberatoms. Das isolierte Hg-Teilchen nimmt fast die ganze durch den Stoß erregte Schwingungsenergie in sich auf, und das stoßende Teilchen verläßt die Berührung ohne merkbare Schwingungsenergie. Vielleicht ist die hohe Kapazität eine allgemeine Eigenschaft der Metalldämpfe. Ich möchte aber noch auf die hohe Resonanzfähigkeit des Hg-Dampfes für Lichtschwingungen hinweisen, welche Wood[2]) nachgewiesen hat.

---

1) H. Wilsar, l. c. p. 1308.
2) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. 13. p. 353. 1912.

Wir können somit aus dem vorliegenden experimentellen Materiale wohl die verschiedene Kapazität der Gase feststellen, müssen aber die Frage nach dem Schwingungsausgleiche noch unentschieden lassen. Indessen ergibt sich aus in der folgenden Abhandlung anzustellenden Überlegungen, daß bei Berührung von Teilchen gleiches Gases ein Energieübergang auch zwischen verschiedenen Linien stattfindet, daß die Resonanz also nicht Bedingung des Ausgleiches ist. Dadurch gewinnt die Vermutung eines Schwingungsausgleiches auch zwischen Teilchen verschiedener Gase eine große Wahrscheinlichkeit.

In dem ersten Diagramme Wilsars (Fig. 5) findet sich neben der verschobenen auch eine schwache unverschobene Sauerstofflinie, wenn der Sauerstoff stößt, und neben der unverschobenen eine schwache verschobene Linie, wenn der Sauerstoff ruht. Auch neben der verschobenen Wasserstofflinie (Fig. 6) zeigt sich eine zweite Linie. Diese Linie liegt nicht an der Stelle der unverschobenen sondern etwas weiter nach Rot; aber sie ist das Spiegelbild der bewegten Linie. Diese hat zwei relative Maxima, und diese beiden Maxima liegen hier in gleichem gegenseitigen Größenverhältnis in umgekehrter Folge, so daß das Maximum, welches der größeren Geschwindigkeit entspricht, auch stärker nach längeren Wellen verschoben ist.

Wilsar hat diese Linien, wenigstens im Falle des Sauerstoffs, aus einer Vermischung der Gase erklärt. Um seine Erklärung zu stützen, hat Wilsar die Drucke gemessen, die im Beobachtungsraume auftraten, wenn nur das Gas strömte, dessen Weg aus dem Entladungsraume nach der Pumpe ging, im Versuchsfalle Sauerstoff. Der Druck betrug 0,0015 mm Hg gegen einen Druck von 0,012 mm Hg, welcher auftrat, wenn das andere Gas (Stickstoff) durch den Beobachtungsraum nach der Pumpe strömte. Danach hatte das fremde Gas mit $^1/_{10}$ an der Mischung im Beobachtungsraume Anteil. Aber bei der Messung des Teildruckes fand das aus dem Entladungsraume strömende Gas eine leere, zum Beobachtungsraume führende Kapillare, bei den spektrographischen Versuchen mußte es gegen den Gasstrom vordringen, der aus dem Beobachtungsraume kam. Es leuchtet ein, daß man beide Fälle nicht vergleichen kann. Einen Anhalt liefert dagegen eine andere Messung. Wilsar hat den Druck des Wasserstoffs

im Beobachtungsraume gemessen, wenn Wasserstoff den Kanalstrahl und Quecksilberdampf das ruhende Gas lieferte. Da das Mac Leod-Manometer den Dampfdruck nicht anzeigt, erhielt Wilsar den reinen Wasserstoffdruck. Dieser betrug einige zehntausendstel Millimeter. Da der Wasserstoff am leichtesten diffundiert, müßte der Druck der anderen Gase noch viel geringer sein, wenn die gleichen Rohre verwendet worden wären. Da für Wasserstoff ein besonderes Rohr mit engerer Kapillare verwendet wurde, dürften die Effekte ungefähr gleich sein; denn es ist anzunehmen, daß das Rohr für Wasserstoff zu dem Zwecke geändert wurde, gleiche Effekte zu erhalten. Die Erklärung der immerhin recht starken Linien aus der Gasmischung ist deshalb sehr wenig wahrscheinlich.

Indessen ist es nicht nötig, so komplizierte Überlegungen anzustellen. Wenn eine merkbare Vermischung der Gase eintrat, wenn der Teildruck des stoßenden Gases im Beobachtungsraume also ausreichte, die ruhende Linie des dopplerfähigen Spektrums dieses Gases zu erzeugen, so mußte er auch ausreichen, das dopplerfreie Spektrum dieses Gases zu erzeugen. Es findet sich aber keine Spur des dopplerfreien Spektrums des stoßenden Gases. Im Diagramm (Fig. 5) ist das besonders an der Linie 4367 Å des Sauerstoffs zu erkennen.

G. S. Fulcher[1]) hat gleichzeitig mit Wilsar Untersuchungen angestellt, die in der Methode und den Resultaten sehr ähnlich sind. Fulcher ist dabei von folgender heuristischer Hypothese ausgegangen, die auch von Wilsar diskutiert wird (p. 1300). Er nahm an, daß der Zusammenstoß zweier Teilchen im Kanalstrahle den Gesetzen des elastischen Stoßes folge, eine Annahme, welche durchaus eine Folgerung der kinetischen Gastheorie ist, wenn man den lichterregenden Stoß als identisch mit dem Stoße der kinetischen Gastheorie ansieht. Ist diese Annahme richtig, dann tauschen die beiden Teilchen beim Stoße ihren Bewegungszustand aus: das stoßende Teilchen bleibt stehen, das gestoßene fliegt weiter. Das ruhende Spektrum gehört also dem stoßenden, das bewegte dem gestoßenen Teilchen an. Gehören nun die Teilchen, welche aus dem Kanale stammen, einem anderen Gase an, als sie hinter dem Kanale finden, so muß das ruhende Spektrum dem Gase

1) G. S. Fulcher, Astroph. Journ. **33**. p. 28, 1911; **35**. p. 101. 1913.

im Entladungsraume, das bewegte Spektrum dem Gase im Beobachtungsraume angehören. Der Versuch hat diese Folgerung nicht bestätigt, hat also gegen die Hypothese entschieden, und Fulcher wie Wilsar schließen, daß das gestoßene Teilchen stehen bleibt und das stoßende seinen Weg fortsetzt. Durch Versuche von W. Wien[1]) ist dieses Ergebnis noch besonders bestätigt worden.

Wollen wir aber die fraglichen Linien in Wilsars Diagrammen ungezwungen erklären, so bleibt uns, nachdem wir die Erklärung einer Gasmischung abgewiesen haben, nur die Fulchersche Hypothese.

Bei einem elastischen Stoße wird aber der stoßende Körper nur dann zur Ruhe kommen, wenn er annähernd die Masse des gestoßenen Körpers hat. Ist er erheblich leichter, so wird er zurückgeworfen; ist er erheblich schwerer, so wird er mit verminderter Geschwindigkeit seinen Weg fortsetzen. Dem entspricht es, daß der auf Stickstoff stoßende Wasserstoff, wie gezeigt wurde, neben der zu kürzeren Wellen verschobenen Linie eine nach längeren Wellen verschobenen Linie zeigt, welche an Intensität erheblich schwächer, welche auch weniger verschoben ist, welche in ihrem Verlaufe aber das Spiegelbild jener Linie ist. Aus Fig. 7 ist aber auch zu erkennen, daß die Linie, welche als Begleiterin der bewegten Intensität des stoßenden Sauerstoffs auftritt, ein wenig nach Rot verschoben ist, entsprechend dem Verhältnis der Massen zwischen dem stoßenden Atom und dem gestoßenen Molekül. Und wieder ist die reflektierte Intensität der bewegten ähnlich, während sie von der ruhenden Intensität des gestoßenen Sauerstoffs (oberes Feld) ganz verschieden ist. Wir schließen also:

Es gibt im Kanalstrahle Zusammenstöße, bei denen das stoßende Teilchen stehen bleibt oder zurückgeworfen wird und das gestoßene Teilchen weiterfliegt. Wir halten diese, die Voraussetzungen der kinetischen Gastheorie erfüllenden „vollen Stöße" für identisch mit den Stößen, bei denen ein bewegtes Teilchen absorbiert wird, d. h. in der Fortsetzung seiner Bahn nicht mehr beobachtet werden kann; als Bedingung sehen wir ein zentrales Zusammentreffen der Massen an, während wir annehmen, daß zur Lichterregung ein gewisser Grad der Annäherung, zur Erzeugung einer Ladung

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 43. p. 955. 1914.

(soweit sie in der Abspaltung eines Elektrons besteht) ein höherer Grad der Annäherung genügt.

Die von Fulcher aufgeworfene Frage scheint für die Erkenntnis des Mechanismus der molekularen Vorgänge in Gasen so wichtig, daß es sich lohnt, nach einem unzweifelhaften experimentum crucis für die hier gegebene Erklärung der fraglichen Streifen in Wilsars Diagrammen zu suchen. Man ändere die bei Wilsar l. c., Fig. 26 dargestellte Anordnung so ab, daß zwei hintereinander liegende Beobachtungsräume mit gesonderter Zuleitung des Gases und besonderer Ableitung zur Pumpe vorhanden sind, und vergleiche den Effekt in beiden Beobachtungsräumen. Rühren die fraglichen Streifen von einer Gasmischung her, dann müssen sie in dem zweiten Beobachtungsraume wesentlich schwächer sein als in dem ersten; rühren sie von elastischen Stößen her, so muß der Effekt in beiden Räumen der gleiche sein, sofern der Druck des Beobachtungsgases der gleiche ist.

Wenn wir die geschilderte Wirkung des zentralen Stoßes zugeben, dann müssen wir nach dem Grundsatze der Kontinuität auch annehmen, daß es Stöße gibt, bei denen die nicht zentral getroffene Masse des ruhenden Teilchens eine Geschwindigkeit empfängt, die nur einen Teil der Stoßgeschwindigkeit ausmacht, wobei die empfangene Richtung zur Stoßrichtung einen beliebigen Winkel haben kann (streifender Stoß). Dadurch wird erklärt, daß die ruhende Intensität des Dopplerspektrums nach beiden Seiten verbreitert und unscharf ist. Bei den meisten Diagrammen, die wir kennen, laufen sogar die ruhende und die bewegte Linie ineinander, und zwar ist das regelmäßig bei Sauerstoff und Stickstoff der Fall[1]); die scharfe Trennung beider Intensitäten, welche Vegards Kurven in Wasserstoff zeigen, ist anscheinend eine Eigentümlichkeit dieses Gases.

Ein Versuch von Bärwald[2]) weist diese beim streifenden Stoße zerstreuten Strahlen in einwandfreier Weise nach. Bärwald leitet den Kanalstrahl durch ein undurchsichtiges Röhrchen (Aluminiumröhrchen), das eine seitliche Öffnung hat, welche so liegt, daß sie vom Kanalstrahle nicht direkt

1) Vgl. Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 632; Wilsar, l. c. p. 1268, 1294, 1298; Saxén, Diss. Würzburg 1911.

2) H. Bärwald, Ann. d. Phys. 34. p. 895. 1911.

getroffen werden kann. Das Auge sieht im Gase außerhalb des Röhrchens ein diffuses, von der Öffnung ausgehendes Leuchten. Die spektrale Beobachtung parallel zur Richtung des Kanalstrahles ausgeführt, zeigt eine ruhende Linie, welche nach Rot und Blau gleichmäßig verbreitert ist (Fig. 7).[1] Daraus folgt, daß die durch den streifenden Stoß zerstreuten Strahlen beliebige Winkel gegen den Kanalstrahl und innerhalb gewisser Grenzen beliebige Geschwindigkeiten haben können. Sie laufen ebenso oft in der Richtung des Kanalstrahles wie gegen dieselbe. Dabei ist zu beachten, daß der

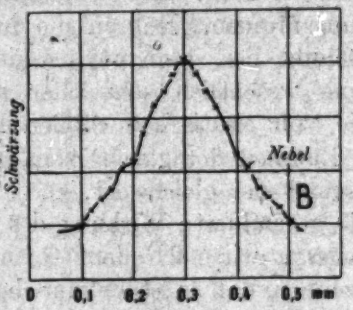


Fig. 7. (Bärwald Fig. 11 B, p. 895.)

Winkel zur ursprünglichen Richtung um einen bestimmten Betrag von 0° oder 180° abweichen muß, damit ein Teilchen überhaupt aus der Öffnung treten kann. Die am stärksten und die am wenigsten abgelenkten Strahlen werden also nicht beobachtet, und wir dürfen erwarten, daß ein kontinuierlicher Übergang zwischen den die gerade Bahn fortsetzenden und den an den ruhenden Molekülen reflektierten Strahlen besteht. Die retrograde rays Thomsons mögen, soweit sie nicht negativ geladene Teilchen sind, solche an den ruhenden Molekülen reflektierte Kanalstrahlen sein. Die fraglichen Streifen bei Vegard stehen also, wenn wir sie durch den elastischen Stoß erklären, durchaus im Zusammenhange mit anderen bekannten Erscheinungen.

Endlich hat noch ein Versuch Wilsars für uns Bedeutung,

1) Die zerstreuende Wirkung der Zusammenstöße auf die Kanalstrahlen zeigt sich übrigens auch bei den Versuchen nach der magnetischen Methode, und zwar darin, daß der Fluoreszenzfleck mit steigendem Gasdrucke sich verbreitert, unscharf wird.

durch den er den Einfluß der Absorption der Strahlen auf den Dopplereffekt zeigt. Die leitende Annahme ist dabei, daß die langsamen Teilchen in größerer Zahl absorbiert werden als die schnellen. Läßt man also den Strahl durch Gasschichten von verschiedener Dicke gehen, so muß sich die Geschwindigkeitsverteilung im Dopplerstreifen verschieben. Wilsar photographiert (p. 1291) das Dopplerspektrum von Hg in zwei verschiedenen Entfernungen von der Kathode (10 cm und 35 cm), wobei er den Strahl in schräger Richtung anblickt. Die Schwärzungsdiagramme zeigen, daß das Maximum der Geschwindigkeiten bei der Aufnahme, die in größerer Entfernung von der Kathode erfolgt, nach kürzeren Wellen verschoben war. Damit ist die Voraussetzung Wilsars bestätigt. Zugleich aber zeigt sich eine Veränderung von S_r/S_b zu ungunsten von S_b, dadurch erklärbar, daß das Verhältnis $\varkappa$ für die Strahlen größerer Geschwindigkeit ein anderes ist als für die absorbierten Strahlen geringerer Geschwindigkeit.

Es besteht aber ein scheinbarer Widerspruch zwischen dem eben besprochenen Ergebnisse der Wilsarschen Versuche und Versuchen von F. Wagner.[1]) Wilsar findet das Maximum der bewegten Intensität nach Blau verschoben; Wagner, der ähnliche Versuche angestellt hat, nach Rot, Wilsar schließt deshalb auf Auslese der Strahlen (die langsameren Strahlen werden stärker absorbiert als die schnelleren), Wagner auf Bremsung (die Strahlen werden, ohne absorbiert zu werden, in ihrer Geschwindigkeit herabgesetzt). Offenbar müssen aber beide Wirkungen nebeneinander herlaufen, denn die Schwingungen, welche die nicht absorbierten Strahlen auf ihrem Wege erzeugen (Zuwachs ΔE), stammen doch aus ihrer Bewegungsenergie: die Lichterregung ist nur auf Kosten der Geschwindigkeit möglich. Also müssen wir erwarten, daß das Maximum der bewegten Intensität sich zwar anfangs durch die Ausscheidung der langsameren Strahlen nach Blau verschiebt, in größerer Entfernung von der Kathode aber, wenn die Bremsung sich bemerkbar macht, wieder nach Rot zurückgeht.

Wagner hat übrigens diesen doppelten Effekt beobachtet, hat aber den in größerer Nähe der Kathode stattfindenden Effekt der Mitwirkung zerstäubten Kathodenmetalles

1) F. Wagner, Physik. Zeitschr. 13. p. 257. 1912.

zugeschrieben. Die Abnahme der Geschwindigkeit der bewegten Teilchen längs ihres Weges ist auch nach der magnetischen Methode durch Kutschewski nachgewiesen worden.[1])

Wir haben uns bisher nur mit denjenigen Linien des Kanalstrahles beschäftigt, die bei longitudinaler Aufnahme einen Dopplereffekt zeigen. Daneben besitzt das Spektrum jedes Gases spektrale Gebilde, welche in den longitudinalen Aufnahmen des Kanalstrahlenlichtes nicht verschoben erscheinen, und die deshalb nur von den ruhenden Gasteilchen ausgehen können. Bei den Wilsarschen Versuchen gehören sie immer dem Gase des Beobachtungsraumes an. Das dopplerfreie und das dopplerfähige Spektrum gehören im allgemeinen verschiedenen, auch in anderer Weise unterschiedenen, spektralen Liniengruppen an. Dopplerfähig sind das Serienspektrum des Wasserstoffs, das Funkenlinienspektrum des Sauerstoffs, das Linienspektrum des Stickstoffs mit Ausnahme bestimmter Liniengruppen. Dopplerfrei sind das Viellinienspektrum des Wasserstoffs, die Bandenspektren des Sauerstoffs und des Stickstoffs, einige Linien des Stickstoffs. An dem Serienspektrum des Sauerstoffs konnte nur Stark mit großer Dispersion den Dopplereffekt feststellen, während er von Paschen und Wilsar nicht aufgefunden werden konnte. Im Wasserstoff hat Stark an zwei Stellen des Spektrums auch ein kontinuierliches Spektrum entdeckt, über dessen Dopplereffekt sich natürlich, eben weil es kontinuierlich ist, nichts aussagen läßt. Für den Kopf einer Stickstoffbande mißt Vegard das Verhältnis S/B bei verschiedenen Drucken und Spannungen (Tab. IX, Spalte 4, $\lambda = 4278$ Å). Es ist dem Drucke proportional und von der Spannung unabhängig; die Intensität der Bande oder des Bandenkopfes hängt also ausschließlich von der kinetischen Energie des Kanalstrahles und der Zahl der ruhenden Teilchen ab, eine Beziehung, die man für Vorgänge erwarten muß, welche im ruhenden Gase durch den Kanalstrahl angeregt werden, wenn sie keine Beziehungen zum Schwingungsausgleiche haben.

Man hat die verschiedenen Spektren, die in demselben Gase auftreten, bisher in der Regel verschiedenen Trägern, geladenen und ungeladenen Trägern, Atomen und Molekülen zugewiesen. Besonders Stark hat großen Scharfsinn auf

1) Vgl. Königsberger u. Kischling, Verh. d. D. Physik. Ges. 8. p. 1001. 1910.

diese Frage verwendet; doch ist es nicht möglich gewesen, für ein bestimmtes Spektrum eine übereinstimmende Ansicht über die Natur des Trägers zu erzielen. Ist die Auffassung, welche die verschiedenen Spektren verschiedenen Trägern zuweist, richtig, dann kann ein Spektrum nur in der bewegten Strahlung fehlen, in der ruhenden aber vorhanden sein, wenn im bewegten Gase ein Träger fehlt, der im ruhenden Gase vorhanden ist. Nun sind aber in den Kanalstrahlen alle Arten von Trägern vorhanden, die im ruhenden Gase möglich sind (mit der Ausnahme, daß im Kanalstrahle des Sauerstoffs und vielleicht einiger anderen Gase die Moleküle fehlen). Also dürfen wir wenigstens für diese Gase die verschiedenen Spektren nicht verschiedenen Trägern zuweisen.

Haben aber das Dopplerspektrum und das dopplerfreie Spektrum gleiche Träger, so bleiben uns nur zwei Erklärungsmöglichkeiten. Es wäre möglich, daß das dopplerfreie Spektrum dem Teile des Abklingungsvorganges angehört, der nur dem ruhenden Teilchen eigen ist, weil er in dem bewegten Teilchen durch den neuen Stoß immer wieder unterdrückt wird. Wäre diese Annahme richtig, dann könnte das dopplerfreie Spektrum immer nur zugleich mit dem dopplerfähigen Spektrum auftreten; denn der zweite Teil des Abklingungsvorganges ist nicht möglich ohne den ersten, dessen Fortsetzung er ist. Nun fehlt aber bei Wilsars Versuchen mit Wasserstoffstrahlen in Stickstoff das dopplerfähige Stickstoffspektrum, während das dopplerfreie Stickstoffspektrum vorhanden ist, wie die 4347 Å entsprechende Linie in Fig. 6 zeigt. Damit scheidet diese Annahme, die im übrigen eine einfache und zureichende Erklärung gibt, wenigstens für einen Teil des dopplerfreien Spektrums aus.[1])

Die zweite Möglichkeit ist die Erklärung der verschiedenen Spektren aus verschiedenen Erregungsursachen. D. h. das dopplerfreie Spektrum kann nicht durch die Zusammenstöße erregt werden, welche das Dopplerspektrum erregen, und

1) Die Linie $\lambda = 4347$ Å fehlt in dem Verzeichnis der von Herrmann in Gruppen gebrachte Linien auf p. 1267 der Wilsarschen Arbeit. Sollte ihre Zuordnung zum Stickstoff nicht sicher sein (vgl. l. c. p. 1305), so wäre die diskutierte Annahme möglich. Mangels genauerer Angaben Wilsars müssen wir aber unsere Schlüsse auf dieser Linie aufbauen.

welche dadurch gekennzeichnet sind, daß zwei materielle Teilchen sich sehr rasch nähern und wieder entfernen. Andere mögliche Vorgänge im Beobachtungsraume, die zu einer Erregung von Schwingungen führen könnten, sind von den durch die Kanalstrahlen getroffenen Molekülen ausgehende sekundäre Kathodenstrahlen und Rekombinations- und Aufladungsvorgänge. Vorgänge der letzteren Art sind die Neutralisation eines positiven Atoms oder Moleküls durch die Verbindung mit einem freien Elektron, die Aufladung eines neutralen Teilchens durch die Verbindung mit einem Elektron und der Wiederaufbau eines Moleküls aus zwei getrennten Atomen oder Atomionen.

Die Erregung durch einen sekundären Kathodenstrahl ist entweder ein Induktionsstoß, nämlich dann, wenn das Elektron seinen Weg nach dem Stoße fortsetzt, oder ein Rekombinationsvorgang, nämlich dann, wenn das Elektron sich mit dem gestoßenen Teilchen verbindet. Im ersten Falle dürfte das Spektrum dem dopplerfähigen Spektrum im zweiten Falle dem Spektrum gleichen, welches bei der Vereinigung eines Teilchens mit einem freien Elektron entsteht. Es kommen also, wenn wir den Induktionsstoß als Erregung des Dopplerspektrums ausscheiden, als mutmaßliche Erreger des dopplerfreien Spektrums noch die drei Rekombinations- und Aufladungsvorgänge in Betracht. Allen diesen Vorgängen ist gemeinsam, daß Anziehung (potentielle Energie) in Bewegungsenergie und Bewegungsenergie in ihrem vollen Betrage in Schwingungsenergie verwandelt wird; während beim Induktionsstoße nur ein kleiner Bruchteil der Bewegungsenergie in Schwingung umgesetzt wird, dessen Geringfügigkeit durch die erwähnten Versuche Wilsars und Wagners über die Bremsung der Kanalstrahlen belegt ist. Deshalb muß erwartet werden, daß bei einem Rekombinationsvorgange eine viel höhere Schwingungsenergie erregt wird als bei einem Induktionsstoße. Das dopplerfreie Spektrum könnte also recht intensiv sein, auch wenn die Strahler, von denen es ausgeht wenig zahlreich sind.

Wir haben bisher untersucht, welche Vorgänge außer dem Induktionsstoße als Ursache der Lichterregung möglich sind. Damit die durch diese Vorgänge erregten Spektren ohne Dopplereffekt bleiben, dürfen diese Vorgänge an den be-

wegten Teilchen nicht oder nicht in gleicher Häufigkeit wie an dem ruhenden Teilchen stattfinden. Da alle diese Vorgänge aber auch an den bewegten Teilchen möglich sind, so bleibt nur zu untersuchen, ob die Annahme einer verschiedenen Häufigkeit möglich ist. Wir wollen dabei die Vereinigung eines materiellen Teilchens mit einem Elektron als elektrische Rekombination (die sowohl Neutralisation als Aufladung sein kann) der Vereinigung zweier Atome als molekularer Rekombination gegenüberstellen.

Die Häufigkeit der *elektrischen Rekombination* im Strahle und im ruhenden Gase hängt von dem Verhältnis der Anzahl der rekombinationsfähigen Teilchen im Strahle und im ruhenden Gase ab, die Häufigkeit der Neutralisationen von der Zahl der positiven, die der Aufladungen von der Zahl der neutralen. Die positiven Teilchen werden durch die elektrisierenden Stöße der bewegten Teilchen gegen die ruhenden erzeugt, und unter gleichen Bedingungen müßten im ruhenden und im bewegten Gase gleichviel positive Teilchen erzeugt werden. Da die stoßenden Teilchen zum Teil bereits positiv sind, sind die Bedingungen aber nicht ganz gleich; doch dürfte der Unterschied bei dem Überwiegen der neutralen Teilchen nicht sehr erheblich sein. Wenn also die *Neutralisation* ein besonderes Spektrum erzeugt, so wird dieses Spektrum eine ruhende und eine bewegte Intensität haben. Die Aufladungen dagegen werden im ruhenden Gase so viel zahlreicher sein, als die neutralen ruhenden Teilchen zahlreicher sind als die neutralen bewegten. Ein Spektrum, das nur durch die *Aufladungen* erregt wird, würde also neben den ruhenden im allgemeinen kein wahrnehmbares bewegtes Spektrum haben.

Da geladene und ungeladene Teilchen, Atome und Moleküle, wenn sie durch den Induktionsstoß erregt werden, das gleiche Spektrum ausstrahlen, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß sie auch nach der Erregung durch die beiden Arten elektrischer Rekombination (Aufladung und Neutralisation) die gleichen Spektra zeigen. Dann wird also das Verhältnis der ruhenden zur bewegten Strahlung des elektrischen Rekombinationsspektrums von dem Verhältnis der Aufladungs- zu den Neutralisationsvorgängen abhängen. Nun wird ein Elektron von einem positiven Teilchen sehr viel stärker angezogen als von einem neutralen. Es ist aber

möglich, daß dieser Unterschied nicht so groß ist, um das Übergewicht der Moleküle über die geladenen Teilchen auszugleichen, so daß also doch viel mehr Elektronen mit neutralen Molekülen als mit positiven Teilchen und deshalb auch vielmehr Elektronen mit ruhenden als mit bewegten Teilchen rekombinieren würden. Wir haben ja diese Annahme bereits zur Erklärung der Beziehungen zwischen der Ladung des Kanalstrahles und dem Gasdrucke machen müssen; sie gewinnt durch diese doppelte Verknüpfung einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit. Ist das Übergewicht der an den neutralen Molekülen sich vollziehenden elektrischen Rekombinationen hinreichend groß, so wird das bewegte neben dem ruhenden Spektrum nicht beobachtet werden. Trotzdem muß auch eine bewegte Strahlung dieses Spektrums vorhanden sein, und sie muß dieselbe Verschiebung besitzen wie die bewegte Strahlung des durch den Induktionsstoß erzeugten Spektrums. Ob sie sichtbar gemacht werden kann, ist eine Frage der photographischen Technik.

Die Annahme einer *molekularen Rekombination* setzt die einer molekularen Zersetzung voraus, die Annahme also, daß durch die Stöße der bewegten Teilchen gegen das ruhende Gas Atome erzeugt werden. Da die bewegten Teilchen zum überwiegenden Teile bereits von ihrem Ursprunge her Atome sind, so werden hauptsächlich aus dem ruhenden Gase Atome erzeugt werden. Diese ruhenden Atome rekombinieren miteinander und mit den bewegten Atomen; sie werden aber häufiger miteinander als mit den bewegten Atomen rekombinieren, weil die Wahrscheinlichkeit der Rekombination mit der Geschwindigkeit der Teilchen gegeneinander abnimmt. Ein molekulares Rekombinationsspektrum würde also zwar überwiegend ein ruhendes Spektrum sein, dürfte aber ebenfalls eine schwache bewegte Intensität besitzen. Es ist also bei ausreichender Belichtung ein schwacher Dopplerstreifen zu erwarten. Wenn sich aber ein ruhendes und ein bewegtes Atom vereinigen, so ist die Geschwindigkeit des neu entstandenen Moleküls die Resultierende der beiden ursprünglichen Geschwindigkeiten und gleich der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes vor der Vereinigung. Die Verschiebung der bewegten Intensität dieses Spektrums wird deshalb gering sein, und es wird einer besonders guten Dis-

persion bedürfen, um sie von der ruhenden Intensität zu trennen.

Wir haben hier von den Rekombinationen gesprochen, welche aus den Begegnungen der ruhenden Atome mit anderen ruhenden Atomen und mit den bewegten Atomen entstehen. Es ist aber offenbar auch möglich, daß die bewegten Atome untereinander rekombinieren. Dabei würde eine Änderung ihres Bewegungszustandes nur insoweit eintreten, als beide eine verschiedene Geschwindigkeit haben, was zu einer Häufung der mittleren Geschwindigkeiten führen müßte. Da sich aber die Atome des Kanalstrahles mit großer Geschwindigkeit in parallelen Bahnen bewegen, so dürfte die Wahrscheinlichkeit dieser Art von Rekombination nicht groß sein. Dieses Spektrum würde also hinter dem gleichartigen, aus der Rekombination zwischen ruhenden und bewegten Atomen entspringenden Spektrum zurücktreten.

Wir finden also zwei Erklärungen eines dopplerfreien Spektrums und zugleich eine Möglichkeit, zwischen ihnen zu entscheiden. Da Stark mit großer Dispersion an Serienlinien des Sauerstoffs Dopplereffekte entdeckt hat, die von anderen Beobachtern nicht wahrgenommen worden sind, so dürfen wir diese Linien mit einiger Wahrscheinlichkeit dem molekularen Rekombinationsspektrum zuweisen. Zu erwähnen ist aber, daß auch Wilsar an einigen Linien des Stickstoffs (l. c. p. 1270) Dopplereffekte festgestellt hat, bei welchen die Verschiebung der bewegten Intensität etwa die Hälfte der bei anderen Linien beobachteten Verschiebung beträgt.

Allerdings würde auch ein Spektrum, das den Endphasen des Abklingungsvorganges der Stoßerregung angehört (p. 283), an den weniger raschen und deshalb weiter abklingenden Strahlern Dopplereffekte zeigen können, die bei großer Dispersion zum Vorscheine kommen. Während aber ein Rekombinationsspektrum in allen Teilen gleichartige Effekte zeigen müßte, würde ein Spektrum, das sich fortschreitend über immer mehr Linien ausbreitet, Effekte von verschiedener Größe zeigen. Außerdem würde in dem zweiten Falle ein Einfluß des Gasdruckes wahrnehmbar sein; denn mit sinkendem Gasdrücke würden immer neue Abschnitte des Abklingungsvorganges an den bewegten Strahlern zum Vorschein

kommen. Es besteht also auch hier die Möglichkeit einer Entscheidung.

Von Wichtigkeit für unsere Frage ist noch eine Bemerkung Wilsars (l. c. p. 1265 u. 1266). Die Bande im dopplerfreien Spektrum der Stickstoff-Kanalstrahlen können auch vor der Kathode im negativen Lichte beobachtet werden; die Bande des Sauerstoffs, die sich im Kanalstrahlenlichte ganz analog verhalten, fehlen im negativen Lichte. Wilsar schließt daraus, daß die Träger dieses Spektrums im Kraftfelde vor der Kathode nicht bestehen können. Wenn wir die Bande als Rekombinationsspektrum ansehen, so genügt es auch, anzunehmen, daß diese Träger nicht entstehen oder daß die Rekombinationsvorgänge, welche diese Spektren erregen, nicht stattfinden können. Sehen wir die erregende Ursache der Bande aber in der *molekularen* Rekombination, so werden wir schließen, daß die anziehenden, zum Aufbau des Moleküls führenden Kräfte der Atomionen nicht imstande sind, die trennenden Kräfte des elektrischen Feldes vor der Kathode zu überwinden. Wir haben bereits früher die Eigenschaft des Sauerstoffs, im Kathodenfalle Atome zu bilden, in gleicher Weise aus der lockeren Bindung seiner Atome im Molekül erklärt und auch die größere Schwingungsfähigkeit der Moleküle damit in Verbindung gebracht. Wir kommen also wiederum von einem anderen Ausgangspunkte zu dem gleichen Schlusse. Daß andererseits der Stickstoff die Bande, welche wir der Rekombination des Moleküls zuschreiben möchten, im negativen Lichte zeigt, stimmt mit unseren früheren Schlüssen überein, nach denen der Stickstoff-Kanalstrahl einen Anteil von Molekülen besitzt. Wollten wir dagegen die Bande als *elektrische* Rekombinationsspektren auffassen, so müßten wir, um Wilsars Beobachtungen im negativen Lichte zu erklären, annehmen, daß im Kathodenfalle des Sauerstoffs auch keine neutralen Teilchen bestehen und entstehen können. Diese Annahme widerspricht den Beobachtungen Franks und anderer, nach denen gerade die Sauerstoffteilchen eine sehr starke Anziehung auf die Elektronen ausüben. Die Auffassung der Bande als molekularer Rekombinationsspektren besitzt also eine große Wahrscheinlichkeit.

Versuche, die Unterschiede der Spektren aus Unter-

schieden der erregenden Ursachen zu erklären, sind mehrfach gemacht worden. Gute Gründe sind insbesondere von Wien, Lenard und ihren Schülern für die Auffassung des dopplerfähigen Spektrums als Folge der Neutralisation beigebracht worden; doch ist diese Auffassung heute wohl allgemein zugunsten der Stoßtheorie aufgegeben. Dagegen hat Stark[1]) neuerdings das von ihm entdeckte kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs aus Neutralisationsvorgängen erklärt. Ich habe zu zeigen versucht, daß auch der Dopplereffekt und seine Abhängigkeit von den Bedingungen für diese Erklärungsversuche nutzbar gemacht werden kann. Um sichere Schlüsse zu ziehen, ist allerdings eine breitere experimentelle Unterlage erforderlich. Es wird dabei auch nötig sein, zu untersuchen, wie sich das Verhältnis der dopplerfreien zu den dopplerfähigen Linien mit den Versuchsbedingungen ändert.

Folgendes ist das Ergebnis dieses Abschnittes:

In Sauerstoff und Stickstoff gelten für die Lichterregung durch den Stoß der Teilchen dieselben Gesetze wie in Wasserstoff, doch wird zwischen zwei Stößen ein größerer Teil der Schwingungsenergie ausgestrahlt, und die Schwingungskapazität des Moleküls ist von jener des Atoms nicht so sehr verschieden. Im Kanalstrahle des Sauerstoffs sind nur Strahler gleicher Schwingungskapazität vorhanden, die wir auf Grund der magnetischen Analyse als Atome ansehen müssen. Der Kanalstrahl des Stickstoffs enthält wahrscheinlich neben den Atomen auch einen Anteil von Molekülen.

Wasserstoff besitzt eine viel höhere Kapazität für Schwingungsenergie als Sauerstoff und Stickstoff, Quecksilberdampf eine viel höhere Kapazität als die anderen untersuchten Gase. Die Frage, ob zwischen den Teilchen verschiedener Gase ein Schwingungsausgleich stattfindet, läßt sich aus dem vorliegenden experimentellen Materiale nicht entscheiden.

Als Erreger derjenigen Teile des Spektrums, welche keinen Dopplereffekt haben, kommen die elektrischen und molekularen Rekombinationsvorgänge in Betracht. Insbesondere ist es sehr wahrscheinlich, daß die Bandenspektren des Sauerstoffs und des Stickstoffs durch die Wiedervereinigung zweier Atome (molekulare Rekombination) erregt werden.

---

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 52. p. 255. 1917.

Neben gewöhnlichen lichterregenden Stößen kommen im Kanalstrahle elastische und zerstreuende Stöße vor. Beim elastischen Stoße tauschen das stoßende und das gestoßene Teilchen ihren Bewegungszustand aus; sie entsprechen den Stößen der kinetischen Gastheorie.

Die Erregung beim Stoße ist der Energie des Stoßes oder dem Quadrate der Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens proportional.

[Es folgt noch eine dritte Abhandlung.]

(Eingegangen 17. August 1918.)

2. *Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers.*

Bemerkungen zu den Äußerungen des Hrn. C. Schaefer und Frl. Martha Schubert;

von L. Vegard.

Vor kurzem wurde ich auf einen Aufsatz des Hrn. C. Schaefer und Frl. Martha Schubert in den Ann. d. Phys. **55**. p. 397 aufmerksam, in welchem sie zu einer Arbeit [1]), die ich zusammen mit Hrn. H. Schelderup vor einiger Zeit veröffentlicht habe, einige Bemerkungen machen.

Diese Bemerkungen gelten teils einer Prioritätsfrage mit Rücksicht auf die Rolle des Kristallwassers in den Kristallen, teils einem ausgesprochenen Zweifel über die Richtigkeit des gefundenen Raumgitters der Alaune.

Betreffs der Prioritätsfrage weisen die beiden Forscher auf eine von ihnen kurz vorher veröffentlichte Arbeit: „Zum optischen Verhalten des Kristallwassers“ [2]) hin. In dieser Arbeit haben sie über die Rolle des Kristallwassers eine ähnliche Ansicht geäußert wie diejenige, welche Hr. Schelderup und ich auf Grund unserer Raumgitterbestimmungen hergeleitet haben.

Weder die erwähnte Arbeit noch die ausgedehnten Untersuchungen über „Kurzwellige ultrarote Eigenfrequenzen der Sulfate und Karbonate“ [3]) waren mir früher bekannt, und ich bin dankbar dafür, daß ich auf diese sehr interessanten Arbeiten aufmerksam gemacht worden bin.

Obwohl die beiden Forscher die schon früher bekannte Anschauung geäußert haben, daß die H_2O-Gruppe des Kristallwassers in das Gitter hineingeht, so kann ich in den von ihnen

1) L. Vegard u. H. Schelderup, Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. Ann. d. Phys. **54**. p. 146. 1917.

2) C. Schaefer u. M. Schubert, Ann. d. Phys. **50**. p. 339. 1916.

3) C. Schaefer u. M. Schubert, l. c. p. 283. 1916.

ausgeführten Versuchen keinen Beweis für die Richtigkeit dieser Auffassung finden. Vielmehr scheint es mir, daß ihre Versuchsergebnisse ebensogut mit der entgegengesetzten Auffassung im Einklange sind.

Ihre Versuchsergebnisse sind kurz die folgenden:

Kristallwasserhaltige Mineralien geben die für Wasser charakteristischen selektiven Reflexionsmaxima in der Nähe von $\lambda = 3{,}2\ \mu$. Die Anwesenheit der Salzmoleküle aber übt jedoch einen merkbaren Einfluß auf die Lage des Reflexionsmaximums aus. Ein solcher Einfluß ist aber nicht nur an eine feste Substanz geknüpft, sondern man findet ihn auch in stark hydratisierten Lösungen[1]), wo ein Raumgitter nicht vorhanden ist.

Die beiden Forscher haben weiter für ein- und zweiachsige Kristalle die Reflexionsmaxima bei polarisiertem Lichte gefunden, und zwar in der Weise, daß der elektrische Vektor mit einer der kristallographischen Achsen zusammenfällt. Sie meinen jetzt eine Verschiebung des Maximums mit der Richtung der Lichtschwingung nachgewiesen zu haben. — Die gefundene Verschiebung ist aber äußerst gering und ist an der Grenze des möglichen Fehlers. — Die beiden Verfasser erwähnen auch, daß „die Versuche keineswegs als abgeschlossen gelten können, und in manchen Beziehungen verbesserungsfähig sind".

Die größte Veränderung von λ ist von der Größenordnung von $0{,}05\ \mu$ gefunden, und ist auch sehr klein im Vergleich mit denjenigen, welche für die übrigen Bestandteile des Salzes bei dem Reflexionsmaxima $\lambda =$ ca. $9{,}0\ \mu$ gefunden wurden. Für die Sulfate sind die Verschiebungen ca. 10mal größer ($0{,}5\ \mu$), und für Carbonate findet sich eine ca. 100mal größere Verschiebung.

Selbst wenn die beobachtete Verschiebung für das Kristallwasser nicht auf Beobachtungsfehler zurückgeführt werden kann, ist sie doch so gering im Vergleich mit dem, was zu erwarten wäre, daß sie keineswegs den von beiden Forschern gemachten Schluß über die Bindung des Kristallwassers notwendig macht. Vielmehr deuten ihre Versuche darauf hin, daß das Wasser in einer solchen Weise in den Kristall ein-

1) A. K. Ångström, Phys. Rev. 38. p. 47. 1904.

tritt, daß es nur in geringem Grade seine Wassereigenschaften geändert hat.

Es ist aber klar, daß in welcher Weise das Wasser auch eintritt, so tritt es im Kristalle nicht mit den mechanischen und physikalischen Eigenschaften des gewöhnlichen Wassers auf, sondern die Wassermoleküle müssen mehr oder weniger vereinzelt in das Salz eingelagert werden. Und es ist wohl zu erwarten, daß das Wasser in einer anisotropen Substanz eingebettet auch selbst in einigem Grade anisotrope Eigenschaften zeigen kann, ohne daß die Wasseratome in der üblichen Weise in das Salzgitter eintreten.

Im Lichte des von Schelderup und mir nachgewiesenen Verhaltens, daß die Atome des Kristallwassers wirklich in das Gittergerüste eintreten, ist die von Schaefer und Schubert gefundene geringe Anisotropie ganz überraschend.

In ihrer zweiten Bemerkung haben Hr. Schaefer und Frl. Schubert die Richtigkeit des von Schelderup und mir angegebenen Gitters der Alaune bezweifelt, indem ihre eigenen Versuche über die Reflexionsmaxima der Sulfate darauf deuten, daß in den Sulfaten die SO_4-Gruppe als Strukturelement auftritt. Eine solche Annahme folgt aber nicht mit Notwendigkeit aus den von beiden Forschern gemaehten Versuchen, die — wie es mir scheint — in der von Aschkinass angegebenen Weise besser gedeutet werden.

Nach Aschkinass sollten die Reflexionsmaxima in der Nähe von $\lambda = 9\ \mu$ dem Sauerstoff angehören, und mit unserer jetzigen Kenntnis der Kristallstruktur kann man wohl nicht annehmen, daß eine Atomgruppe als Ganzes mitschwingt. — Die einfachste Deutung der von Hrn. Schaefer und Frl. Schubert gefundenen Ergebnisse ist die, daß die Reflexionsmaxima durch die Schwingungen des Sauerstoffs verursacht werden, daß aber diese Schwingungen durch die Bindungsart des Sauerstoffs abgeändert werden.

So finden sie mit Hilfe von polarisiertem Lichte, daß die Frequenz in ein- und zweiachsigen Sulfaten sich mit der Richtung des elektrischen Vektors ändert.

Auch beim Übergang zu anderen sauerstoffhaltigen Salzen findet man dieselben Reflexionsmaxima wieder. So gibt Quarz ein prinzipales Reflexionsmaximum bei $\lambda = 9\ \mu$.

Bei den Carbonaten erzeugt natürliches Licht scheinbar ziemlich verschiedene Verhältnisse, indem mehrere neue Maxima auftreten, und keines davon tritt bei $\lambda = 9\ \mu$ auf. Jede prinzipielle Verschiedenheit indessen verschwindet, wenn man die Reflexionen bei polarisiertem Lichte betrachtet; denn in diesem Falle erhält man nur die für die Sulfate gefundenen charakteristischen, zwei Maxima jedoch mit der Wellenlänge verschoben. Die Verschiedenheit zwischen den Sulfaten und den Carbonaten in dieser Beziehung ist wesentlich eine quantitative; denn auch die anisotropen Sulfate haben dieselbe Anzahl Maxima, nur nicht so weit voneinander getrennt, und die Verschiedenheit ist die, daß die Carbonate in bezug auf selektive Reflexion eine mehr ausgeprägte Anisotropie zeigen.

Nach dieser Auffassung sind die Reflexionsmaxima in allen Fällen durch die Schwingungen des Sauerstoffs verursacht. Jede der beiden Frequenzen, die man in isotropen Kristallen findet, spaltet sich in anisotropen Kristallen in mehrere Frequenzen. Für einachsige Kristalle spaltet sich jede Frequenz in zwei, die der Schwingung $\parallel$ und $\perp$ der optischen Achse entsprechen. Die Versuche deuten darauf hin, daß in der einen Richtung die Frequenz vergrößert, in der anderen vermindert wird, und zwar in der Weise, daß *im Durchschnitt* die Frequenz ungeändert bleibt. Betrachten wir z. B. das Hauptmaximum des Eisenspats, so sind die folgenden Wellenlängen gefunden:

Elek. Vektor $\perp$ opt. Achse . .	$\lambda = 6{,}77\ \mu$
„ „ $\parallel$ „ „ . . .	$\lambda = 11{,}53\ \mu$
Mittel	$\lambda = 9{,}15\ \mu$

Eine sehr interessante Tatsache ist die, daß nach Schaefer und Schubert auch natürliches Licht ganz scharfe Maxima gibt. Diese Tatsache kann man in zweierlei Weise deuten. Entweder ist das natürliche Licht vor Eintreten der Reflexion in zwei polarisierte Strahlen zerlegt oder das Sauerstoffatom hat nur ganz getrennte Frequenzen, mit anderen Worten: die Frequenz in anisotropen Kristallen ändert sich nicht kontinuierlich mit der Richtung. — Es wäre gewiß sehr interessant, ob Versuche, ähnlich wie diejenigen von Schaefer und Schubert, diese Frage entscheiden könnten.

Die Ergebnisse von Hrn. Schaefer und Frl. Schubert lassen sich also durch die Annahme, daß die selektive Reflexion durch die Schwingungen des Sauerstoffatoms zustande kommt, ganz einfach deuten, während die Annahme von Mitschwingung der Atomgruppen SO_4, CO_2 usw. kaum haltbar ist. Damit aber fällt auch die Grundlage des von Hrn. Schaefer und Frl. Schubert gemachten Einwandes gegen die Richtigkeit des Alaungitters fort; denn selbst gegenüber ganz eingreifenden Änderungen der Kristallstruktur und der chemischen Konstitution können die Sauerstoffschwingungen sich durchschnittlich ziemlich ungeändert halten. Es ist dann nur zu erwarten, daß die Alaune mit derselben chemischen Konstitution und demselben Gittertypus auch annähernd identische Reststrahlengruppen geben.

Es ist zwar so — wie Hr. Schaefer und Frl. Schubert bemerken —, daß einer der Raumgitterparameter (die Kantenlänge des Schwefeltetraeders) in den verschiedenen Alaunen ganz bedeutende Unterschiede aufweist; wenn wir aber die Reststrahlengruppen mit den Sauerstoffschwingungen verbinden, müßte vielmehr die Seitenlänge des O-Würfels für die Frequenzen maßgebend sein. Dieser Parameter hat aber für sämtliche untersuchten Alaune annähernd denselben Wert.

Mit Rücksicht auf das gefundene Alaungitter darf ich noch folgendes bemerken.

Wir versuchten natürlich zuerst die beobachteten Reflexionsmaxima durch die Annahme, daß die SO_4-Gruppe als Strukturelement im Raumgitter eintrete, zu befriedigen. Eine solche Annahme wäre an sich nicht unmöglich; denn die Elemente (SO_4) erhalten eine kubische Symmetrie, wenn wir die S-Atome im Zentrum eines Tetraeders mit O-Atomen in den Ecken angebracht denken. Es ist aber nicht möglich, auf dieser Grundlage ein Raumgitter, welches die Beobachtungen befriedigt, aufzubauen. So läßt sich z. B. die Verdoppelung der Gitterkonstante der (110)-Ebene nicht in der Weise erklären.

Zusammenfassung.

1. Die von Hrn. Schaefer und Frl. Schubert ausgeführten Messungen über das optische Verhalten des Kristallwassers beweisen nicht, daß das Kristallwasser als Struktur-

element des Gittergerüstes auftritt, und der von den beiden Forschern gemachte Prioritätsanspruch ist deshalb nicht berechtigt.

2. Die von Hrn. Schelderup und mir für die Alaune beobachteten Reflexionsmaxima lassen sich mit der Annahme, daß die SO_4-Gruppe als Strukturelement des Gitters vorkommt, nicht vereinigen. Die Deutung der von Hrn. Schaefer und Frl. Schubert ausgeführten Reststrahlversuche fordert auch nicht eine solche Annahme, und es existiert überhaupt keine Nichtübereinstimmung zwischen ihren Ergebnissen und dem von Hrn. Schelderup und mir für die Alaune gefundenen Raumgitter.

(Eingegangen 24. Oktober 1918.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

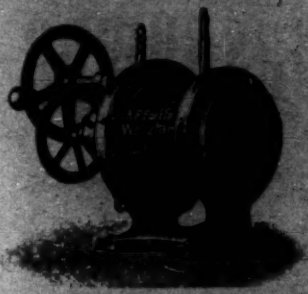
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

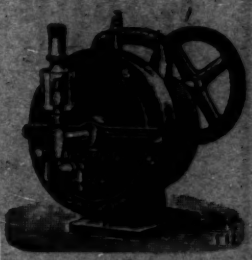
System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P. angemeldet



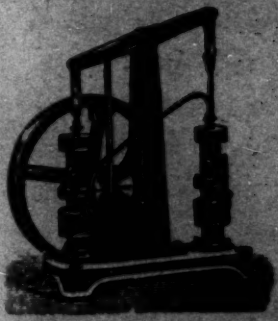
Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.



Vakummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



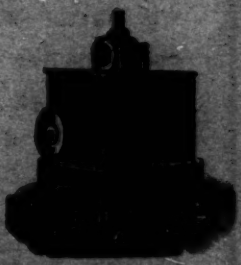
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

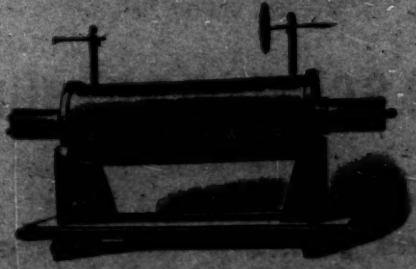
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

		Seite
1.	Edgar Meyer. Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld	297
2.	K. W. Meissner. Zur Kenntnis des Neonspektrums	339
3.	J. Sommer. Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades	375

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

1919. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. *Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld*[1]; *von Edgar Meyer.*

Einleitung.

§ 1. Bekanntlich bezeichnet man als *Funkenpotential* diejenige maximale Potentialdifferenz, die man an die Elektroden einer Gasentladungsstrecke für eine unbeschränkte Zeit anlegen kann, ohne daß Funkenentladung eintritt.[2]) Im folgenden wird der Einfluß behandelt, den ein magnetisches Feld auf dieses Funkenpotential ausübt[3]); dabei soll unter transversalem magnetischen Felde ein solches verstanden sein, dessen Kraftlinien senkrecht zu denen des elektrischen Feldes verlaufen; longitudinal wird das magnetische Feld genannt, wenn seine Richtung parallel derjenigen des elektrischen Feldes ist.

§ 2. Eine Übersicht über die bisherigen Beobachtungen ergibt folgendes:

Thomson[4]) hat wohl als erster den Einfluß eines magnetischen Feldes auf das Einsetzen einer selbständigen Elek-

1) Vgl. die vorläufige Mitteilung: Edgar Meyer, Arch. de Genève (4) **41**. p. 491. 1916.

2) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang durch Gase; übers. von E. Marx, Leipzig 1906 bei Teubner. p. 368.

3) Bei einer derartigen Abgrenzung des Problems brauchen die vielen Arbeiten nicht berücksichtigt zu werden, die den Einfluß eines Magnetfeldes auf das Potential einer *bestehenden* selbständigen elektrischen Strömung in einem Gase behandeln. Die wichtigsten hierher gehörenden Arbeiten sind: A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. **63**. p. 209. 1897. — K. Birkeland, C. R. **126**. p. 586. 1898. — E. Riecke, Ann. d. Phys. **4**. p. 592. 1901. — R. S. Willows, Phil. Mag. (6) **1**. p. 250. 1901. — J. E. Almy, Proc. Cambr. Phil. Soc. **11**. p. 183. 1900—1902. — O. Lehmann, Verh. d. naturwiss. Vereins zu Karlsruhe **18**. p. 76. 1904 bis 1905. — R. F. Earhart, Phys. Rev. (2) **3**. p. 103. 1914. — O. W. Silvey, Phys. Zeitschr. **14**. p. 816. 1913.

4) J. J. Thomson, Recent Researches, § 89—91, Oxford, Clarendon Press 1893.

trizitätsströmung in Gasen bei der elektrodenlosen Ringentladung beobachtet. Er fand, daß die Entladung in einem longitudinalen Magnetfelde erleichtert, in einem transversalen Felde dagegen erschwert wurde.

Warburg[1]) fand anläßlich seiner bekannten Untersuchungen über die Verzögerung bei der Funkenentladung, daß das Funkenpotential in Luft von ca. 0,02—0,08 mm Hg-Druck durch transversale Magnetfelder stark erhöht, durch longitudinale dagegen beträchtlich erniedrigt wurde. Bei höheren Drucken wurde kein Einfluß des Magnetfeldes mehr konstatiert.

Precht[2]) hat dann einen recht komplizierten Einfluß eines Magnetfeldes auf die Funkenentladung in Luft von Atmosphärendruck festgestellt, allerdings nur für den Fall, daß der Funken zwischen einer Spitze und einem abgerundeten Drahte überging.

Die Resultate Warburgs fanden ihre Bestätigung in den Arbeiten von Lehmann[3]), Sieveking[4]) und Meurer.[5])

Eingehender beschäftigte sich dann Righi[6]) mit dem Problem. Er bestimmte das Funkenpotential in Abhängigkeit von der Feldstärke sowohl in transversalen als auch in longitudinalen Feldern, jedoch nur bei wenigen einzelnen Drucken. Seine Resultate, die einen sehr verwickelten Zusammenhang zwischen Funkenpotential und magnetischer Feldstärke ergeben, weichen in vielen Punkten von meinen Ergebnissen ab, was sich aber ohne weiteres auf das nicht homogene elektrische Feld bei Righi zurückführen läßt.

Im Anschlusse an diese Versuche von Righi und an solche von Gouy[7]) hat darauf Bloch[8]) einige Experimente angestellt; er gibt aber für den uns hier interessierenden Fall von *homogenem* elektrischen und transversalem magnetischen Felde keine quantitativen Angaben. Seine Deutung, die sehr wenig tief ist, zieht auch die Stoßionisationstheorie von Townsend nicht in Betracht.

---

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. Berliner Akad. **10.** p. 128. 1897; sowie Wied. Ann. **62.** p. 385. 1897.

2) J. Precht, Wied. Ann. **66.** p. 676. 1898.

3) O. Lehmann, Boltzmann-Festschrift p. 287. Leipzig bei Barth 1904.

4) H. Sieveking, Ann. d. Phys. **20.** p. 209. 1906.

5) H. Meurer, Ann. d. Phys. **28.** p. 199. 1909.

6) A. Righi, Rend. della R. Acc. di Bologna **14.** p. 151. 1909—1910; Le Radium **7.** p. 285. 1910; **8.** p. 135 u. 196. 1911.

7) L. Gouy, C. R. **150.** p. 1652. 1910; **151.** p. 1020. 1910.

8) E. Bloch, Le Radium **8.** p. 51. 1911.

Vermittelst einer Entladungsröhre, in welcher die Elektroden zwei koaxiale Zylinder waren, zeigte Strutt[1]), daß bei sehr niedrigem Drucke eine Potentialdifferenz selbst von ca. 200000 Volt keine Entladung hervorbrachte, ein transversales Magnetfeld jedoch eine leuchtende Entladung mit einer Potentialdifferenz von ca. 300—400 Volt zustande kommen ließ. Diese Arbeit ist deswegen von Wichtigkeit, weil, an sie anschließend, zuerst eine, wie mir scheint, plausible Erklärung des Einflusses eines Magnetfeldes auf die selbständige Elektrizitätsströmung gegeben wurde.

§ 3. Falls das Magnetfeld nicht besteht, erzeugen nämlich nach Townsend[2]) die Elektronen in dem hohen Vakuum von Strutt deshalb so geringe Ionisation in dem Raume zwischen den Elektroden, weil sie zu selten mit Gasmolekülen zusammenstoßen. Wird aber das transversale Magnetfeld erregt, so sind die Bahnen der Elektronen Spiralen, und der wirkliche Weg, den jetzt die Elektronen in dem Gase zurücklegen, ist sehr viel größer als die direkte Entfernung der beiden Elektroden. Es wird also die Anzahl der Zusammenstöße zwischen einem Elektron und den Gasmolekülen stark ansteigen und, falls eine genügend hohe Potentialdifferenz anliegt, so daß die kinetische Energie des Elektrons vor jedem Zusammenstoße genügend groß ist, kann nunmehr eine starke Stoßionisation und damit selbständige Entladung einsetzen.

Nach Townsend ist so die Wirkung des Magnetfeldes dieselbe wie die einer *Drucksteigerung des Gases*, wenigstens soweit die Ionisation durch Elektronen in Betracht kommt. Eine hiermit identische Deutung des Effektes gab Horton.[3])

§ 4. Trotz der vielen zitierten Beobachtungen fehlen jedoch systematische Versuche über die Abhängigkeit des Funkenpotentials vom Druck im Magnetfelde. Das Ziel der folgenden Messungen ist solche auszuführen, sowie festzustellen, ob wirklich die Townsendsche Deutung in allen Punkten zutrifft. Die Verwendung gut homogener elektrischer und magnetischer Felder, auf die in den angeführten Arbeiten nie Gewicht gelegt wurde, schien mir geeignet, die Versuchsbedingungen möglichst durchsichtig zu machen. Es wurden

1) R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. London (A) **89**. p. 68. 1913—1914.
2) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) **26**. p. 730. 1913.
3) F. Horton, Phil. Mag. (6) **26**. p. 902. 1913.

transversale Felder untersucht, da hierbei die quantitativen Berechnungen nach Townsends Stoßionisationstheorie besonders einfach werden.

Das Resultat der Versuche zeigt aber, daß es trotz der klaren und vereinfachten Versuchsbedingungen nicht gelingt, alle Erscheinungen auf Grund der reinen Townsendschen Theorie so zu deuten, als ob der Magneteinfluß einfach äquivalent einer Drucksteigerung des Gases ist. Immerhin bieten die Versuche einiges Interesse, besonders auch deshalb, weil dabei recht sorgfältige Bestimmungen des Funkenpotentials in Luft von mittlerem Drucke ohne Magnetfeld ausgeführt wurden, die, wie mir scheint, richtigere Werte ergeben als die bisher bekannten.

§ 5. Ehe die neuen Versuche beschrieben werden, ist noch eine Arbeit von Earhart[1]) zu besprechen, in der ebenfalls ganz homogene elektrische und magnetische Felder verwendet werden, deren Richtungen aber einander parallel sind. Earhart findet, daß das Funkenpotential oberhalb des kritischen Druckes (das ist jener Druck, bei dem das Funkenpotential bei gegebener Elektrodendistanz ein Minimum ist) durch ein longitudinales Magnetfeld *nicht* beeinflußt wird.[2]) Unterhalb des kritischen Druckes wird das Funkenpotential durch das Magnetfeld herabgesetzt, und diese Erniedrigung hängt etwas von dem Querschnitte der Funkenstrecke ab. Das Minimumpotential in Luft ohne Magnetfeld bestimmt Earhart schwankend zwischen 356 und 400 Volt. Quantitative theoretische Überlegungen werden nicht angestellt.

Versuchsanordnung.

§ 6. Fig. 1 gibt eine schematische Darstellung der Anordnung. Die Funkenstrecke ist, ähnlich wie die von Carr[3]),

1) R. F. Earhart, Phys. Rev. (2) 4. p. 135. 1914.

2) Die von Earhart gefundene Beeinflussung desjenigen Potentials, das notwendig ist, um die selbständige Entladung *zu unterhalten*, interessiert hier deshalb nicht, weil für diesen Fall die Verzerrung des elektrischen Feldes unübersehbare Komplikationen herbeiführt.

3) W. R. Carr, Proc. and Trans. Roy. Soc. Canada (2) 8. Section III. p. 161. 1902 und Trans. Roy. Soc. London (A) 201. p. 403. 1903; fälschlich oft zitiert als Proc. Roy. Soc. London 71. p. 374. 1903, hier befindet sich nur ein ganz kurzer Auszug aus der Arbeit von Carr. Vgl. auch: J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang p. 380.

folgendermaßen gebaut. *A* und *B* stellen die Elektroden aus Messing dar. Sie haben einen Durchmesser von 21 mm und sind in Zylinder aus Ebonit *EE* von 24,5 mm Durchmesser eingebettet. Die Vorderseite ist plan abgedreht und sauber poliert. Gut planparallele Hartgummiringe *R* von 24,5 mm äußerem, 8,1 mm innerem Durchmesser (falls es nicht anders angegeben ist) und verschiedenen Höhen (ca. 1—5 mm)

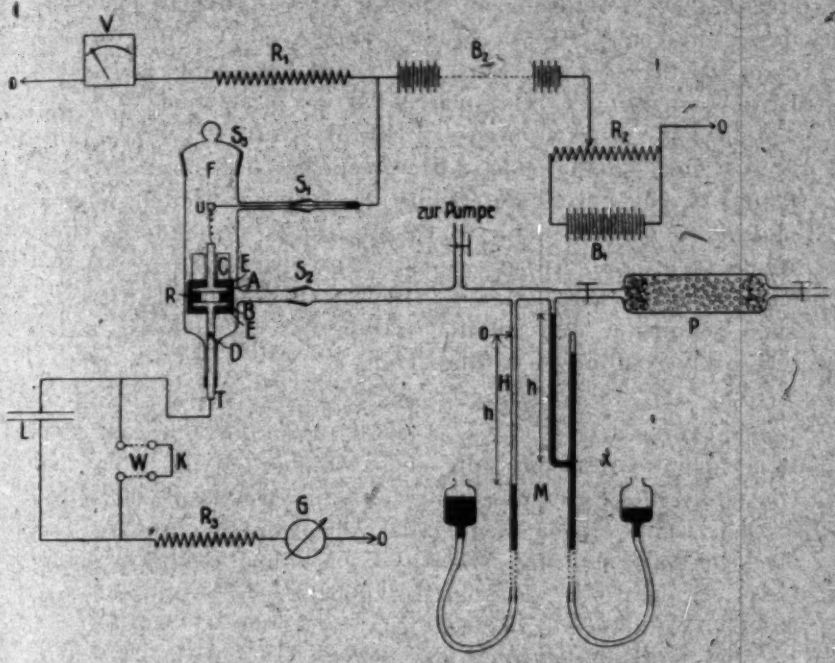


Fig. 1.

halten die Elektroden voneinander entfernt und definieren die Funkenlängen. Die Höhen dieser Ringe, die mit einem Komparator von Zeiss gemessen wurden, differierten an verschiedenen Stellen um wenige Tausendstel Millimeter, so daß die späteren Angaben auf $\pm 0{,}005$ mm genau sind. Die innere Bohrung der Ringe ist so viel kleiner als der Durchmesser der Elektroden, um im Bereiche der Funkenstrecke ein vollkommen homogenes elektrisches Feld zu garantieren. Die Elektrode *B* besitzt an ihrem rückwärtigen Fortsatze bei *D* eine kleine Ausbohrung, vermittelst der sie auf der Messingstange *T* aufsitzt. Um eine Funkenlänge von exakt

bekannter Größe zu haben, saßen die Stücke A, R und B ohne jede Kittung aufeinander und wurden nur durch das aufgesetzte Messinggewicht C zusammengepreßt. Das Ganze befand sich in dem luftdichten Glasgefäße F (Höhe 13 cm, Durchmesser außen 2,7 cm). Die Ringe R hatten noch eine enge Bohrung von 0,6 mm Durchmesser, die exakt senkrecht zu ihrer Achse verlief, um den Druckausgleich zu gestatten. Die Zuführung zu den Elektroden geschah einerseits durch den eingekitteten Stab T, andererseits durch den in dem Schliffe S_1 eingekitteten Draht, der durch eine einschraubbare Vorrichtung U Verbindung mit der Elektrode A erhielt, wie die Figur zeigt. Durch den Schliff S_2 war F mit der Luftpumpe und dem Manometer M verbunden. Die Funkenstrecke konnte leicht durch den Schliff S_3 entfernt werden, einmal um sie zu putzen, dann auch um Ringe von anderer Höhe einzusetzen. Zur Kittung diente der bekannte weiße Siegellack Nr. 849 A von Liliendahl in Neudietendorf (Thüringen), zum Schmieren der Schliffe Ramsayfett. Durchweg waren nur Glasverbindungen vorhanden.

§ 7. Das Evakuieren geschah vermittelst der Kolbenpumpe von Gaede.[1]) P ist ein Trockenrohr, das auf eine Länge von ca. 15 cm mit einem Gemische von P_2O_5 und Glasperlen beschickt war, und das zum Abhalten von Staub an den Enden große dichte Glaswollepfropfen enthielt. Das Mc Leod-Manometer M, das für die Messung verhältnismäßig hoher Drucke (0,5—25 mm Hg) gebaut ist, erlaubt bis ca. 88fache Kompression herzustellen.

Bei der Druckmessung mit dem Mc Leod-Manometer wird durch das Aufsteigen des Quecksilbers in dem Steigrohre das Gas in dem Entladerohr F und den damit in Verbindung stehenden Glasröhren komprimiert, wodurch der Druck hier steigt. Das veranlaßt in der Druckmessung bei den verwendeten Größenverhältnissen einen nicht zu vernachlässigenden Fehler.[2]) Um diesen zu vermeiden, war noch ein zweites Glasrohr H von derselben lichten Weite wie das Steigrohr des Mc Leod-Manometers angebracht. In diesem Rohre wurde

1) W. Gaede, Physik. Zeitschr. 14. p. 1238. 1913.

2) Bei einer Funkenlänge von 4,05 mm und bei einem Drucke von ca. 2,2 mm Hg beträgt in Luft die Erhöhung des Funkenpotentials durch diese Kompression ca. 11 Volt.

Hg um dieselbe Höhe h (von einem willkürlich gewählten Nullpunkte an) gesenkt, wie das Hg in dem Steigrohre über den Punkt X anstieg. Auf diese Weise bleibt das ganze Volumen konstant, und der Fehler ist eliminiert. Die Genauigkeit der Druckmessung beträgt bei den kleinen Drucken ca. 2, bei den größten ca. 15 Einheiten der zweiten Dezimalen.

§ 8. Die obere Elektrode A war mit dem einen Pole einer Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie B_2 (1500 Volt in Stufen von je 50 Volt veränderlich) verbunden. Der andere Pol der Batterie lag an dem Ruhstratschen Schiebewiderstand R_2 (1700 Ohm), durch den die recht konstante städtische Zentrale B_1 (220 Volt) geschlossen war. So konnte eine kontinuierliche Spannungsänderung von Null bis ca. 1700 Volt hergestellt werden. Die Spannung wurde mit einem guten, nachgeeichten Millivoltmeter V von Siemens & Halske (Meßbereich 1500 Volt) gemessen. R_1 ist der Vorschaltwiderstand des Voltmeters, die Ablesegenauigkeit betrug 1 Volt.

Die untere Elektrode B war über die Wippe W, den Schutzwiderstand R_3 ($5 \cdot 10^6$ Ohm) und das Paschensche Panzergalvanometer G[1]) zur Erde abgeleitet. Die Stromempfindlichkeit des Galvanometers betrug $8{,}8 \cdot 10^{-10}$ Amp. bei einem inneren Widerstande von 4700 Ohm. L ist eine sehr gut isolierende Glimmerkapazität von 0,01 Mikrofarad, K ein Kurzschlußbügel.

Die Funkenstrecke war so zwischen den Polen eines Elektromagneten aufgestellt, daß das homogene elektrische Feld zwischen A und B senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien stand.

§ 9. Zum Erzeugen der Magnetfelder diente teils ein Elektromagnet von Ruhmkorffscher Art, teils ein solcher mit Wasserkühlung, der nach der Angabe von Hrn. Paschen im Tübinger Physikalischen Institute gebaut worden war. Die Magnetfeldmessungen geschahen vermittelst eines ballistischen Galvanometers mit verschiedenen Probespulen, die aus dem Felde herausgezogen und gleichzeitig mit einer nach Paschen[2]) konstruierten Vorrichtung um 90° gedreht wurden,

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 14. p. 521. 1913.
2) A. Stettenheimer, Ann. d. Phys. 24. p. 384. 1907.

so daß ein Streufeld in der Endlage der Spule keinen Fehler verursachte. Die Eichung der Probespulen geschah einmal in zwei von Paschen[1]) angegebenen und von ihm ausgewerteten Normalspulen. Bei einer zweiten Methode wurde eine Probespule von bekannter Windungsfläche in Verbindung mit dem wechselseitigen Induktionsnormal des Tübinger Institutes verwendet. Die Konstanten dieser Apparate waren von Gans und Gmelin[2]) sorgfältig bestimmt worden, ihre gemessenen Werte wurden benutzt. Beide Methoden ergaben sehr gut übereinstimmende Resultate. Die öftere Kontrolle der Feldmessungen stimmten immer auf weniger als 0,5 Proz. überein. Die Feldmessungen wurden sorgfältiger ausgeführt, als es eigentlich notwendig war; so sind z. B. auch die geringen Änderungen der Empfindlichkeit des ballistischen Galvanometers mit dem Ausschlage berücksichtigt.

Die Homogenität der Magnetfelder war über den Bereich der Funkenstrecke auf 0,3 Proz. gewahrt, was durch passend geformte Polschuhe erreicht wurde. Die einzelnen Magnetfeldstärken wurden durch langsames *stetiges* Steigen des Stromes, der an einem guten Milliamperemeter von Siemens & Halske mit Nebenschluß abgelesen wurde, eingestellt. Sollte das Funkenpotential dann wieder bei der Feldstärke Null gemessen werden, so wurde vorher immer durch abnehmende Kommutierung entmagnetisiert. Die Entmagnetisierung war vollständig, wie Kontrollversuche mit der Probespule ergaben.

Meßmethode.

§ 10. Die beschriebene Versuchsanordnung erwies sich als die beste von mehreren probierten. Zur Messung des Funkenpotentials wurde wie folgt vorgegangen. Während der Kurzschlußbügel K eingeschaltet war, wurde das Potential von A bis wenige Volt (ca. 10—20 Volt) unterhalb des Funkenpotentials gesteigert. Dann wurde durch Umlegen der Wippe W der Kurzschlußbügel K ausgeschaltet, wodurch die Kapazität L als Blockkondensator wirkte. Bei weiterer langsamer Steigerung des Potentials setzte dann momentane, sofort wieder aussetzende Entladung zwischen den Elektroden ein, was

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 6. p. 371. 1905.
2) R. Gans u. P. Gmelin, Ann. d. Phys. 28. p. 925. 1909.

sich durch einen kurzen Stromstoß im Galvanometer anzeigte. Hierauf wurde am Voltmeter die Spannung abgelesen. Um die Funkenverzögerung zu vermeiden, befand sich in der Nähe der Entladungsstrecke ein $RaBr_2$-Präparat von 5 mg.

War das Funkenpotential auf diese Weise bestimmt, so wurde die Spannung etwas erniedrigt, K für einen Moment eingeschaltet, um die Kapazität L zu entladen, K wieder ausgeschaltet und die Bestimmung des Funkenpotentials in der angegebenen Art wiederholt. Jedes später bei den endgültigen Messungen angeführte Funkenpotential ist das Mittel aus mindestens drei solchen Bestimmungen.

Als einziges Gas wurde staubfreie, trockene, aber vom Kohlensäuregehalt nicht befreite, atmosphärische Luft untersucht.

Kontrollmessungen.

Im folgenden werden die Messungen beschrieben, die angestellt wurden, um einerseits die richtige Art der Meßmethode zu finden, andererseits, um die Genauigkeit der Ergebnisse zu erproben.

§ 11. Bei den Vorversuchen waren in der Funkenstrecke als Elektroden Kugeln (1,5 cm Durchmesser) sowie schwach konvexe Platten verwendet worden. Es zeigte sich aber bei den Kugelelektroden, daß man für das Funkenpotential als Funktion des Druckes nicht den bekannten Verlauf erhielt. Der Grund dafür liegt darin, daß unterhalb des kritischen Druckes[1]) einem längeren Funken ein geringeres Potential entspricht. Es wird deswegen in diesem Gebiete der Funken nicht mehr an der kürzesten Entfernung der beiden Kugeln überspringen, sondern er wird seitlich herauswandern. Damit ist dann die Funkenlänge nicht mehr eindeutig definiert.[2]) Die schwach konvexen Platten ergaben zwar etwas bessere Resultate, doch zeigten Kontrollversuche mit Glimmentladungen, daß bei niedrigen Drucken die leuchtende Entladung an den Plattenrändern, bei höheren Drucken aber zentrisch in der Mitte ansetzte. Um den Fehler ganz zu ver-

1) Kritischer Druck wird derjenige genannt, für den das Funkenpotential bei gegebener konstanter Funkenlänge ein Minimum ist.

2) Das Übersehen dieses Punktes macht die Beobachtungen von Righi (l. c.) wertlos.

meiden, um also wohldefinierte Funkenlängen zu besitzen, wurde die in § 6 beschriebene Funkenstrecke gebaut. Ein besonderer Versuch mit Glimmentladung zeigte auch, daß nicht etwa das Loch für den Druckausgleich in den Ringen R der Entladung einen anderen Weg bot.

§ 12. Die Konstanz des Funkenpotentials V erwies sich als eine ausgezeichnete. Folgende hintereinander angestellten Beobachtungen mögen das zeigen.

Funkenlänge etwa 5 mm; Druck < 1 mm Hg.

V = 1103 Volt	1104 Volt	
1105	1105	Mittel: 1103,9 Volt;
1105	1105	mittlere Abweichung vom Mittelwert:
1103	1103	0,9 Volt.
1102	1104	

§ 13. Es wäre möglich, daß das verhältnismäßig starke $RaBr_2$-Präparat durch zu intensive Ionisation eine Feldverzerrung hervorgerufen hätte, wodurch außer der gewünschten Aufhebung der Verzögerung auch eine Funkenpotentialerniedrigung eingetreten wäre. Daß das nicht der Fall ist, zeigt z. B. folgende Messung, bei der das Radium sich einmal in einer Entfernung von ca. 2 cm von der Mitte der Funkenstrecke befand, dann in einer Entfernung von ca. 9 cm, so daß sich die Ionisationen in beiden Fällen verhalten wie ca. 1 : 20. Die gemessenen Funkenpotentiale stimmen innerhalb der Fehlergrenze überein.

Funkenlänge etwa 4,2 mm; Druck 0,91 mm Hg.

Entfernung des Ra	V
2 cm	368; 368; 369
9 cm	370; 369; 369

§ 14. Die Größe des Schutzwiderstandes R_3 hatte keinen Einfluß auf das Funkenpotential, wie durch Kontrollmessungen festgestellt wurde als R_3 ausgeschaltet war.

§ 15. Die Werte des Funkenpotentials sind vollkommen unabhängig davon, ob die Richtung des elektrischen oder des magnetischen Feldes um 180° gedreht wird, ein Zeichen dafür, daß vollständige Symmetrie vorhanden ist.

§ 16. Die Prüfung ergab, daß die Verwendung der Kapazität L (vgl. Fig. 1) als Blockkondensator richtige Werte des Funkenpotentials liefert. Zu diesem Zwecke wurden Ver-

gleichsmessungen angestellt, einmal wenn die Kapazität, dann wenn der Kurzschlußbügel K eingeschaltet war. Die Werte waren absolut identisch, allerdings unter der Voraussetzung, daß so gemessen wurde, wie in § 10 auseinandergesetzt ist, um Aufladungen der Kapazität zu vermeiden. Auch zeigte sich, daß nicht etwa die Kapazität während der Zeit, in der sie durch K nicht kurzgeschlossen war, durch mangelhafte Isolation des Ebonits in der Funkenstrecke oder des Glasgefäßes F langsam aufgeladen wurde, wodurch Fehler hätten verursacht werden können. Das wurde dadurch erwiesen, daß das gemessene Funkenpotential unabhängig davon war, wie lange Zeit (5″—2′) zwischen dem Anlegen der Kapazität und dem Funkenübergang verstrich. Diese ganze Schaltung war aus dem Grunde gewählt worden, um zu starke Energieumsetzung im Funken zu vermeiden, da sonst scheinbar von den Elektroden Gas abgegeben wurde, welches das Funkenpotential nach einem Funkenübergang änderte. 0,01 Mikrofarad erwies sich als passende Kapazität, da 2 und 0,1 Mikrofarad zu große Ausschläge des empfindlichen Galvanometers verursachten.

§ 17. Um konstante und reproduzierbare Werte des Funkenpotentials zu erhalten, stellte es sich als unumgänglich notwendig heraus, immer *frisches* Gas zu verwenden. Es ergab sich nämlich, daß das Funkenpotential in Luft wahrscheinlich außerordentlich empfindlich gegen geringe Verunreinigungen ist, ein Punkt, den die bisherigen Beobachter nicht genügend berücksichtigt haben. Diese Empfindlichkeit erinnert an die von Warburg gefundene Beeinflussung des Kathodengefälles [1]) sowie an die der Spitzenentladung [2]) durch minimale Verunreinigungen.

Um zu zeigen, wie dieser Einfluß der Verunreinigungen wirkt, sei als Beispiel ein Versuch angeführt, der mit Kugelelektroden ausgeführt war. Es wurde von einem Drucke von $p = 0{,}95$ mm Hg ausgegangen. Nachdem die Luft sich ca. 4 Stunden im Gefäße befunden hatte, wurde sukzessive frische Luft bis zu einem Drucke von $p = 28{,}3$ mm Hg zugelassen und jeweils das Funkenpotential bestimmt. Darauf wurde

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. Berliner Akad. **40**. p. 770. 1899, und Ann. d. Phys. **2**. p. 295. 1900.

2) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 545. 1887.

sukzessive evakuiert und wieder V gemessen. Bei diesem Vorgehen ist bei steigendem Drucke das Volumenverhältnis zwischen alter und frischer Luft um so größer, je früher die Messung angestellt wurde. Tab. 1 gibt die Versuchsresultate, Fig. 2 die graphische Darstellung, bei der die laufenden Nummern der Einzelmessungen angegeben sind.

Tabelle 1.

Funkenlänge etwa 1 mm.

Nummer des Versuches	p in mm Hg	V in Volt	$\bar{V}$ (Mittel)	Bemerkungen
1	0,95	393, 393, 393	393	steigender Druck
2	3,62	358, 358, 357	358	
3	4,54	351, 352, 353	352	
4	6,15	345, 344, 345	345	
5	7,50	341, 342, 342	342	
6	13,5	345, 343, 344	344	
7	15,5	349, 350, 349	349	
8	18,7	364, 367, 367	366	
9	28,3	421, 423, 422	422	
10	24,4	396, 397, 397	397	fallender Druck
11	21,2	379, 378, 379	379	
12	17,8	361, 361, 361	361	
13	11,5	342, 342, 342	342	
14	7,0	345, 344, 344	344	
15	2,77	355, 356, 355	355	
16	0,84	366, 365, 366	366	
17	0,36	385, 384, 384	384	
18	0,58	394, 397, 397	396	Messung nach 12 Stunden

Aus diesen Versuchen ist zu ersehen, daß mit größerem Prozentgehalte an alter Luft das Funkenpotential ansteigt. Nachdem nach dem Versuch Nr. 17 das Gas 12 Stunden ruhig im Apparate belassen war, zeigte das Funkenpotential (Versuch Nr. 18) wieder einen höheren Wert, der gut mit den Werten für altes Gas koinzidiert. Wurde dagegen die Kurve in derselben Weise mit frischem Gase aufgenommen, so stimmten die Funkenpotentiale bei Druckerhöhung und Druckerniedrigung gut überein.

Ein anderer Versuch ergab folgendes. Hatte die Luft 48 Stunden im Apparate gestanden, so war bei $p = 0{,}74$ mm $V = 447$ Volt. Nach Einlassen von frischer Luft wurde bei demselben Drucke gefunden $V = 854$ Volt.

Es frägt sich nun, worauf diese Erscheinung zurückzuführen ist.

§ 18. Ein Mangel bei der Dichtebestimmung erscheint ausgeschlossen; denn einmal erwies sich das Gefäß als vollkommen luftdicht, ferner wurde bei jedem Versuche der Druck neu bestimmt, und hierdurch wäre auch nicht das Verschwinden des Effektes bei Verwendung von frischer Luft zu erklären.

Man könnte ferner daran denken, daß durch Temperaturänderungen eine Veränderung der Elektrodendistanz und der Dichte der Luft hervorgerufen worden wäre. Wie aber besondere Versuche mit den in Betracht kommenden Temperaturdifferenzen lehrten, ist das nicht der Fall.

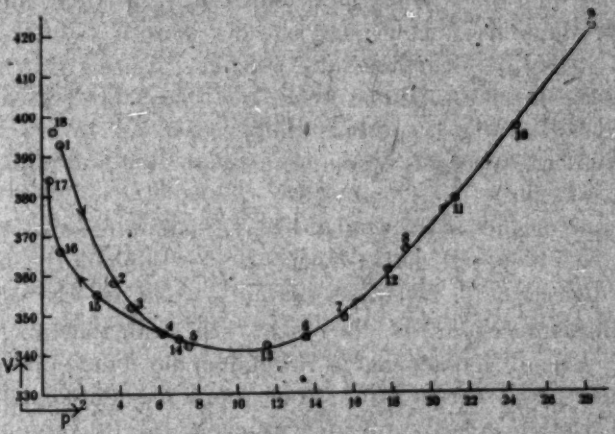


Fig. 2.

Es könnte auch durch den Funkenübergang irgendein Gas aus den Elektroden frei werden. Eine derartige Gasentwicklung findet bei *starken* Funken, falls die Blockkapazität nicht eingeschaltet ist, zweifellos statt, da hinterher immer sofort eine Erhöhung des Funkenpotentials zu bemerken ist, wenn man sich oberhalb des kritischen Druckes befindet,[1]) Aber bei Verwendung der Blockkapazität ist dieser Effekt nur nach einer größeren Anzahl von Funken zu bemerken. Diese Gasentwicklung kann auch deswegen nicht die Ursache der beschriebenen Erscheinung sein, weil die Potentialerhöhung auch

1) Unterhalb des kritischen Druckes ist das Umgekehrte der Fall.

bei ruhig stehendem Gase eintritt, wie die Versuche von Tab. 1 (Nr. 17 und 18) lehren.

§ 19. Es wäre noch die Feuchtigkeit in Betracht zu ziehen. Feuchte Luft zeigt ein höheres Funkenpotential als trockene Luft. So wurde z. B. bei homogenem elektrischen Felde und der Funkenlänge 4,05 mm das Entladegefäß 5mal mit Luft gefüllt, die durch Wasser hindurchgeperlt war, und bei einem Drucke von $p = 600$ mm Hg das Ganze $^1/_2$ Stunde stehen gelassen. Darauf wurde bis zu einem Drucke von 1,86 mm Hg, der in der Nähe des kritischen Druckes liegt, ausgepumpt. Das Funkenpotential ergab sich zu $V = 410$ Volt gegen $V = 337$ Volt unter denselben Bedingungen bei trockener Luft. Da hier der Druck der feuchten Luft auch mit dem Mc Leod-Manometer gemessen wurde, könnte man Einwendungen gegen die Druckmessung machen. Es zeigte sich aber, daß das Mc Leod-Manometer denselben Druck für verschiedene Kompressionen ergab, woraus folgt, daß der Wasserdampf nicht gesättigt, also eine Messung mit dem Mc Leod-Manometer erlaubt war.

Dieser Versuch steht wohl in Übereinstimmung mit Beobachtungen von Bouty[1]), nach denen bei $p = 1{,}86$ mm Hg die „cohésion diélectrique" für Wasserdampf größer ist als für Luft.

Trotzdem scheint es mir nicht sehr wahrscheinlich, daß in den übrigen Versuchen die Erhöhung des Funkenpotentials auf Feuchtigkeit zurückzuführen ist, denn das Funkenpotential der im Entladegefäß stehenden trockenen Luft nimmt auch dann mit der Zeit zu, falls das Gefäß sehr gut durch Auspumpen und nachhaltiges Spülen mit entfeuchteter Luft getrocknet ist, so daß an eine Wasserdampfabgabe von den Gefäßwänden her kaum gedacht werden kann.

Diese Auffassung wird auch noch durch folgendes gestützt. Thomson[2]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß das minimale Funkenpotential wahrscheinlich nahe identisch ist mit dem normalen Kathodenfall. Nun fand aber Warburg[3]), daß das normale Kathodengefälle in schwach feuchter Luft *kleiner* (341 Volt), Capstick[4]), daß es in reinem Wasser-

1) E. Bouty, C. R. **131**. p. 469 u. 503. 1900.
2) J. J. Thomson, Recent Researches, § 162. p. 158.
3) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 559. 1887.
4) J. W. Capstick, Proc. Roy. Soc. London **63**. p. 356. 1898.

dampf größer (469 Volt) ist als in trockener Luft (388 Volt).[1]) Es ist vielleicht erlaubt, ein ähnliches Verhalten[2]) bei dem hier beobachteten Funkenpotential anzunehmen. Tut man dieses, und wird bedacht, daß bei den vorliegenden Versuchen nur überhaupt geringe Feuchtigkeitsgrade vorkommen können, so wäre die Erhöhung des Funkenpotentials unmöglich durch den Feuchtigkeitsgehalt zu erklären, da, bei dem Stehen der trockenen Luft in dem vom P_2O_5-Behälter abgeschlossenen Entladungsrohre, höchstens eine Erhöhung der Feuchtigkeit durch Abgabe von Wasserdampf von den Wänden und damit eine Erniedrigung des Funkenpotentials eintreten könnte.

Eindeutig ist aber jedenfalls durch diese Versuche und Überlegungen der Einfluß des Wasserdampfes noch nicht geklärt. Es sollen baldigst Versuche unternommen werden, um die Wirkung sehr geringer Feuchtigkeitsgrade zu untersuchen.

§ 20. Haben die Elektroden längere Zeit zu Versuchen gedient, so tritt auch allmählich eine Erhöhung des Funkenpotentials in frischer Luft ein. Aber ein leichtes Putzen der Elektroden mit feinstem Schmirgelpapier und nachheriges Abreiben mit einem trockenen Leinenlappen stellt wieder die niedrigen Funkenpotentiale her. Ein Beispiel mag dies zeigen. Nachdem bei einem Elektrodenabstande von $l = 1{,}962$ mm 147 Funken erzeugt worden waren, ergab sich das Funkenpotential etwas zu hoch; es wurde bei $p = 2{,}33$ mm $V = 353$ Volt gefunden. Darauf wurde die Funkenstrecke auseinandergenommen und geputzt. Die Messung ergab jetzt bei demselben Drucke $V = 330$ Volt. Wie häufig dieses Putzen zu wiederholen ist, hängt von der Elektrodendistanz ab. Bei der kleinsten Funkenlänge von $l = 0{,}960$ mm mußte nach höchstens 45, bei der größten von $l = 4{,}926$ mm nach ca. 100—140 Funken der Reinigungsprozeß ausgeführt werden. Dieses ist eine sehr wichtige Vorsichtsmaßnahme, auf die auch die älteren Beobachter[3]) des Funkenpotentials bei geringen Drucken nicht geachtet haben.

Um sicher zu sein, daß die Elektroden trotz des häufigen

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 559. 1887.

2) Stickstoff zeigt gegenüber Feuchtigkeit dasselbe Verhalten wie Luft. Vgl. E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 562. 1887.

3) Z. B.: R. J. Strutt, Trans. Roy. Soc. London (A) **198**. p. 377. 1900. — W. R. Carr, Trans. Roy. Soc. London (A) **201**. p. 403. 1903.

Putzens eben blieben, wurden sie während der Untersuchung öfter auf der Drehbank wieder plan abgedreht.

§ 21. Auf Grund der Erfahrungen in den §§ 11—20, die darauf hindeuten, daß bei längerem Stehen die Luft im Entladerohr irgendwie geändert wird, wurde bei den endgültigen Funkenpotentialmessungen so vorgegangen. Vor jeder Messung wurde der Apparat bis auf ca. 1 mm Hg ausgepumpt und dann mit frischer[1]), trockener, staubfreier, atmosphärischer Luft von Atmosphärendruck gefüllt. Dieses wurde 3mal wiederholt und dann der Druck eingestellt, bei dem beobachtet werden sollte. Die Luft strömte dabei mit kleiner Geschwindigkeit durch das P_2O_5-Gefäß. Es wurde auch genügend lange Zeit gewartet, damit sich völliger Druckausgleich zwischen dem Mc Leod-Manometer und dem durch die enge Bohrung abgeschlossenen Volumen der Funkenstrecke herstellen konnte. Gemessen wurde (je 3 Ablesungen) bei dem Magnetfelde Null, dann bei drei verschiedenen Magnetfeldstärken, worauf die erste Messung wiederholt wurde. Messung 1 und 5, die gemittelt werden, stimmten immer recht gut überein. Die Temperatur wurde von einem $^1/_{10}{}^0$ Thermometer notiert.

Eine aus dem Beobachtungsjournal willkürlich herausgegriffene Einzelmessung möge als Beispiel dienen. Die überstrichenen Größen sind Mittelwerte, J ist die Magnetisierungsstromstärke, $\mathfrak{H}$ das dazu gehörige Magnetfeld in Gauss.

Datum: 8. 7. 1915.

Elektroden frisch gereinigt. 5mal mit trockener Luft gespült.

$l = 1{,}962$ mm; $t = 20^0{,}7$; $p = 4{,}55$ mm.

J	V	$\bar{V}$	$\bar{J}$	$\mathfrak{H}$	$\bar{V}$
0	352, 352, 351	352	0	0	352
1,28	352				
1,28	352	352	1,28	350	352
1,28	352				
4,35	369				
4,34	368	369	4,34	1161	369
4,33	369				
8,40	392				
8,38	393	392	8,38	1884	392
8,36	392				
0	352, 353, 352	352	0	0	

1) Bei diesen Füllungen wurde im Zimmer durch Öffnen der Fenster Durchzug hergestellt, um frische Luft im Zimmer zu haben.

§ 22. Zu erwähnen ist noch, daß nur äußerst selten die von Faraday[1]) gefundene Erscheinung beobachtet wurde, daß oft zum Einsetzen des *ersten* Funkens ein größeres Potential notwendig ist, als für die folgenden Funken. Bei den Versuchen von Strutt[2]) kam das häufig vor.

§ 23. Über die Genauigkeit der endgültigen Resultate, die in § 24 in graphischer Darstellung gegeben werden, ist folgendes zu sagen. Wie das Beispiel des § 21 zeigt, stimmen die Einzelmessungen sehr gut in sich überein. Abweichungen, die größer sind als 3 Volt, kommen nur äußerst selten vor, falls die Drucke oberhalb des kritischen liegen. Weit unterhalb des kritischen Druckes können größere Schwankungen, maximal ca. 20 Volt, vorkommen. Wegen der vielen in den §§ 11—20 beschriebenen Schwierigkeiten ist leicht zu verstehen, daß voneinander unabhängige Messungen weniger genau übereinstimmen als die Einzelmessungen in sich. Die Kurven der Fig. 3 geben Beispiele davon.

Die Kurvenwerte (Figg. 3—7), welche alle Einzelmessungen graphisch mitteln, dürften oberhalb der kritischen Drucke auf $\pm$ 5 Volt sicher sein, unterhalb der kritischen Drucke aber, dort wo das Funkenpotential so außerordentlich stark mit abnehmendem Drucke ansteigt, dürfte als Genauigkeitsgrenze vielleicht $\pm$ 15 Volt anzugeben sein. Selbstverständlich können sich diese Schätzungen nur auf die zufälligen, nicht auf die systematischen Fehler beziehen. Es mag dahingestellt bleiben, ob nicht etwa für die Funkenpotentiale bei noch vorsichtigerer Arbeit tiefere Werte erhalten würden.

Meßresultate.

§ 24. Von den endgültigen Messungen werden fünf Serien mit verschiedener Elektrodendistanz l angegeben. Die Messungen einer Serie ($l = 2{,}979$ mm) sind ausführlich in Tab. 2 aufgeführt, in Fig. 3 graphisch dargestellt, um über die Genauigkeit ein Urteil zu gestatten. Die vier übrigen Reihen werden nur graphisch in den Figg. 4—7 gegeben; zur Kontrolle sind in der Tab. 3 einige Werte, die diesen Kurven entnommen sind, zusammengestellt. Die jeweils verwendeten

1) M. Faraday, Experimental Researches, § 1417.

2) R. J. Strutt, Trans. Roy. Soc. London (A) 193. p. 382. 1900.

Magnetfelder schwanken, ebenso wie die bei Tab. 2, zwischen den äußersten Grenzen

331	und	350	Gauss;	als	Mittelwert	gilt	etwa	350	Gauss
1158	„	1170	„ ;	„	„	„	„	1160	„
1875	„	1891	„ ;	„	„	„	„	1885	„

In den Tabellen bedeutet: l die Funkenlänge in Millimetern, t die Temperatur in Celsiusgraden, p den Druck in mm Hg, $\mathfrak{H}$ das Magnetfeld in Gauss und V das Funkenpotential in Volt. Bei Tab. 3 sind unter t die äußersten Grenzen der Temperatur bei der ganzen Serie angegeben.

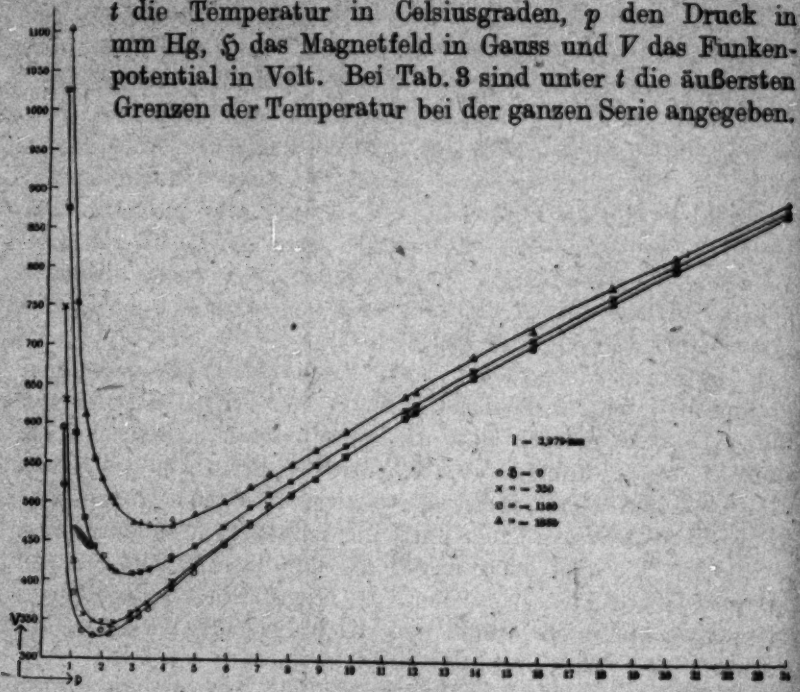


Fig. 3.

Tabelle 2.

$l = 2{,}979$ mm

Datum	t	p	$\mathfrak{H}$	V	$p.l$
5. 8. 1915	19,7	4,16	0	392	12,39
			350	399	
			1164	431	
			1885	478	
„	19,8	7,24	0	496	21,57
			350	498	
			1161	512	
			1885	538	

Tabelle 2 (Fortsetzung).
$l = 2{,}979$ mm

Datum	t	p	Φ	V	$p \cdot l$
5. 8. 1915	19,9	11,56	0	611	34,44
			350	611	
			1162	620	
			1887	638	
„	20,0	18,12	0	758	53,98
			350	759	
			1162	765	
			1885	778	
„	20,0	2,89	0	351	8,61
			350	359	
			1162	409	
			1885	473	
„	20,0	1,35	0	336	4,02
			350	356	
			1162	479	
			1884	611	

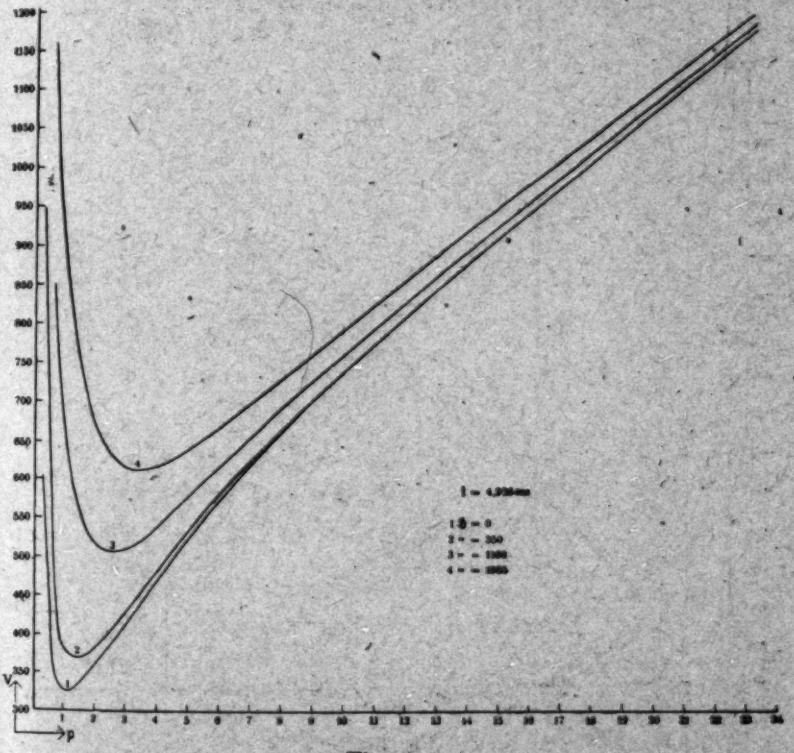


Fig. 4.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

$l = 2{,}979$ mm

Datum	t	p	Φ	V	$p.l$
5. 8. 1915	20,0	2,31	0	338	6,88
			350	347	
			1162	411	
			1885	497	
„	20,0	5,80	0	447	17,28
			350	449	
			1162	469	
			1885	501	
6. 8. 1915	20,4	11,89	0	618	35,42
			350	618	
			1164	628	
			1885	643	

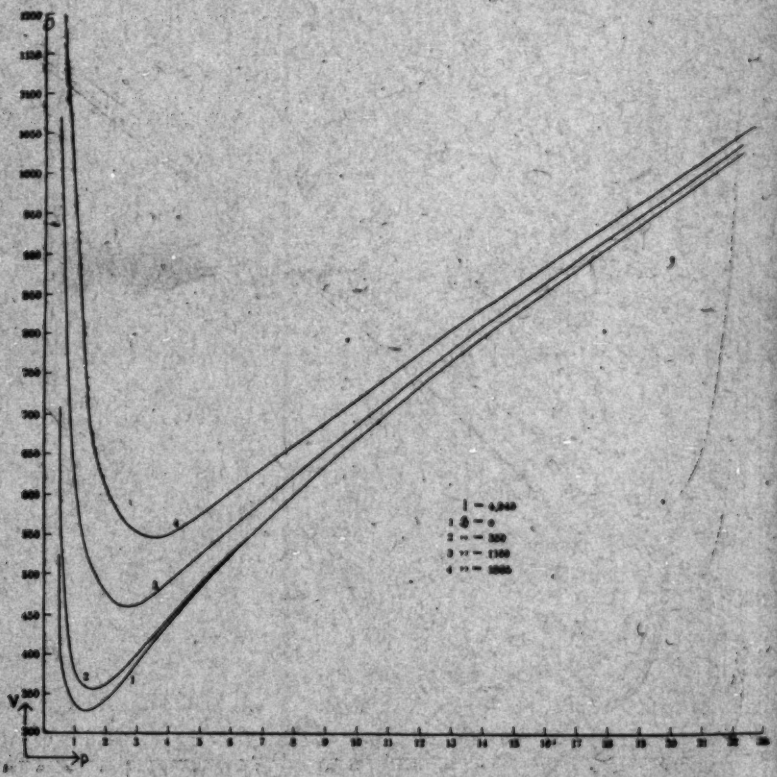


Fig. 5.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

$l = 2{,}979$ mm

Datum	t	p	δ	V	$l \cdot p$
6. 8. 1915	20,0	13,71	0	663	40,84
			350	663	
			1162	672	
			1885	688	
,,	20,0	9,66	0	561	28,78
			350	561	
			1162	574	
			1885	592	
,,	20,1	1,68	0	331	5,00
			350	348	
			1160	443	
			1883	554	

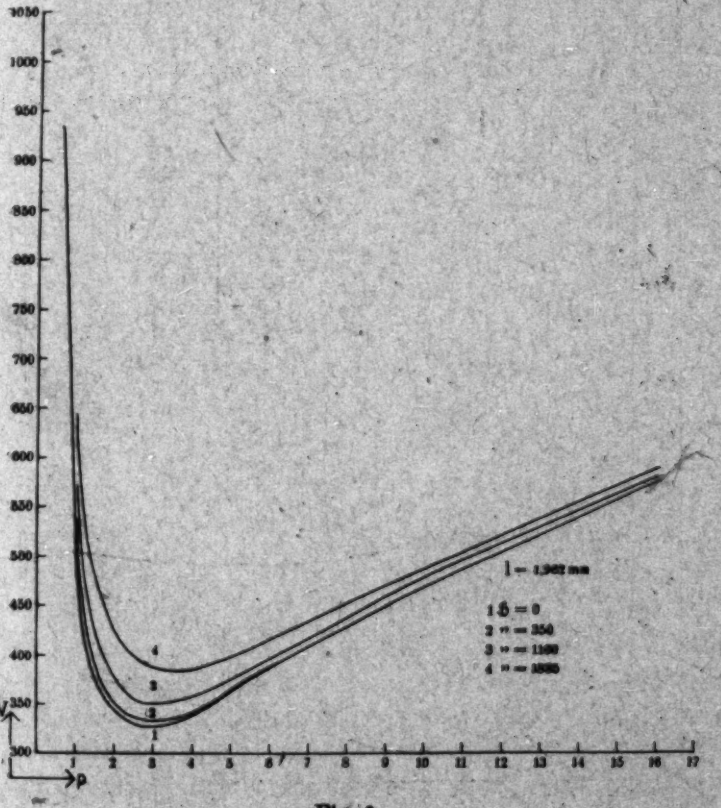


Fig. 6.

Tabelle 2 (Fortsetzung).
$l = 2{,}979$ mm

Datum	t	p	ϑ	V	$p.l$
6. 8. 1915	20,1	0,58	0	595	1,73
			350	748	
			1158	1024	
„	20,2	1,01	0	384	3,01
			350	424	
			1161	588	
			1883	755	
„	20,2	1,94	0	336	5,78
			350	348	
			1160	430	
			1884	529	
7. 8. 1915	20,0	6,62	0	473	19,72
			350	476	
			1162	496	
			1885	521	
„	20,2	8,71	0	532	25,95
			350	531	
			1162	548	
			1885	568	
„	20,4	4,15	0	389	12,36
			350	390	
			1160	426	
			1883	471	
7. 8. 1915	20,4	3,14	0	355	9,35
			350	363	
			1158	410	
			1879	473	

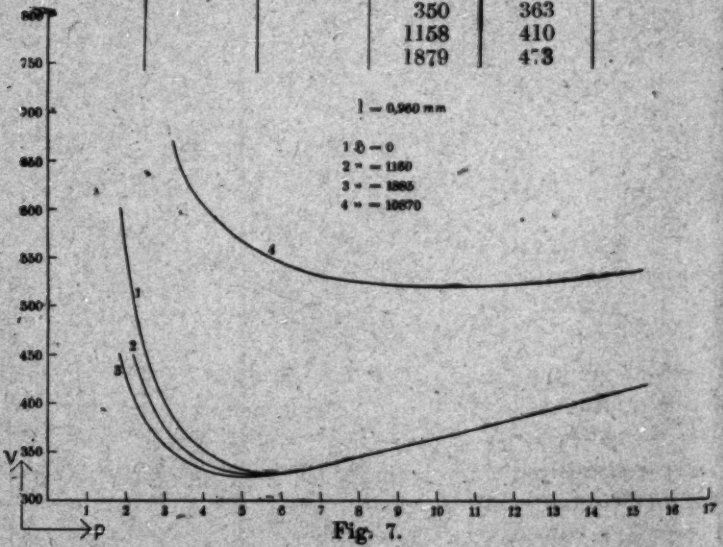


Fig. 7.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

$l = 2{,}979$ mm

Datum	t	p	$\mathfrak{H}$	V	$p \cdot l$
7. 8. 1915	20,5	4,87	0	412	14,51
			350	418	
			1161	445	
			1883	486	
9. 8. 1915	21,9	15,61	0	701	46,50
			350	701	
			1164	710	
			1885	722	
„	21,9	2,20	0	331	6,55
			350	342	
			1164	416	
			1885	505	
„	22,0	23,78	0	874	70,84
			350	874	
			1164	880	
			1887	889	
„	21,4	3,42	0	365	10,19
			350	371	
			1170	413	
			1888	470	
„	21,5	0,65	0	521	1,94
			350	631	
			1164	874	
			1887	1105	
„	21,7	7,95	0	511	23,68
			350	512	
			1166	528	
			1889	549	
„	21,8	20,13	0	801	59,97
			350	801	
			1164	809	
			1888	819	

Die in den Figg. 3—7 gegebenen Kurven stellen das Funkenpotential als Funktion des Druckes bei verschiedenen Magnetfeldern und Funkenlängen dar. Aus ihnen ist auch ohne weiteres jeder andere gewünschte funktionelle Zusammenhang zwischen den 4 Variabeln V, p, l und $\mathfrak{H}$ zu entnehmen.

Tabelle 8.

	l	0,960		1,962		4,046		4,926	
	t	20,1—22,2		19,4—21,4		20,1—21,0		20,9—22,2	
p	$\mathfrak{H}$	V	$p.l$	V	$p.l$	V	$p.l$	V	$p.l$
1,0	0	—	0,96	520	1,96	337	4,05	327	4,93
	350	—		—		382		383	
	1160	—		—		622		674	
	1885	—		—		968		912	
2,0	0	546	1,92	344	3,92	342	8,09	359	9,85
	350	546		351		361		381	
	1160	—		377		477		516	
	1885	423		427		608		674	
3,0	0	399	2,88	327	5,89	389	12,14	411	14,78
	350	399		333		399		427	
	1160	374		350		461		510	
	1885	355		388		552		614	
4,0	0	351	3,84	338	7,85	439	16,18	469	19,70
	350	351		341		444		482	
	1160	338		357		489		538	
	1885	331		385		548		617	
6,0	0	327	5,76	387	11,77	523	24,28	573	29,56
	350	„		388		525		583	
	1160	„		396		557		616	
	1885	„		417		603		667	
8,0	0	345	7,68	429	15,70	600	32,37	663	39,41
	350	„		429		600		665	
	1160	„		437		623		693	
	1885	„		452		660		729	
10,0	0	363	9,60	467	19,62	669	40,46	740	49,26
	350	„		467		669		740	
	1160	„		477		687		763	
	1885	„		487		717		794	

Diskussion der Messungen.

§ 25. Zuerst sollen die Ergebnisse für das Magnetfeld $\mathfrak{H} = 0$ besprochen und mit den bisherigen Beobachtungen verglichen werden. Die Kurven zeigen den bekannten charakteristischen Verlauf, Abnahme des Funkenpotentials mit abnehmendem Drucke bis zu einem Minimum bei dem kritischen Drucke sowie rasches Ansteigen des Funkenpotentials bei weiterer Druckverminderung. Die Minimumpotentiale V_0, die sich vollständig unabhängig von der Funkenlänge ergeben, sind zusammen mit den zugehörigen kritischen Drucken p_0,

den Funkenlängen l sowie den Produkten $p_0 . l$ in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

l	V_0	p_0	$p_0 . l$
0,960	326	5,90	5,66
1,962	327	2,90	5,68
2,979	329	1,90	5,66
4,046	328	1,40	5,67
4,926	326	1,15	5,67
Mittel:	327		5,67

§ 26. Die Produkte $p_0 . l$ sind für die Minimumpotentiale sehr gut konstant. Es ist dieses nichts anderes als ein Ausdruck für das Paschensche Gesetz[1]), nach dem das Funkenpotential in einem Gase nur eine Funktion von dem Produkte aus Druck und Funkenlänge ist, oder besser ausgedrückt, nur abhängt von der Gesamtmasse des Gases zwischen den Elektroden pro Flächeneinheit.

§ 27. Zum Vergleich mit älteren Werten kommen nur die wahrscheinlich besten Beobachtungen von Strutt[2]), Carr[3]), Townsend[4]) und Townsend u. Hurst[5]) in Betracht; die Messungen von Peace[6]) sind zu unsicher, seine Werte des Minimumpotentials schwanken zwischen 326 und 475 Volt. In Tab. 5 sind die bisher beobachteten Werte des Minimumpotentials sowie der Produkte $p_0 . l$ zusammengestellt.

Tabelle 5.

	V_0	$p_0 . l$
Strutt	341	5,62
Carr	350	5,91[7])
Townsend	334	5,12
Townsend u. Hurst	< 336	$< 5,0$
Earhart	356—400	6,0
Meyer	327	5,67

1) F. Paschen, Wied. Ann. **37**. p. 69. 1889.
2) R. J. Strutt, Trans. Roy. Soc. London (A) **198**. p. 377. 1900.
3) W. R. Carr, Trans. Roy. Soc. London (A) **201**. p. 403. 1903.
4) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) **6**. p. 598. 1903.
5) J. S. Townsend u. H. E. Hurst, Phil. Mag. (6) **8**. p. 738. 1904.
6) J. B. Peace, Proc. Roy. Soc. London **52**. p. 99. 1892—1893.
7) Carr (l. c. p. 410) hat einen nicht unbeträchtlichen systematischen Gang in den $p_0 . l$ bei wachsendem l; der Wert 5,91 ist das Mittel seiner Messungen.

Ich halte aus folgenden Gründen meinen Wert des Minimumpotentials, 327 Volt, sowie den des Produktes $p_0 . l = 5{,}67$ für den sichersten. Strutt hatte den homogenen Teil des elektrischen Feldes seitlich nicht begrenzt; er hob die Verzögerung nicht auf und er verwendete länger im Apparate stehendes Gas. Carr vermied ebenfalls die Verzögerung nicht und arbeitete ebenso mit altem Gas. Sowohl Strutt wie Carr legten keinen besonderen Wert auf das Putzen der Elektroden. Townsend benutzte zwar auch keinen seitlichen Schutz des homogenen Teiles des elektrischen Feldes, doch werden seine Messungen wahrscheinlich hierdurch nicht beeinflußt, da er die Entladung durch den lichtelektrischen Effekt in der Mitte seines Kondensators auslöste. Aber auch er sowie Townsend und Hurst reinigten die Elektroden nicht häufig und gebrauchten länger im Apparate stehendes Gas. Ferner geben Townsend und Hurst selbst an, daß bei Vergrößerung ihres Schutzwiderstandes ($4{,}8 . 10^4$ Ohm) um $2 . 10^4$ Ohm das Funkenpotential um einige Volt größer war.

Auch sonst geben meine Versuche gegenüber denen von Townsend und Hurst meistens kleinere Werte. Ein willkürlich herausgegriffenes Beispiel mag das zeigen. Aus der Fig. 2 bei Townsend und Hurst entnehme ich für $p . l = 20$ das Funkenpotential 495 Volt. Aus meinen Kurven ergibt sich:

$p . l$	l	p	V
20	1,962	10,19	471
20	2,976	6,72	478
20	4,046	4,94	479
20	4,926	4,06	473
Mittel:			475 Volt

§ 28. Da die vorliegenden Funkenpotentiale nicht unerheblich kleiner sind als die von Carr, dieser aber zuletzt an seinen Versuchen das Paschensche Gesetz verifiziert hat, ist es vielleicht nicht überflüssig zu zeigen, daß auch meine Beobachtungen das Paschensche Gesetz sehr gut erfüllen. Zu diesem Zwecke sind in Fig. 8 die Funkenpotentiale als Funktion von $p . l$ eingetragen und auch in den Tabb. 2 und 3 die zugehörigen Werte von $p . l$ angegeben.

Man erkennt aus der Figur 8, daß das Paschensche Gesetz exakt erfüllt ist. Eigentlich sollte man V als Funktion von

$\sigma \cdot l$ darstellen, wo σ die Dichte der Luft bedeutet. Da aber alle Messungen in einem engen Temperaturintervall ausgeführt sind, so ist die Umrechnung auf die Dichte und die Berücksichtigung der Temperatur nicht wesentlich.

§ 29. Wir wenden uns nun zur Besprechung der Funkenpotentialkurven im Magnetfelde. Mit Ausnahme derjenigen für $l = 0{,}960$ zeigen alle Kurven, daß im transversalen Magnetfelde eine Erhöhung des Funkenpotentials auftritt, und zwar

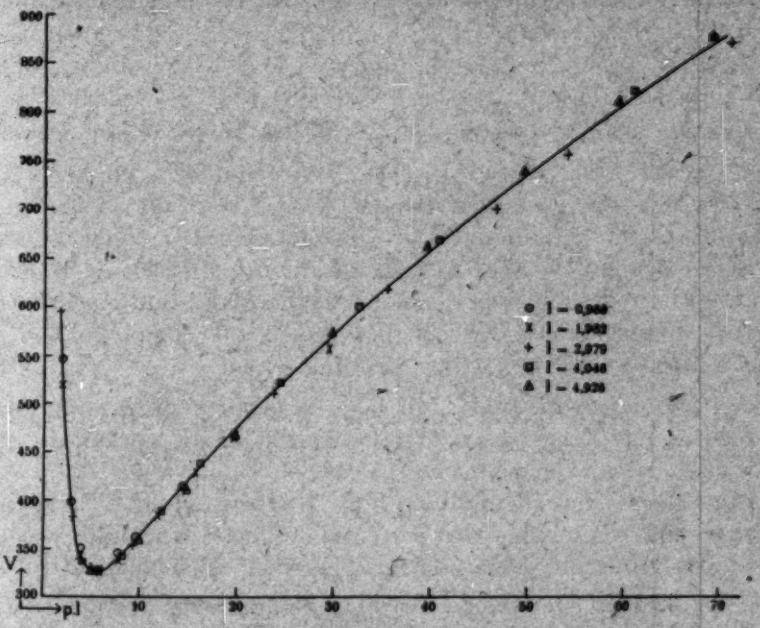


Fig. 8.

sowohl oberhalb als auch unterhalb des kritischen Druckes. Das steht in einem gewissen Gegensatze zu den Beobachtungen von Earhart (vgl. oben § 5), der fand, daß im longitudinalen Magnetfelde oberhalb des kritischen Druckes das Funkenpotential nicht beeinflußt, unterhalb aber vermindert wird.

Die Erhöhung des Funkenpotentials wächst mit der Stärke des Magnetfeldes sowie mit der Funkenlänge und nimmt oberhalb des kritischen Druckes mit wachsendem Drucke ab.

Das Minimumpotential im Magnetfelde ist ebenfalls erhöht und wird mit größeren Magnetfeldern zu höheren Drucken

verschoben. Nennt man die Erhöhung des Minimumpotentials ΔV_0, diejenige des kritischen Druckes Δp_0, die sich am besten aus den Kurven $l = 2{,}98 \dots l = 4{,}98$ entnehmen lassen, so scheint ganz angenähert ΔV_0 und Δp_0 proportional $\mathfrak{H}$ zu sein. Bei $l = 4{,}926$ ist diese Beziehung am besten erfüllt, bei den kleineren Funkenlängen steigt aber ΔV_0 schneller an als es der Proportionalität entspricht. Zu beachten ist hierbei, daß die Δp_0 nur ungenau aus den Kurven zu bestimmen sind. Immerhin mag bemerkt werden, daß für die drei betrachteten Kurven recht nahe

$$\frac{\Delta V}{l \cdot \Delta p}$$

konstant ist und den Zahlenwert 25 im Mittel besitzt.

§ 30. Bei der kleinsten verwendeten Funkenlänge $l = 0{,}960$ mm bewirken Magnetfelder von der bisherigen Größe keine Erhöhung des Funkenpotentials, sondern eine Erniedrigung, die aber *nur* unterhalb des kritischen Druckes auftritt und mit wachsendem Magnetfelde (untersucht bis 1885 Gauss) größer wird (vgl. Fig. 7). Bei einem Felde von 350 Gauss war ein Einfluß fast unmerkbar.

§ 31. Um zu sehen, ob bei $l = 0{,}960$ auch in stärkeren Feldern nur Erniedrigung des Funkenpotentials vorhanden ist, wurden noch Versuche bei $\mathfrak{H} = 10890$ Gauss angestellt. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Fig. 7 eingezeichnet. Jetzt ist aber eine Erhöhung des Potentials eingetreten und wieder ist das Minimum nach höheren p-Werten verschoben.

§ 32. In demselben starken Magnetfelde wurden auch einige Versuche bei der Funkenlänge $l = 2{,}979$ mm ausgeführt. Es wurde gefunden:

$p = 23{,}40$ mm Hg	$V = 1224$ Volt
$p = 15{,}58$ „ „	$V = 1110$ „

Hieraus ergibt sich, daß auch bei den verhältnismäßig hohen Drucken, wo vorher der Effekt fast ganz verschwunden war, genügend hohe Felder Erhöhung des Potentials bedingen.

§ 33. Es wurde noch versucht, bei den zur Verfügung stehenden Mitteln eine obere Grenze des Druckes für den Magnetfeldeinfluß nachzuweisen. Die Hochspannungsbatterie wurde dazu auf 3400 Volt vergrößert. Für die Messung der Spannung, die den Meßbereich des Millivoltmeters V (Fig. 1)

überschritt, wurde ein nachgeprüftes Braunsches Elektrometer (Ablesegenauigkeit ± 10 Volt) verwendet. Dies hatte zur Folge, daß der absolute Wert des Potentials weniger genau bestimmt werden konnte als die durch das Magnetfeld bewirkte Änderung, die am Millivoltmeter abzulesen war. Es wurde z. B. gefunden:

$t = 18°{,}5 - 18°{,}6$		$l = 4{,}926$ mm	$p = 96{,}77$ mm Hg.
$\mathfrak{H}$	0	10880	
V	3149	3322	
ΔV		173 Volt	

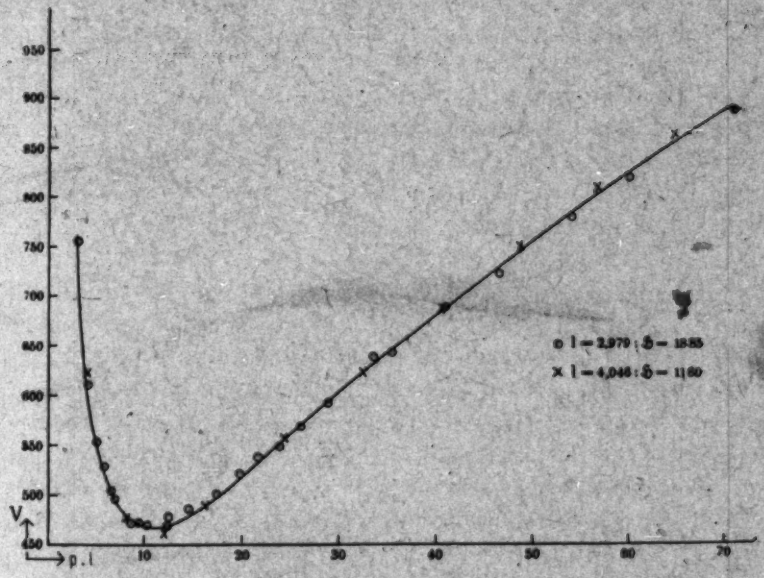


Fig. 9.

Also bei dem verhältnismäßig hohen Drucke von $p = 96{,}77$ mm Hg ist noch eine Potentialerhöhung von 173 Volt in einem Magnetfelde von 10880 Gauss zu bemerken.

§ 34. Man kann sich die Frage vorlegen, ob etwa auch im Magnetfelde eine ähnliche Beziehung wie das Paschensche Gesetz vorhanden ist. Dieses ist natürlich nur möglich für solche Magnetfelder, in denen die Minimumpotentiale denselben Wert besitzen. Zwei solche Kurven sind aber aufgenommen, nämlich für $l = 2{,}979$ und $\mathfrak{H} = 1885$ sowie für $l = 4{,}046$ und $\mathfrak{H} = 1160$; Minimumpotentiale etwa 469 bzw. 460 Volt. In Fig. 9 sind die gemessenen Potentiale als Funk-

tion des Produktes $p \cdot l$ eingezeichnet, und zwar für die beiden Kurven mit verschiedener Markierung. Es ist ersichtlich, daß bei dieser Darstellung alle gemessenen Werte auf der gleichen Kurve liegen; es gilt also auch im Magnetfelde ein dem Paschenschen ähnliches Gesetz.

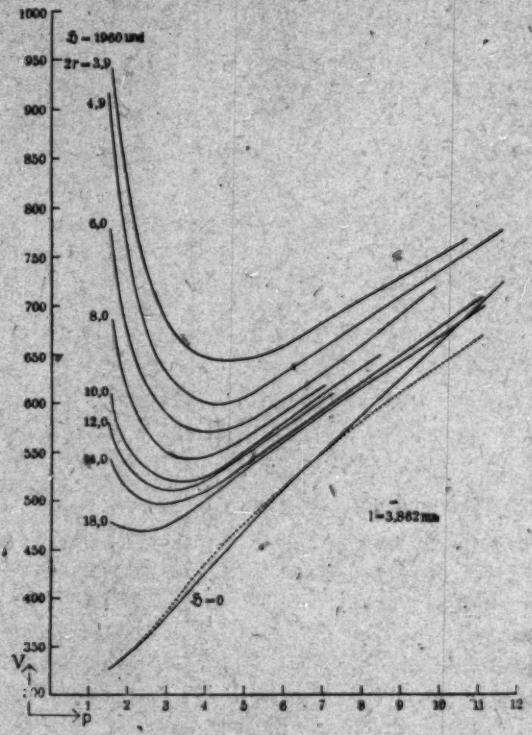


Fig. 10.

Abhängigkeit von dem Querschnitt der Funkenstrecke.

§ 35. Die beobachteten Effekte zeigen aber noch eine Komplikation, die sie leider der Durchrechnung nach der Townsendschen Theorie sehr schwer zugänglich machen: sie hängen nämlich noch von dem Querschnitte der Funkenstrecke ab. In Fig. 10 ist ein Teil einer Reihe von Messungen graphisch dargestellt, die unternommen wurden, um dieses Verhalten zu untersuchen (Temperaturbereich 10°,2—14°,8).

Ausgegangen wurde von einer Funkenlänge $l = 3{,}873$ mm und einem Durchmesser der Ringbohrung von $2r = 3{,}90$ mm;

Nachdem eine Kurve aufgenommen war, wurde die Ringbohrung sukzessive erweitert und jedesmal wieder eine Meßreihe ausgeführt. Der beim Bohren des Ringes entstehende Grat wurde mit feinstem Schmirgelpapier entfernt, doch nahm hierdurch auch etwas die Dicke des Ringes ab, welche am Ende der Versuche zu $l = 3{,}852$ mm bestimmt wurde. An den Kurven der Fig. 10 sind die einzelnen Durchmesser angeschrieben.

Man ersieht aus der Figur die bekannte Tatsache, daß das Funkenpotential bei $\mathfrak{H} = 0$ unabhängig vom Querschnitt ist, wenigstens solange genügend homogenes elektrisches Feld vorhanden ist. Im Magnetfelde aber (1960 Gauss) ist die Erhöhung des Funkenpotentials sehr stark abhängig vom Querschnitt der Funkenstrecke, und zwar nimmt sie ab mit wachsendem Querschnitte. Wird der innere Durchmesser des Ringes ca. $2r = 12$—14 mm, so scheint das Feld zwischen den Elektroden nicht mehr genügend homogen zu sein; denn jetzt fangen auch die Funkenpotentiale ohne Magnetfeld an, sich zu verschieben. In Fig. 10 sind für $\mathfrak{H} = 0$ und $2r = 18{,}0$ mm die Messungen durch die punktierte Kurve dargestellt. Für $\mathfrak{H} = 0$ und $2r < 12$ mm fallen alle Potentiale auf dieselbe Kurve. Derartige Versuche wurden auch mit demselben Resultate ausgeführt bei $l = 1{,}960$ mm, $\mathfrak{H} = 1960$ Gauss und $2r = 8{,}1$—$14{,}0$ mm. Die Versuche zeigen, daß die Funkenpotentialerhöhung in dem beobachteten Bereiche sich nicht, mit wachsendem r bei konstantem l, p und $\mathfrak{H}$ asymptotisch einem Grenzwerte nähert.

§ 36. Man könnte auf den Gedanken kommen, daß die beschriebene Abhängigkeit der Funkenpotentialerhöhung von dem Querschnitte der Funkenstrecke darauf zurückzuführen sei, daß die Elektronen durch das Magnetfeld an die innere Wandung der Ringe geworfen werden und dort vermöge ihrer Ladung das elektrische Feld ändern. Um diese Hypothese zu untersuchen, wurden die Hartgummiringe innen mit Graphit bestrichen, um ihnen eine geringe Leitfähigkeit zu erteilen. Besser gingen die Versuche mit einem Ring, der aus Schiefer hergestellt war. Nachdem dieser im Vakuum mit P_2O_5 ca. 80 Stunden gestanden hatte, war seine Leitfähigkeit, wahrscheinlich durch Austrocknen, so heruntergegangen, daß Messungen damit ausgeführt werden konnten. Allerdings

war die Leitfähigkeit immer noch so groß, daß die Blockkapazität nicht zu verwerten war. Es wurde daher mit dem Kurzschlußbügel gearbeitet.

Qualitativ erhielt man ganz dieselben Resultate wie mit den Hartgummiringen, z. B. in vergleichbaren Messungen statt einer Potentialerhöhung von 154 Volt jetzt 182 Volt, oder bei einem anderen Drucke an Stelle von 136 Volt jetzt 150 Volt. Auch die Änderungen mit dem Querschnitt der Funkenstrecke ergaben sich der Größe nach nahe gleich. Aber die absoluten Beträge der Potentiale waren bei dem Schieferring nicht unbeträchtlich höher als bei den Hartgummiringen, was wahrscheinlich auf die in dem Schiefer enthaltene Feuchtigkeit und vielleicht auch vorhandene Kohlenwasserstoffe (Petroleum) zurückgeführt werden kann, da, wie oben ausführlich gezeigt, das Funkenpotential gegen Verunreinigungen recht empfindlich ist. Kontrollversuche lehrten übrigens, daß der Leitungsstrom selbst in dem Schieferring durch das Magnetfeld nicht beeinflußt wurde. Jedenfalls ist aus diesen Versuchen ganz sicher zu folgern, daß die Hypothese der Wandladungen fallen gelassen werden muß, hieraus ist die Abhängigkeit vom Querschnitt nicht zu erklären.

Zur Theorie des Magnetfeldeinflusses.

§ 37. Für die Deutung der gewonnenen Resultate kommt in erster Linie Townsends Theorie des Funkenpotentials[1]) in Betracht, eine Theorie, die sich bisher immer quantitativ ganz gut für Luft bewährt hat.

Nennt man α die Anzahl Elektronen, welche durch Stoßionisation pro 1 cm Weglänge im elektrischen Felde X von einem Elektron neu gebildet werden, bezeichnet β die analoge Zahl für die positiven Ionen, so tritt nach Townsend bei einer solchen Elektrodendistanz l ein Funken ein, wenn gilt:

$$(1) \qquad p \cdot l = \frac{\log\left(\frac{\alpha}{p} \cdot \frac{p}{\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{p}\right) \log e}.$$

1) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) 6. p. 598. 1903; Zusammenfassungen siehe: J. S. Townsend, The Theory of Ionization of Gases by Collision, London bei Constable u. Co. 1910, sowie von demselben: Electricity in Gases, Oxford, Clarendon Press 1915.

Hierbei ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, p der Druck des Gases; das elektrische Feld ist als homogen vorausgesetzt. Aus den Arbeiten von Townsend und seinen Schülern sind zusammengehörige Werte von X/p, α/p und β/p für verschiedene Gase zu entnehmen. Das Funkenpotential V bei dem Werte $p \cdot l$ ergibt sich dann zu:

$$V = p \cdot l \cdot \frac{X}{p}. \tag{2}$$

§ 38. Überlagert man nun dem elektrischen Felde ein transversales magnetisches Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$, so wird das augenscheinlich zur Folge haben, daß sich die Elektronen nun nicht mehr längs der elektrischen Kraftlinien bewegen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit der durch Stoß neu gebildeten Elektronen Null oder zu vernachlässigen, ist ferner der Zusammenstoß zwischen den Elektronen und den Gasmolekülen immer vollkommen unelastisch, so werden alle Elektronen im Gase während ihrer freien Weglängen gewöhnliche Zykloiden[1]) beschreiben. Dabei ist der Radius des die Zykloiden erzeugenden Kreises gegeben durch[2]):

$$\varrho = \frac{X}{\frac{e}{m}\mathfrak{H}}. \tag{3}$$

Da nun der absolute Betrag der freien Weglänge der Elektronen nicht dadurch geändert werden sollte, ob die Elektronen sich geradlinig oder auf Zykloiden bewegen, so wird die Folge sein, daß in dem Magnetfelde die Elektronen bis zu einem Zusammenstoße mit einem neutralen Gasmolekül einen *kleineren Weg in Richtung des elektrischen Feldes* zurückgelegt haben, als wenn das Magnetfeld nicht vorhanden ist. Daraus folgt aber erstens, daß im Magnetfelde die Anzahl der Zusammenstöße eines Elektrons pro 1 cm Weglänge in Richtung des elektrischen Feldes vergrößert wird, sowie zweitens, daß die bis zu einem Zusammenstoße gewonnene kinetische Energie kleiner wird. Hieraus erkennt man, daß für den *Elektronenstoß* das transversale Magnetfeld so wirken sollte wie eine Druckerhöhung des Gases.

Für den Stoß der positiven Ionen liegen aber die Ver-

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 4. p. 386. 1901.
2) Z. B. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang p. 88.

hältnisse anders. Denn wegen der sehr viel größeren Masse der positiven Ionen wird auf diese das Magnetfeld nur wenig Einfluß ausüben, ihre ionisierende Wirkung sollte nicht wesentlich geändert sein.

Man darf nicht etwa denken, daß nach der Theorie die Kurven im Magnetfeld durch Verschiebung der Kurven für $\mathfrak{H} = 0$ nach höheren p zu erhalten wären, so daß z. B. auch das Minimumpotential im Magnetfelde dasselbe wäre wie ohne Magnetfeld. Wenn in Gleichung (1) für gegebenes X/p das β/p ungeändert bleibt, α/p aber kleiner wird, so ergeben sich für gleiche $p \,.\, l$ *größere* Funkenpotentiale V. Insoweit lassen sich also die Resultate nach Townsend qualitativ deuten.

§ 39. Aber auf diese Weise wird die beobachtete Erniedrigung des Funkenpotentials im Magnetfelde bei $l = 0{,}960$ nicht erklärt. Denn hierzu müßten bei denselben X/p die α/p größere Werte annehmen. Nun hat zwar Townsend (vgl. oben § 8) im Anschluß an die Arbeit von Strutt gemeint, daß α/p bei den dort vorhandenen tiefen Drucken im Magnetfelde wächst[1]), aber dieses ist für den Fall ausgeführt, daß die freie Weglänge der Elektronen größer ist als der Elektrodenabstand. Derartige Verhältnisse liegen aber bei den hier beschriebenen Versuchen nicht vor; denn da bei den Minimumpotentialen der Wert $p \,.\, l$ konstant $= 5{,}67$ ist, so bleibt das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Elektronen zum Elektrodenabstand beim Minimumpotential dasselbe bei den verschiedenen Elektrodendistanzen. Zu beachten wäre allerdings, daß bei größerem l im Minimum die elektrische Feldkraft kleiner ist, aber da die durch das elektrische Feld erzeugte Elektronengeschwindigkeit in jedem Falle groß ist gegenüber der thermischen Geschwindigkeit der Gasmoleküle, so wird hierdurch die freie Weglänge der Elektronen nicht wesentlich geändert sein.

§ 40. Auch die Abhängigkeit der Funkenpotentialerhöhung im Magnetfelde vom Querschnitt der Funkenstrecke ist in der reinen Theorie von Townsend nicht enthalten. Damit

---

1) Dabei ist wieder unter α die auf 1 cm *in Richtung des elektrischen Feldes* erfolgende Anzahl ionisierender Zusammenstöße verstanden. Bewegt sich das Elektron 1 cm in Richtung des elektrischen Feldes, so ist die wirklich zurückgelegte Wegstrecke viel größer.

steht wohl in Zusammenhang, daß eine Berechnung der α im Magnetfelde auf Grund der Zykloidenbewegungen der Elektronen ebenfalls nicht zum Ziele führte.

§ 41. Der Grund, warum die sonst gut bewährte Townsendsche Theorie auf die Magnetfeldeffekte angewendet, versagt, mag vielleicht in folgendem gefunden werden. Durch das Magnetfeld werden bei den verwendeten Funkenstrecken ein großer Teil der Elektronen an die Wandung der Ringe geworfen und kommt nun nicht mehr für weitere Stoßionisation in Betracht. Verwendet man offene Funkenstrecken, so tritt dasselbe insofern ein, als die Elektronen aus dem Bereiche des stärksten elektrischen Feldes seitlich durch das Magnetfeld herausgedrängt werden. Ein derartiger Effekt würde aber offenbar analog wie eine Verkleinerung der α wirken und ebenfalls das Funkenpotential erhöhen.

Wird der Querschnitt der Elektroden größer bei konstant gehaltener Distanz, so ist in demselben Magnetfelde die Funkenpotentialerhöhung kleiner (§ 35). Mit anderen Worten: Die im Magnetfelde durch den Querschnittseinfluß hervorgebrachte Potentialerhöhung nimmt ab mit wachsendem Verhältnis m von Durchmesser zu Abstand der Elektroden. Bei den Messungen der Fig. 10 ($\mathfrak{H} = 1960$ Gauss) wächst m bis 4,7, bei ähnlichen Beobachtungen ($l = 1{,}962$ mm, $2r = 14{,}0$ mm, $\mathfrak{H} = 1960$ Gauss) war bei $m = 7{,}1$ und $p = 1{,}93$ mm Hg noch eine Potentialerhöhung von 25 Volt zu konstatieren. Da bei den Versuchen der Fig. 7 $\mathfrak{H}$ nahe dasselbe (1885 Gauss), aber $m = 8{,}4$ war, so wäre es möglich, daß nur hier der Magnetfeldeffekt unbeeinflußt durch die Querschnittsabhängigkeit vorliegt.

Es scheint mir auch vorläufig nicht angängig, die Versuche von Greinacher[1]) über die Stoßionisierung im Magnetfelde zur Erklärung heranzuziehen, da bei diesen einerseits nicht für homogenes elektrisches Feld gesorgt war, andererseits aber auf den Einfluß des Querschnittes, der bei diesen Versuchen sicherlich auch eine Rolle spielen muß, nicht geachtet wurde.

§ 42. Es sind weitere Versuche in Vorbereitung, die darauf hinzielen, den Querschnittseinfluß zu eliminieren. Erst nach Abschluß derselben wird es möglich sein, den Magnet-

1) H. Greinacher, Verh. d. D. Physik. Ges. 17. p. 131. 1915.

feldeinfluß vollständig nach der Theorie von Townsend zu diskutieren.

Die vorliegende Untersuchung habe ich noch in Tübingen ausgeführt. Es ist mir ein Bedürfnis, Hrn. Paschen für die außerordentliche Bereitwilligkeit bestens zu danken, mit der er mir die großen Hilfsmittel seines Instituts zur Verfügung stellte.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 26. September 1918.)

2. *Zur Kenntnis des Neonspektrums;* *von K. W. Meissner.*

§ 1. Theoretische Studien von H. E. Watson[1]) über den Bau des *Neonspektrums* zeigten, daß fast alle stärkeren Linien des Neonspektrums sich in Triplette und Quadruplette konstanter Schwingungsdifferenzen ordnen lassen.

Unter Verwendung genauer interferometrischer Messungen[2]) konnte ferner gezeigt werden[3]), daß die Wellenzahlendifferenzen der im Rot liegenden Triplette und Quadruplette eine große Konstanz aufweisen. Die Auffindung eines neuen Quadrupletts am roten Ende des Spektrums machte außerdem wahrscheinlich, daß bei 8082,45 Å.-E. noch eine stärkere Linie liegen müßte. Zum Nachweise der Lückenlosigkeit der Triplette und Quadruplette war es nötig, den experimentellen Nachweis für die Existenz dieser Linie zu erbringen.

In Verfolgung dieses Zieles zeigte es sich, daß das Neonspektrum im Gebiete von 7900—9000 Å.-E. noch eine ganze Reihe stärkerer und schwacher Linien besitzt.[4]) Die Kenntnis ihrer genauen Wellenlängen ist für serientheoretische Studien von großer Wichtigkeit. Zu ihrer Ermittlung wurde diese Arbeit unternommen.

§ 2. Für die *Photographie* der roten und ultraroten Linien wurden mit *Dicyanin A* sensibilisierte Platten verwendet. Dabei wurde genau nach dem schon früher[5]) ausführlich beschriebenen Verfahren gearbeitet. Um jedoch möglichst klare Aufnahmen zu erhalten, wurden die in der Farbstofflösung gebadeten Platten fast immer noch in einem Alkohol-Wassergemisch abgespült und erst dann rasch im Ventilatorstrome

1) H. E. Watson, Proc. Cambr. Phil. Soc. **16**. p. 130. 1912.
2) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. **51**. p. 115. 1916.
3) K. W. Meissner, Physik. Zeitschr. **17**. p. 549. 1916.
4) K. W. Meissner, Archives des Sciences Physiques et Naturelles **44**. p. 475. 1917.
5) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. **50**. p. 716. 1916.

getrocknet. Man verwendete für die Sensibilisation Schleussner Moment, Eisenberger Extrarapid und Eisenberger Röntgenplatten. Besonders die beiden letzten Sorten ergaben gute Resultate. Für Messungen im sichtbaren Gebiete dienten „Panchromatic"-Platten von Wratten & Wainright oder es wurde mit Pinacyanol, Pinachromblau oder Pinacyanolblau sensibilisiert.

§ 3. *Programm der Arbeit.* Zur genauen Ermittlung der Wellenlängen der neuen Linien wurde die interferometrische Methode nach Fabry und Perot[1]) angewendet, die zwar mühsamer ist als die Messung mit einem großen Rowlandschen Gitter, aber mit verhältnismäßig wenig Mitteln große Genauigkeit erreichen läßt. Die Wahl dieser Methode zeichnet den Gang der Arbeit vor: 1. Mit Hilfe bekannter Normalen (Eisen, Argon) werden die stärkeren Linien mit einer Genauigkeit von ca. $^1/_{10}$ Å.-E. ermittelt. 2. Mit Hilfe dieser rohen Wellenlängenwerte erlaubt die interferometrische Methode die genaue Bestimmung dieser stärkeren Linien, die nun als Normalen dienen, um 3. die schwachen Linien mit einem Gitter (allerdings mit geringerer Genauigkeit) zu bestimmen.

§ 4. *Zur Ausführung der Gittermessungen* diente zu Anfang der Arbeit ein kleines Rowlandsches Plangitter, das mit einem Fernrohrobjektiv von 750 mm Brennweite in Autokollimationsmanier montiert war und die Messung der Linien bis auf 0,1 Å.-E. gestattete.

Später konnte noch ein Rowlandsches Konkavgitter von 1 m Krümmungsradius beschafft werden, mit dem alle endgültigen Gittermessungen ausgeführt wurden. Die Aufstellung war nur provisorisch auf einer hölzernen Grundplatte mit festem Rowlandschen Kreis; der Spalt war so angebracht, daß die Normalenrichtung in die Spektralgegend 5800" fiel. Die Kamera war auch aus Holz gefertigt und so groß, daß man von $\lambda = 2000$ Å.-E. erster Ordnung bis $\lambda = 8600$ zweiter Ordnung photographieren konnte. Trotz der provisorischen Aufstellung konnte die Justierung sehr exakt durchgeführt werden, und man konnte Aufnahmen von beträchtlicher Dauer machen, ohne Verschiebungen befürchten zu

1) Ch. Fabry u. A. Perot, Ann. de chim et phys. (7) 12. p. 459 bis 501. 1897.

müssen. Die ganze Anordnung war mit Draht überspannt und mit dichtem, schwarzem Tuche gegen Licht geschützt.

Für die erste Bestimmung der stärkeren Neonlinien lieferten die Normalen das rote Argonspektrum oder auch das Eisenspektrum (zweiter Ordnung). Dabei wurde, um etwaige Verschiebungen während der Aufnahme wahrnehmen zu können, mit aller Vorsicht verfahren und die Exposition der Normalen in drei Abschnitten vollzogen: zu Anfang, in der Mitte und zu Ende der Aufnahme.

Bei der Exposition von Neon wurde ein Rotfilter (Wratten *F* oder *a*) eingeschaltet, um Linien zweiter Ordnung auszuschließen; das gleiche geschah, wenn Argon die Normalen im Rot lieferte.

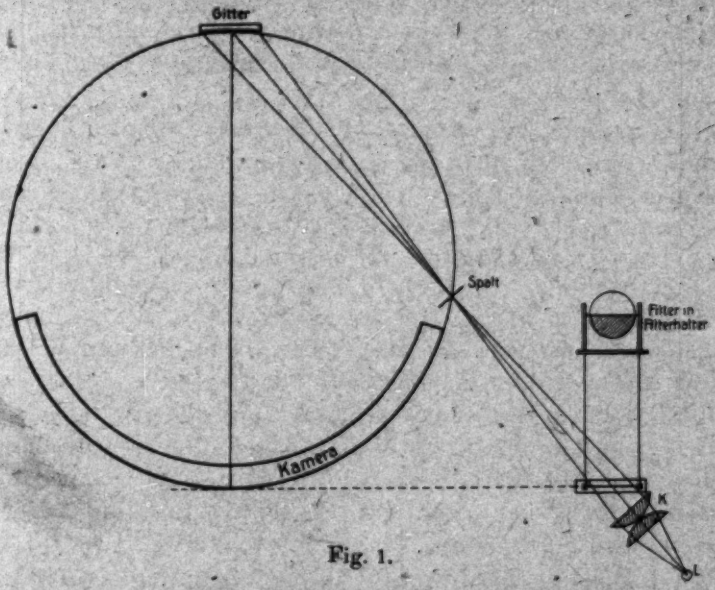


Fig. 1.

Falls der Eisenbogen verwendet wurde, diente noch ein Äskulinfilter zur Beseitigung der Linien dritter Ordnung. Um auf den Aufnahmen die Eisenlinien immer von den Neonlinien unterscheiden zu können, wurden sie durch folgende Vorrichtung kenntlich gemacht. Während der Exposition des Eisenspektrums wurde an die Stelle der horizontalen Brennlinie des Konkavgitters ein horizontaler Draht oder ein breiter horizontaler Spalt gebracht, der im Spektrum so gut als

möglich abgebildet wurde (Fig. 1). Damit erreichte man, daß die Eisenlinien in der Mitte scharf unterbrochen wurden, während die Neonlinien in ihrer ganzen Ausdehnung abgebildet wurden. Bei Verwendung des horizontalen breiten Spaltes waren die Eisenlinien kürzer als die Neonlinien.[1])

Die einzelnen Platten hatten eine Größe 4,5 × 6 cm, so daß also bei einer Dispersion von 17 Å.-E./mm ein Gebie von ca. 900 Å.-E. auf einer Platte meßbar war.

Die Aufnahmen wurden mit einem Zeissschen Komparator (mit Nickelstahlmaßstab) gemessen. Bei der Berechnung wurde bei genügend vorhandenen Normalen in der üblichen Weise verfahren: zwischen zwei Normalen werden die übrigen Wellenlängen linear interpoliert; die außerdem bekannten Normalen dienen zur Konstruktion einer Korrektionskurve, aus der die Abweichung von der „Normalität" des Spektrums für jede einzelne Wellenlänge abgelesen werden kann.

Da insbesondere im äußersten Rot die Normalen nicht so dicht liegen, daß man die Korrektionskurve genau genug zeichnen kann, so wurde der Versuch gemacht, die Korrektionen aus einer Korrektionsformel zu berechnen. Es zeigte sich, daß eine quadratische Formel von der Form

$$\delta = a(\lambda_1 - \lambda_x) - b(\lambda_1 - \lambda_x)^2$$

vollkommen ausreicht. Hierin bedeutet δ die Differenz zwischen linear interpoliertem λ_x und dem korrigierten λ_x. Die Konstanten a und b berechnen sich dann aus zwei weiteren Normalen λ_2 und λ_3 und den dazu gehörigen Differenzen δ_2 und δ_3. Selbst in einem Gebiete, das von der Normalen ziemlich weit abliegt, erhält man noch gute Resultate, wie die folgende Tabelle und Fig. 2 zeigen.

Im allgemeinen wird man dieses Verfahren ja wohl nur als Behelf gebrauchen; aber da gerade bei Messungen im äußersten Rot die Normalen oft sehr dünn gesät sind, wird man manchmal zu diesem Mittel greifen.

Bei den Messungen gegen Eisen wurde die Interpolation übrigens immer graphisch ausgeführt.

---

1) Vgl. die Anordnung mit Vergleichsprisma bei Sirks, Astronomy and Astrophysics 13, p. 763. 1894, und Wadsworth, Astroph. Journ. 2, p. 370. 1895.

Intensität	Komparator	λ linear interp.	λ I. Å.-E.	δ	$\delta_{ber.}$
6	37,1790	6217,279	6217,279	±0,000	±0,000 *
6	40,1916	6266,288	6266,495	+0,207	+0,246
6	42,5374	6304,449	6304,789	+0,345	+0,339
8	44,3525	6333,977	6334,428	+0,451	+0,428
10	48,5138	6401,673	6402,246	+0,573	+0,557
8	54,9233	6505,942	6506,527	+0,585	+0,585 *
7	56,5450	6532,324	6532,881	+0,557	+0,557
8	60,6152	6598,538	6598,953	+0,415	+0,430
8	65,5074	6678,124	6678,275	+0,151	+0,165
8	67,8997	6717,042	6717,042	±0,000	±0,000 *

1 mm = 16,2680 Å.-E.

Interpolationsformel:

$$\delta = 0{,}4792\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{100}\right) - 0{,}09602\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{100}\right)^2$$

$\lambda_1 = 6217{,}279$, $\lambda_2 = 6506{,}527$, $\lambda_3 = 6717{,}042$.

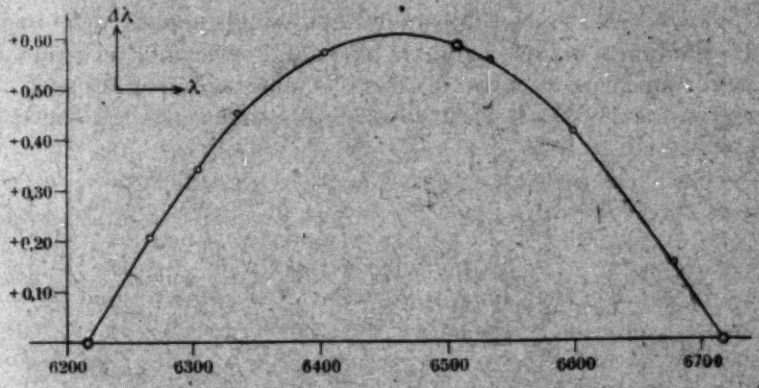


Fig. 2.

Bei der *Bestimmung der schwachen Neonlinien* gegen die starken Neonnormalen (Nr. 3 des Programms), war es wünschenswert, ohne Filter arbeiten zu können, um so jeden unnötigen Lichtverlust zu vermeiden. Verwendet man aber kein Filter, so können die Linien zweiter und dritter Ordnung stören. Diese Störung umgeht die Anordnung, die in Fig. 1 skizziert ist. In der äußeren Brennebene des Konkavgitters wurde das Rotfilter so angebracht, daß nur die Hälfte des vom Kondensor *K* kommenden Lichtkegels durch das Filter

ging. Dadurch zerlegte man das Spektrogramm auf einfachste Weise in zwei Hälften: die eine zeigte nur die roten Linien, die andere die roten und die der zweiten und dritten Ordnung.

Für die *Berechnungen* stand eine *Rechenmaschine* (achtstellig) nach Thomas von Bunzel in Wien zur Verfügung.

Die *Belichtungsdauer* betrug für die starken Linien bis 8600 Å.-E. 30—45 Minuten; um auch die ganz schwachen Linien und die Linien bis 9000 Å.-E. gut zu erhalten, mußte man bis zu 3 Stunden exponieren.

Um die Linien bis 8800 Å.-E. auch in zweiter Ordnung zu erhalten, was zur Messung naher Doppellinien nötig war, waren allerdings Expositionszeiten von 10—12 Stunden erforderlich. Aber auch diese Aufnahmen waren trotz der improvisierten Aufstellung absolut scharf.

Bei so langer Belichtungsdauer gelang es sogar, in erster Ordnung bis zur Wellenlänge 9600 Å.-E. vorzudringen.

Die verwendeten *Neon- und Argonröhren* stammen von Robert Götze, Leipzig, und waren ziemlich rein; nur einige Heliumlinien waren schwach zu sehen. Die Röhren wurden mit transformiertem städtischen Wechselstrome gespeist und gingen dauernd gut, fast ohne Zerstäubung der Aluminiumelektroden.

Der Eisenbogen wurde von einer Akkumulatorenbatterie von 100 Volt mit 4 Amp. gespeist.

§ 5. *Die interferometrischen Messungen.*

Die Art der *interferometrischen Messungen* und Rechnungen war im wesentlichen die gleiche, die Verfasser schon bei der Messung der roten und ultraroten Neon- und Argonlinien angewendet hat[1]), und es soll genügen, auf diese Abhandlung hinzuweisen.

Einige Abänderungen mußten in der vorliegenden Arbeit jedoch getroffen werden, wie aus der Anordnungsskizze Fig. 3 erhellt.

Mit Hilfe des Objektives O_1 wird die Lichtquelle L_1 (Neonröhre „end on") auf die Blende B_1 abgebildet. Das Objektiv O_2 entwirft von diesem Diaphragma auf Blende B_2, die sich unmittelbar vor dem Perot-Fabryschen Etalon E' befindet, ein vergrößertes Bild. Das durch das Etalon entstehende

1) K. W. Meissner, l. c.

Interferenzringsystem wird mit Hilfe des Planspiegels P und des Hohlspiegels H (Brennweite 248 mm) auf dem Spalt S des Spektrographenkollimators abgebildet.

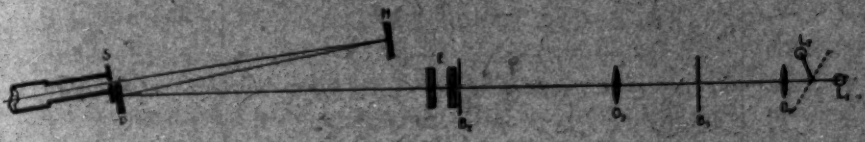


Fig. 3.

Der Unterschied gegen die frühere Anordnung besteht also lediglich darin, daß auf das Etalon E kein paralleles Strahlenbündel fällt, sondern ein konvergentes, das seinen Konvergenzpunkt im Etalon E besitzt. Zu dieser Anordnung war man in dieser Arbeit gezwungen, da die in Betracht kommenden neuen Neonlinien nur stark bei Kapillare „end-on" auftreten und man sozusagen eine punktförmige Lichtquelle hatte. O_1 und O_2 waren Achromate, P und H Spiegel aus Glas von Schmidt & Haensch, Berlin, die nach dem Martinschen Verfahren dick versilbert und poliert waren.

Als dispergierender Apparat diente ein kleines Spektroskop von Schmidt & Haensch, das in der Werkstatt des Institutes mit einer Kamera ausgestattet wurde. Die Objektive hatten eine Brennweite von 280 mm und eine nutzbare Öffnung von 24 mm. Das Prisma war ein stark dispergierendes Rutherfordprisma. Da es wegen der Kriegsverhältnisse schwer war, einen größeren Spektrographen zu erhalten, so mußte man die kleine Dispersion dieses Spektrographen in Kauf nehmen, obgleich dadurch die Messung außerordentlich erschwert war. Die Kassette der Kamera war, wie üblich, zum Verschieben eingerichtet und faßte drei Aufnahmen.

Die Brennweite des Hohlspiegels wurde nach den üblichen Methoden bestimmt, durch Messung von Bildweite und Vergrößerung. Die Bestimmung erfolgte okular und photographisch.

Viel schwieriger als diese Bestimmung ist die exakte Einstellung des Kollimatorspaltes in die Brennebene des Hohlspiegels. Doch konnte dies mit einer Genauigkeit von 0,1 mm auf folgende Art bewerkstelligt werden: Auf dem Spalt des Spektrographen befand sich ein Messingrahmen, der mit drei exakt parallelen, dünnen Quarzfäden bespannt war, die ge-

nau senkrecht zur Spaltrichtung verliefen. (Der Rahmen war durch Schräubchen zur genauen Einstellung der Fäden justierbar.)

An die Stelle des Spektrums wurde nun eine kleine elektrische Glühbirne gebracht und ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr mit starker Vergrößerung in den Strahlengang *EP* gebracht. Der Hohlspiegel *H*, der auf einem Schlitten montiert und mittels einer Schraube meßbar exakt verschiebbar war, wurde sodann so lange verschoben, bis die Quarzfäden auf dem Kollimatorspalt ganz scharf waren. Die verschiedenen Einstellungen wichen nur ganz wenig voneinander ab (ca. 0,1 mm).

Die Verwendung dieser dünnen Quarzfäden für exakte Justierungen erwies sich vielfach, auch bei Justierung von Spektrographen, als ausgezeichnet. Die Schärfe der feinen Brennlinie läßt sich eben viel besser beurteilen als die opaker Fäden gleicher Dicke. (Mit Hilfe solcher auf einen kleinen Rahmen gespannter Quarzfäden wurde auch die Justierung des Rowlandschen Konkavgitters vollzogen; eine photographische Nachjustierung erwies sich als unnötig.)

Diese Einstellungen, wie auch die des Fernrohres auf Unendlich (mit Autokollimation), wurde mit einfarbigem Lichte, meist dunklem Rot, ausgeführt.

Die Konstanz der Einstellung wurde oft geprüft und bei jeder Aufnahme die Entfernung Spalt—Hohlspiegel mit einer Schublehre kontrolliert.

Der *Hauptbestandteil* der Apparatur war das *Etalon nach* Fabry und Perot. Die exakt gearbeiteten Platten (kreisförmig, 25 mm Durchmesser) stammten von Adam Hilger, London, und wurden mittels Kathodenzerstäubung halbdurchsichtig versilbert. Das Gehäuse und die Distanzstücke waren in der Werkstatt des Institutes angefertigt. Die Grundform der Gehäuse war die der Hilgerschen. Die Ausführung selbst mußte etwas geändert werden, da *ein* Gehäuse zur Aufnahme mehrerer Distanzringe dienen sollte (3, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 25 und 50 mm). Das Grundgehäuse war passend für Messungen mit Distanzstück von 10 mm; verwendete man die kleineren Ringe, so wurde die Tiefe der Bohrung durch Einsatzringe entsprechend verkleinert. Für größere Ringe konnte der hintere Teil des Gehäuses abgeschraubt und durch einen entsprechend längeren Tubus ersetzt werden.

Die einzelnen Distanzstücke sollten ganz aus Nickelstahl gefertigt werden; da aber wegen des Krieges dieses Material nicht in den gewünschten Maßen beschafft werden konnte, mußte man sich in der Weise behelfen, daß ein Messinghohlzylinder drei Säulchen aus Nickelstahl fassen mußte, die nur sehr wenig über die Grundflächen des Messingringes hervorschauten. Die Invarstäbchen waren ziemlich fest in den Messingring eingetrieben und wurden auf der Drehbank planparallel abgedreht und dann von Hand planparallel geschliffen und poliert.

Die so hergestellten Distanzringe sind allerdings nur ein Ersatz, und es zeigte sich im Verlaufe der Arbeit, daß sie nicht konstant planparallel bleiben, sich vielmehr in einiger Zeit oft um ein bis zwei Tausendstel Millimeter ändern, was ja an sich zu verwundern ist, wenn man die verschiedenen thermischen Eigenschaften von Messing und Invar bedenkt. Es blieb jedoch nichts anderes übrig, als die verwendeten Ringe öfters zu prüfen und neu zu schleifen und zu polieren. Während der Aufnahmen selbst war übrigens die Konstanz der Distanzstücke eine gute, wenn auch ganz kleine Veränderungen nicht immer vermieden werden konnten, da manche Aufnahmen eine Expositionsdauer von mehreren Stunden erforderten.

Von vornherein lag die Absicht fern, die neuen Neonlinien als wirkliche „Normalen zweiter Ordnung" (im unmittelbaren Anschluß an Cd 6438) zu bestimmen; vielmehr war die Absicht die, die Linien mit einer solchen Genauigkeit zu bestimmen, die für serientheoretische Studien erwünscht ist. Für die Spektralgegend im äußersten Rot wäre die gewünschte Genauigkeit ca. 0,01 Å.-E. Trotzdem wurde die Genauigkeit, sofern es möglich war, weiter getrieben. (Vgl. § 7.)

Da also von Anfang an nicht die größte Exaktheit angestrebt wurde, so war es auch nicht nötig, die neuen Linien an die Cadmiumlinie 6438 direkt anzuschließen, sondern es genügte, als intermediäre Normale irgendeine der früher bestimmten Neonnormalen zu verwenden. Dabei stieß man jedoch auf Schwierigkeiten, da fast alle diese Linien bei Verwendung der Neonröhre in gerader Durchsicht breite Selbstumkehr zeigen oder doch sehr breit erscheinen (etwa dreimal so breit wie bei senkrechter Kapillare).

Aus zwei Gründen nun wurde die grüne Neonlinie 5400 als Hilfsnormale gewählt: erstens ist diese Linie auch bei „Röhre end on" absolut scharf und ohne eine Spur von Selbstumkehr oder Verbreiterung, und zweitens ist die Empfindlichkeit der benutzten Dicyaninplatten für 5400 ungefähr dieselbe wie für 8500 Å.-E., so daß in bequemster Weise Normale und unbekannte Linien gleich lange exponiert werden konnten. Dies ist ein nicht zu unterschätzender Vorteil; denn kleine Änderungen in der Apparatur betreffen so also die Normale und die zu messenden Linien gleich stark, und es können so diese Fehlerquellen leicht vermieden werden.

Die genaue Wellenlänge dieser Hilfsnormale wurde nun direkt an die rote Cadmiumlinie 6438,4696 Å.-E. angeschlossen.

Zur *Reproduktion dieser Linie* wurde eine aus Quarz geblasene Lampe verwendet, die mit reinem Cadmium gefüllt wurde und deren Elektroden mit weißem Siegellack eingekittet waren. Während des Betriebes wurde dauernd mit einer Gädeschen Quecksilberpumpe gepumpt und die Lampe mit kaltem Wasser gekühlt. Eine Spur Quecksilberzusatz zu der Cadmiumfüllung genügte, um die Hauptquecksilberlinien stark und scharf zu erhalten, was für die später ausgeführten Kontrollmessungen von Wichtigkeit war.

Die Cadmiumlampe brannte bei einer Belastung von 3 Amp. beliebig lange, sofern durch genügend langes Pumpen dafür gesorgt wurde, daß die im Rot und Violett auftretenden Banden verschwanden. Bei Anwesenheit dieser Banden erscheinen übrigens die Cadmium- und Quecksilberlinien sehr unscharf, weshalb die Aufnahmen auch nur dann gemacht wurden, wenn diese störenden Banden vollständig verschwunden waren und die Linien sich scharf vom schwarzen Grunde abhoben.

Die Stellung der Cadmiumlampe ist in Fig. 3 mit L_2 bezeichnet. Mit Hilfe eines gewöhnlichen Spiegels S konnte sie auf der Blende abgebildet werden. Der Spiegel S war zum Wegklappen eingerichtet, so daß abwechslungsweise Cadmium- und Neonspektrum exponiert wurde. Für 6438 mußte 3 Minuten, für 5400 5—10 Minuten exponiert werden.

Die Aufnahmen wurden bei verschiedenen Distanzen gemacht, um auf diese Weise den Phasensprung zu eliminieren; der so erhaltene Wert der Phasenänderung (vgl. § 6) stimmte

gut mit dem Werte, der durch direkte Messung mit Hilfe der grünen Quecksilber- und Cadmiumlinie erhalten wurde. Der endgültige Wert der Wellenlänge, für den natürlich auch die Korrektion wegen der Dispersion der Luft durchgeführt wurde, und der den Messungen im Neonspektrum zugrunde gelegt wurde, beträgt

5400,5638 Å.-E.

Der Fehler, der diesem Werte anhaftet, dürfte unter 0,001 Å.-E. liegen. Diese Meinung wird auch durch folgende Rechnung bestätigt.

Die Linien 5400 und 5852 hängen mit den Tripletts und Quadrupletts zusammen, und es sollte danach die Wellenzahlendifferenzen zwischen 5400 und 5852 betragen 1429,428. Da nun die Vakuumschwingungsdifferenzen für 5400 und 5852 18511,447 und 17082,022 betragen, so berechnet sich $\Delta\nu$ zu 1429,425.

Da sich die grüne Neonlinie 5400 übrigens wegen ihrer leichten Reproduzierbarkeit sehr als Normale eignet und viel bequemer erzeugt werden kann als die Cadmiumlinie, ist eine noch exaktere Messung dieser Linie im Gange, die den Wert dieser Linie und einiger anderer bis auf wenige Zehntausendstel einer Ångströmeinheit liefern soll.

Die Messung der anderen Wellenlängen im Anschluß an diese Normale erfolgte auf Grund der bekannten Formel:

$$\lambda_x = \frac{n_s \cdot \lambda_s}{n_x} \sqrt{\frac{F^2 + v_s^2 R_s^2}{F^2 + v_x^2 R_x^2}},$$

in der λ_x die gesuchte Wellenlänge und n_x ihre Ordnungszahl, λ_s die grüne Neonlinie und n_s ihre Ordnungszahl bedeutet. F ist die Brennweite des Hohlspiegels, v_s und v_x die Vergrößerungsfaktoren des Spektralapparates, R_s und R_x sind die auf den Negativen gemessenen Radien der Interferenzringe von Standardlinie und unbekannter Linie.

Die Messung der Brennweite des Hohlspiegels wurde schon oben skizziert; als mittlerer Wert liegt den Messungen der Wert 248,0 mm zugrunde ($F^2 = 61500$). Die Bestimmung von v_s und v_x geschah durch Ausmessung der Quarzfäden auf dem Spalt und ihres Bildes in den Interferenzstreifen der Spektrogramme. Diese Messungen, wie die der Ringdurchmesser $2R_s$ und $2R_x$, geschah mit dem Zeissschen Komparator.

Da Kollimatorlinse und Kameraobjektiv des Spektralapparates die gleiche Brennweite hatten und beide sehr gut korrigiert waren, war die Vergrößerung bei guter Justierung sehr nahe gleich Eins und die Änderung mit der Wellenlänge nur minimal. Die Abweichungen der Werte bei verschiedenen Aufnahmen fiel in die Grenzen der Meßgenauigkeit. Aus diesem Grunde erschien es ohne weiteres erlaubt, für die äußersten ultraroten Linien den Vergrößerungsfaktor aus einer Aufnahme zu entnehmen, die ohne Interferenzapparat gewonnen wurde.

Es ist wohl nicht unnötig, auch an dieser Stelle auf eine Vorsichtsmaßregel aufmerksam zu machen, die bei den Rechnungen immer beobachtet wurde. Es wurden immer *die* Werte von R_s und R_x bei den Berechnungen von λ_x kombiniert, die möglichst gleich groß waren. Dadurch können Fehler des abbildenden Systems und nicht ganz exakte Einstellung des Hohlspiegels nicht in dem Maße die gewonnenen Resultate fälschen, wie es bei willkürlicher Kombination beliebiger R_x und R_s der Fall sein kann. Dies erhellt aus der allgemeinen Fehlerformel:

$$\Delta\lambda_x = \lambda_x \left\{ -\frac{dn_x}{n_x} + \frac{1}{F^2/v^2} \left(R_s\, dR_s - R_x\, dR_x + \frac{dF}{F}(R_x^2 - R_s^2) - \frac{dv}{v}(R_s^2 - R_x^2) \right) \right\}.$$

Falls man annimmt, daß die Fehler der Messung in R_s und R_x den gleichen Betrag annehmen, so folgt:

$$\Delta\lambda_x = \lambda_x \left\{ -\frac{dn_x}{n_x} + \frac{1}{F^2/v^2} \left((R_s - R_x)\, dR + \frac{dF}{F}(R_x^2 - R_s^2) - \frac{dv}{v}(R_s^2 - R_x^2) \right) \right\},$$

woraus man erkennt, daß der Fehler in λ_x um so kleiner wird, je näher man die Größen R_s und R_x wählt.

Obgleich nähere Untersuchungen zeigten, daß auch die Kombinationen verschiedener R_s und R_x innerhalb der Fehlergrenzen zu denselben Resultaten führten, wurde diese Vorsichtsmaßregel doch immer befolgt.

Ein ausgezeichnetes Kriterium für die gute Justierung der ganzen Apparatur bietet nach meinen Erfahrungen die Konstanz der Wellenlängenwerte, die man erhält, wenn man einen einzigen Ring der Standardlinie mit möglichst vielen Ringen einer zweiten Linie kombiniert. Auf diese Weise ver-

rät sich sofort eine falsche Einstellung des Hohlspiegels H oder ein falscher Brennweitenwert, der der Rechnung zugrunde liegt. Es zeigt sich in diesem Falle ein deutlicher Gang in den Wellenlängenwerten mit Zunahme des Ringdurchmessers der zweiten Linie, falls man den kleinsten Ring der Standardlinie zugrunde legt.

Fehler dieser Art treten auch auf, wenn man an Stelle des Hohlspiegels H und des Planspiegels P als abbildendes System eine einfache Linse nimmt. Obgleich eine solche Anordnung eine große Vereinfachung des Aufbaues mit sich bringt und auch eine größere Lichtstärke erzielt, ist deshalb doch die Anwendung von Spiegeln bei derartigen Messungen ratsam. Falls man natürlich innerhalb kleiner Spektralbereiche Messungen ausführt, gibt eine einfache Linse auch gute Resultate.

§ 6. Die Wellenlängenwerte, die auf die in § 5 kurz geschilderte Weise erhalten werden, sind noch nicht die endgültigen Werte, vielmehr bedürfen sie noch *zweier Korrektionen*:

I. Eine teilweise nicht zu vernachlässigende Korrektion wegen der *Phasenänderung* durch Reflexion an dem Silber, die mit der Wellenlänge sich ändert, und

II. Korrektion für Temperatur und Druck wegen der *Dispersion der Luft.*

1. Die Ermittlung des Phasensprunges erfolgte genügend genau ($\pm$ 0,005 Ordnungszahlen) durch Verwendung verschiedener Distanzstücke. Für die Messung wurden Aufnahmen bei 3, 6, 8 und 10 mm Distanz ausgeführt. Die Ermittlung des Phasensprunges geschah graphisch oder durch Rechnung nach dem einfachen, früher (l. c.) angegebenen Verfahren. Die für verschiedene Wellenlängen erhaltenen Werte wurden zu einer Kurve zusammengestellt und die endgültige Korrektion nach dieser vorgenommen. Der Phasensprungwert für die Linien oberhalb 8500 wurde aus dieser Kurve extrapoliert, da diese Linien nur auf Aufnahmen mit 3 mm Distanz erhalten werden konnten. Falls keine Anomalie des Phasensprunges in dieser Gegend auftritt, was wohl kaum anzunehmen ist, dürfte durch diese Extrapolation die Genauigkeit der Messung wenig beeinflußt werden. Daß die einzelnen Werte

sich zudem in nicht zu weiten Grenzen bewegen, ist aus der Kurve Fig. 4 zu ersehen. (Bezogen auf Cd 6438 als Normale.)

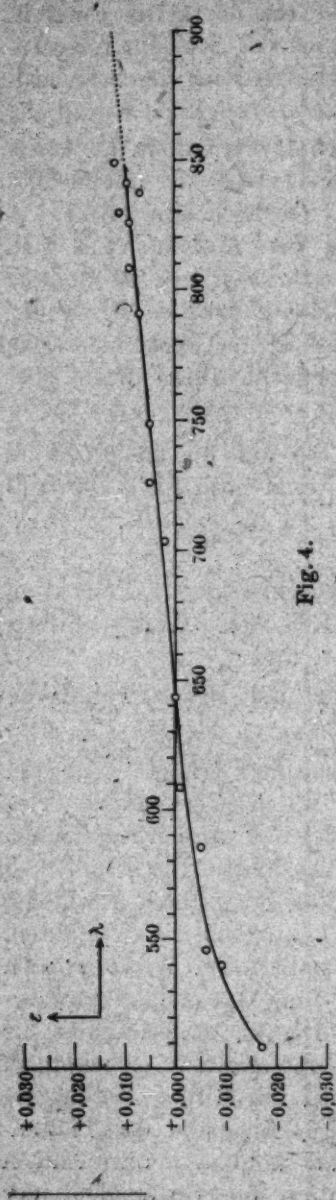


Fig. 4.

2. Die *Korrektion wegen der Dispersion der Luft* hält sich in viel engeren Grenzen und könnte für die vorliegenden Messungen vernachlässigt werden. Druck und Temperatur bewegten sich innerhalb der Grenzen 715 mm und 730 mm und 8°—15°, was einer Korrektion von ca. 0,001 Å.-E. im äußersten Rot entspricht.

Trotzdem die Korrektion, je nach Temperatur und Barometerstand, oft noch geringer war, wurde sie doch der Vollständigkeit halber immer in Betracht gezogen.

Die verwendete Korrektionsformel wurde schon von Buisson und Fabry[1]) entwickelt und lautet

$$\delta\lambda = \lambda_x \left(n'^{15}_{760} - n^{15}_{760}\right) \frac{D^{t}_{p} - D^{15°}_{760}}{D^{15°}_{760}} .$$

n ist der Brechungsexponent der Luft für die Standardlinie, n' der für die Wellenlänge λ_x, beide für 15° und 760 mm.

D ist die Dichte der Luft, jeweils für die angeschriebenen Bedingungen.

Bei den Messungen der grünen Neonlinie waren die Versuchsbedingungen im Mittel 13° und 725 mm Druck. Dies entspricht einer Korrektion von ca. − 0,0003 Å.-E.

1) H. Buisson u. Ch. Fabry, Journ. d. Phys. März 1908.

§ 7. Was die *Genauigkeit der vorliegenden Messungen* betrifft, so ist folgendes darüber zu bemerken.

Die *starken* Neonlinien dürften mit einer Genauigkeit von $\pm$ 0,002 Å.-E. gemessen sein, die schwächeren, interferometrisch bestimmten Linien bis auf 0,005 Å.-E. Schwache Linien, die nur ein oder zweimal mit Etalon gemessen werden konnten, sind in der nachfolgenden Tabelle dadurch gekennzeichnet, daß die dritte Dezimale klein angeschrieben wurde. Bei solchen Linien ist die zweite Dezimale noch sicher.

Die Genauigkeit der Messung wurde wesentlich beeinflußt durch die kleine Dispersion des Spektralapparates, da die Interferenzringe naher Linien übereinander griffen und so die Messung erschwerten. Sollte es in absehbarer Zeit möglich sein, einen geeigneteren Apparat zu erhalten, so sollen, falls die Mühe sich lohnt, Kontrollmessungen ausgeführt werden.

Die *Bewertung der Gittermessungen* wird nach folgenden Gesichtspunkten zu erfolgen haben. Die Genauigkeit dürfte betragen: für stärkere Linien $\pm$ 0,03 Å.-E., für schwächere $\pm$ 0,05 Å.-E. Die ganz schwachen werden Fehler bis 0,1 Å.-E. aufweisen können, da ihre Messung besonders schwierig war. Die angegebenen Fehler sind *mögliche Fehler!*

§ 8. *Die Resultate der Messungen.*

Die folgende Tabelle enthält die Messungen. Mit Rücksicht auf die im folgenden zu erörternden Gesetzmäßigkeiten sind in der dritten Spalte auch die Vakuumwellenzahlen angegeben. Die *Intensitätsangaben* in der ersten Spalte sind einheitlich nach *einer* Gitteraufnahme durchgeführt. Die Reduktion auf Vakuum erfolgte nach einer Tabelle, die auf Grund der Dispersionsmessungen von Luft berechnet wurde.

Tabelle.

Intensität	λ I. Å.-E.	Vakuumwellenzahl	Intensität	λ I. Å.-E.	Vakuumwellenzahl
4	7051,314	14177,849	8	7535,786	13266,364
4	7059,119	14162,174	8	7544,061	13251,813
3	7125,37	14030,50	1	7724,62	12942,05
3	7138,70	14004,29	1	7833,12	12762,79
3	7304,82	13685,83	2	7838,98	12753,25
6	7472,456	13378,799	2	7927,09	12611,50
0	7495,31	13338,01	3	7937,010	12595,737
0	7528,56	13279,10	8	7943,193	12585,932

Tabelle (Fortsetzung).

Intensität	λ I. Å.-E.	Vakuumwellenzahl	Intensität	λ I. Å.-E.	Vakuumwellenzahl
8	8082,460	12369,063	1	8778,78	11387,98
5	8118,554	12314,079	4	8780,63$_0$	11385,575
3	8128,95	12298,338	4	8783,77$_5$	11381,503
7	8136,423	12287,035	0	8822,66	11331,34
1	8248,80	12119,64	0	8827,55	11325,07
4	8259,392	12104,101	0	8829,25	11322,88
5	8266,092	12094,290	0	8830,80	11320,90
1	8267,14	12092,78	3	8853,97	11291,27
7	8300,338	12044,392	3	8865,72	11276,31
1	8301,56	12042,62	1	8919,43	11208,41
2	8365,82	11950,12	0	8937,00	11186,37
1	8376,45	11934,95	0	8958,46	11159,58
7	8377,630	11933,271	0	8988,58	11122,18
1	8417,24	11877,13	0	9105,18	10979,74
7	8418,447	11875,412	2	9148,72	10927,49
3	8463,42	11812,30	2	9201,88	10864,36
2	8484,52	11782,93	2	9220,28	10842,68
7	8495,359	11767,898	0	9221,50	10841,25
1	8544,66	11699,99	0	9226,80	10835,02
2	8571,27	11663,68	0	9234,08	10826,48
1	8582,87	11647,93	2	9300,70	10748,93
6	8591,266	11636,531	0	9310,65	10737,44
5	8634,668	11578,041	0	9314,00	10733,59
2	8647,04	11561,49	1	9326,66	10721,30
6	8654,380	11551,670	0	9345,06	10697,91
1	8655,52	11550,14	1	9368,02	10671,70
3	8679,50	11518,24	0	9399,10	10636,40
3	8681,93	11515,02	0	9696,46	10310,21
1	8704,15	11485,62	0	9840,42	10159,40
2	8771,64	11397,24			

Gesetzmäßigkeiten im Spektrum des Neons.

§ 9. Jede Untersuchung über den Bau eines komplizierten Linienspektrums nimmt naturgemäß seinen Ausgang von einer Sichtung des ganzen Wellenzahlenmaterials nach Linien konstanter Schwingungsdifferenzen. Dadurch gelingt es meist, verschiedene Linien zu bestimmten Gruppen zusammenzufassen, wodurch die weitere Untersuchung schon bedeutend vereinfacht wird.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, veröffentlichte als erster H. E. Watson (l. c.) Studien über den Bau des Neonspektrums; über die Feststellung konstanter Schwingungsdifferenzen bei den stärksten Linien des Spektrums gelangte er jedoch nicht hinaus, obgleich sein Ziel war, Serien zu finden,

die wohl einen ähnlichen Bau aufweisen, wie die des Heliumspektrums, das durch die Arbeiten von Runge und Paschen[1]) und später für das Ultrarot von Paschen[2]) das am besten geordnete Serienspektrum wurde.

Erst später fand Rossi[3]), ebenfalls auf der Suche nach den den Heliumserien entsprechenden Serien, zwei Dublettserien und eine einfache Serie.

§ 10. Die von Watson angegebene Ordnung der stärkeren Linien in Triplette und Quadruplette gibt, mit dem neugefundenen langwelligen Quadruplett, die in Tab. I aufgeführte Ordnung, wenn man, wie in der Note über dieses Thema angemerkt wurde[4]), die Komplexe nach der Größe der Schwingungszahlen anordnet.

Tabelle I.

	Diff.		Diff.		Diff.	
12 369,080	1070,097	13 439,177	359,332	13 798,509	417,450	14 215,959
1566,429				1566,427		1399,245
						15 615,204
						167,183
13 935,509	→	1429,427	←	15 364,936	417,451	15 782,387
297,370				297,375		
14 232,879	1070,078	15 302,957	359,354	15 662,311	417,450	16 079,761
194,278				194,269		
14 427,152	→	1429,428	←	15 856,580	417,449	16 274,029
456,248				456,248		
14 883,400	1070,078	15 953,475	359,353	16 312,828	417,450	16 730,278
86,395				86,397		
14 969,795	→	1429,430	←	16 399,225	417,449	16 816,674
179,941				179,940		
15 149,736	1070,080	16 219,816	359,349	16 579,165	417,451	16 996,616
1932,286				1932,282		
17 082,022	→	1429,425	←	18 511,447		

Die konstanten Schwingungsdifferenzen der horizontalen Glieder sind im Mittel

$$\underbrace{1070{,}078 ; \; 359{,}351}_{1429{,}429} \quad \text{und} \quad 417{,}450$$

1) C. Runge u. F. Paschen, Astroph. Journ. 1896. **3**. p. 4.

2) F. Paschen, Ann. d. Phys. **27**. p. 537. 1908; **29**. p. 625. 1909.

3) R. Rossi, Phil. Mag. **26**. p. 981. 1913. — Die vorliegenden Resultate wurden ohne Kenntnis von der Arbeit Rossis gefunden, von der ich leider erst später durch Hrn. Prof. Paschen erfuhr.

4) Physik Zeitschr. **17**. p. 552. 1916.

In Tab. I sind nun noch zwei Vervollständigungen angefügt, die sich nachher rechtfertigen werden:

1. Die Linien 5852 ($\nu = 17082{,}022$) und 5400 ($\nu = 18511{,}447$) zeigen ebenfalls die Schwingungsdifferenz 1429,43 und sind an den entsprechenden Ort angefügt.

2. Die sehr starke Linie 6402 ($\nu = 15615{,}204$) wird in der am meisten rechts stehenden vertikalen Kolumne zwischen 14215,959 und 15782,387 eingeschoben.

In allen bisherigen Veröffentlichungen wurde nun immer das Hauptgewicht auf die Schwingungsdifferenzen der Horizontalreihen gelegt. Eine nähere Untersuchung zeigte jedoch, daß auch den vertikalen Schwingungsdifferenzen eine große, ja größere Bedeutung zukommt.

Geht man von kleinen zu großen Schwingungszahlen, so betragen diese Schwingungsdifferenzen im Mittel:

1899,245	1566,428	456,248
167,183		86,898
297,873		179,941
194,270		1932,284

Die große Mehrzahl der Neonlinien lassen sich nun in Gruppen mit diesen Schwingungsdifferenzen anordnen. Fast vollständig gelingt die Einordnung für die neuen ultraroten Linien und das Maß der Konstanz ihrer Schwingungsdifferenzen dürfte zugleich einen Prüfstein für die Genauigkeit der Messungen bilden.

In *Tabelle II* sind die meisten Gruppen, die sich bisher einordnen ließen, zusammengestellt. Viele davon sind allerdings lückenhaft und ungenau; dies ist jedoch nicht zu verwundern, da viele dieser Linien schwach und deshalb schwer zu messen sind.

Den Rechnungen liegen die Messungen von Watson zugrunde (soweit keine genaueren vorliegen), die auf internationale Ångströmeinheiten umgerechnet wurden. Die Vakuumwellenlängen wurden nach einer Tabelle ermittelt, die nach den Scheelschen Dispersionsmessungen[1]) an Luft berechnet wurde. Die Korrektionen für die ultraroten Linien ergab sich durch Extrapolation.

1) K. Scheel, Verh. d. D. Physik. Ges. 9. p. 24. 1907.

Tabelle II.

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
	8	13251,81	
	—	—	1863,83
	—	—	
	1	11387,98	
1	—	—	650,54
	0	10737,44	
	—	—	
		10471,15	
	—	—	
	8	13266,36	
	—	—	1566,37
	1	11699,99	
	—	—	491,58
2	1	11208,41	
	—	—	*542,77*
		10665,64	*179,94*
	—	*10485,70*	
	—	—	
	—	—	
	1	11934,95	167,05
	7	11767,90	
	—	—	491,59
3	3	11276,31	
	—	—	542,72
	0	10733,59	
	—	—	
	—	—	
	6	13349,51	1399,39
	2	11950,12	167,19
	2	11782,93	297,31
	1	11485,62	194,35
4	3	11291,27	456,25
	0	10835,02	86,09
	2	10748,93	
	—	*10568,85*	
	—	—	
	6	13378,80	
	—	—	1566,50
	3	11812,30	297,28
	3	11515,02	194,12
5	0	11320,90	456,54
	2	10864,36	
	—	—	
	—	—	
	—	—	

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
	—	—	
	1	12042,62	167,21
	7	11875,41	297,37
	5	11578,04	
6	—	—	650,55
	2	10927,49	86,24
	0	10841,25	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	7	12044,39	167,26
	1	11877,13	
	—	—	491,55
7	4	11385,58	
	—	—	542,90
	2	10842,68	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	7	12287,03	194,25
8	1	12092,78	456,25
	6	11636,53	86,39
	1	11550,14	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	2	12753,25	167,32
	8	12585,93	
	—	—	491,64
9	5	12094,29	
	—	—	542,65
	6	11551,64	
	—	—	
	—	—	
	4	14162,17	1399,38
	(1)	12762,79	167,05
	3	12595,74	297,40
10	3	12298,34	194,24
	4	12104,10	456,17
	1	11647,93	86,44
	2	11561,49	179,99
	4	11381,50	
	—	—	

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
11	4	14177,85	
	—	—	1566,35
	4	12611,50	
	5	12314,08	297,42
	1	12119,64	194,44
	2	11663,68	455,96
	ber.	*11577,13*	[1] 86,55
	2	11397,24	179,89
	—	—	
12	5	17570,62	
	5	16171,34	1399,28
	4	16004,05	167,29
	2	15706,53	297,52
	4	15512,41	194,12
	1	15056,09	456,32
	—	*14969,73*	86,36
	1	14789,97	179,76
	—	—	
13	4	17655,15	
	—	—	1566,47
	5	16088,68	
	5	15791,17	297,51
	3	15597,00	194,17
	3	15140,75	456,25
	—	—	
	—	—	
	—	—	
14	2	18348,83	
	—	—	1863,96
	—	—	
	3	16484,87	
	—	—	650,52
	5	15834,35	
	—	—	266,34
	2	15586,01	
	—	—	
15	4	18398,99	
	—	—	1566,55
	2	16832,44	
	3	16535,04	297,40
	4	16340,70	194,34
	5	15884,33	456,37
	6	15797,96	86,37
	6	15618,17	179,79
	3	13685,89	1932,28

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
16	7	18710,12	
			1863,96
	2	16846,16	
			650,54
	1	16195,62	
			266,37
	3	15929,25	
	—	—	
17	7	18717,72	
			1566,44
	2	17151,28	
			491,80
	3	16659,48	
			542,35
	1	16117,13	? 180,27
	3	15936,86	1932,27
	2	14004,29	
18	8	18754,02	
	4	17355,05	1398,97
	3	17187,59	167,46
	4	16890,38	297,21
	4	16695,77	194,61
	1	16239,43	456,34
	3	16153,16	86,27
	3	15973,17	179,99
	—	—	
19	4	18769,33	
	—	—	1566,54
	5	17202,79	
	4	16905,51	297,28
	—	—	650,50
	3	16255,01	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
20	—	—	
	—	—	
	5	17223,53	
	5	16926,14	297,39
	—	—	650,42
	2	16275,72	
	5u	16190,16	85,56
	—	—	
	—	—	

[1] i Luft berechn. = 8635,35 beobachtet und interferometrisch gemessen ist 8634,67. Diese Linien wären mit dem Gitter in zweiter Ordnung sicher getrennt worden. Auf keiner Aufnahme ist eine Spur von 8635,35 zu sehen.

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	4	17673,59	
21	—	—	650,63
	5	17022,96	
	—	—	266,56
	1	16756,40	
	—	—	
	6	19539,34	
	—	—	1863,72
	—	—	
	2	17675,62	
22	—	—	650,49
	4	17025,13	
	—	—	266,49
	3	16758,64	
	—	—	
	—	—	
	—	—	
	4	17971,99	
	—	—	491,64
23	5	17480,35	
	—	—	542,85
	5	16937,50	
	—	—	
	—	—	
	3	19550,19	
	—		1863,72
—			
	2	17686,47	
24	—		650,57
	3	17035,80	
	1	16949,47	86,33
	2	16769,53	179,94
	2	14837,26	1932,28
	5	20666,88	1399,24
	5	19267,64	166,98
	4	19100,66	297,38
	1	18803,28	194,37
25	4	18608,91	542,65
—			
	1	18066,26	179,51
	1	17886,75	
	—		

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
	3	20709,55	
	—		1566,14
	5	19143,41	297,53
	3	18845,88	194,24
26	4	18651,64	456,06
	1	18195,58	
	—		
	—		
	—		
	5	21250,87	
	—		1863,62
	—		
	0	19387,25	
27	4	19192,08	195,17
	—		541,92
	3?	*18650,15*?	179,94
	2	18470,21	
	5	21230,79	
	—		
	—		2057,98
	—		
28	1	19172,81	
	—		722,59
	—		
	2	18450,2	
	—		
	4	22031,14	
	—	—	1565,46
	4	20465,68	297,80
	3	20167,88	193,81
29	2	19974,07	456,73
	4	19517,34	85,98
	5	19431,36	180,36
	4	19251,00	
	—	—	
	3	22038,23	
	—		1863,76
	—		
	0	20174,47	
	—		650,69
30	0	19523,78	
	—		266,01
	2	19257,77	1932,21
	0	17325,56	

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$	Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
	3	22275,09	1399,27		2	23066,14	1566,27
	4	20875,82			—		
	—		658,44		1	21499,87	491,42
	—				—		
31	2	20217,38		33	1	21008,45	456,42
	—				—	20552,03?	86,35
	—				4	20465,68	
	—				—		
	—				—		
	0	22298,93	1565,94		4	21469,87	1566,54
	—				—		
	3	20732,99	297,13		0	19903,33	491,64
	2	20435,86	194,22		—		
32	2	20241,64		34	0	19411,69	456,25
	—				0	18955,44	86,20
	—				4	18869,24	179,96
	—				1	18689,28	
	—				—		

Ein Hauptunterschied zwischen den Gruppen in Tab. II und denen in Tab. I springt sofort in die Augen: die Gruppen der Tab. II sind umgekehrt gelagert, wie die der Tab. I. Während die Glieder der Gruppen I die Schwingungsdifferenzen in der oben angegebenen Reihenfolge (1566; 297; usf.) ergeben, falls man von kleinen zu großen Wellenzahlen fortschreitet, ist dies bei den Gliedern der Gruppen II umgekehrt. Fig. 5 erläutert den Sachverhalt.

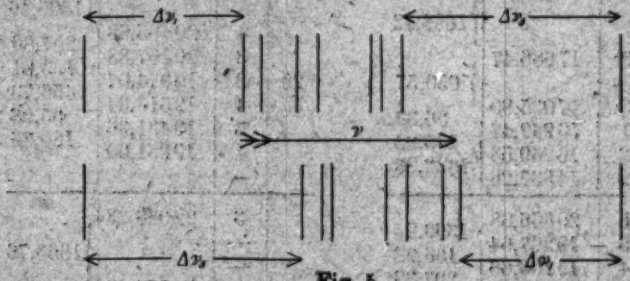


Fig. 5.

Diese Tatsache erinnert sofort an die Verhältnisse bei einem gewöhnlichen Triplettseriensystem:

Das Grundglied der Hauptserie und der zweiten Nebenserie ist umgekehrt gelagert wie die übrigen Glieder der zweiten Nebenserie und die Glieder der ersten Nebenserie.

Diese Analogie ist zu auffallend, als daß man sie sich entgehen ließe. Sollten also im Neonspektrum auch Serien auftreten, die im wesentlichen denselben Grundgesetzen gehorchen, wie wir sie von den anderen Spektren her kennen, so müßte man folgendes schließen:

1. Die Tab. I enthält die Gruppen, die die Grundglieder der Hauptserie und zweiten Nebenserie darstellen.

2. Tab. II enthält die Glieder der ersten Nebenserie und die Glieder der zweiten Nebenserie, mit Ausnahme des ersten.

Nach diesen Annahmen ist man weiter verleitet, anzunehmen, daß im kurzwelligen Gebiete die von Watson angegebenen, in Tab. Ia zusammengestellten Gruppen mit den (horizontalen) Schwingungsdifferenzen 1070; 859; 417 die Glieder der Hauptserie darstellen.

Wieweit diese Schlüsse zutreffen, soll in den folgenden Paragraphen gezeigt werden, in denen die bisher ermittelten Serien aufgestellt sind.

Tabelle Ia.

J	ν		J	ν		J	ν		J	ν
3	26629,46		3	27699,22		2	28058,80		4	28475,99
5	27010,82					5	28439,95		4	28857,52
4	27124,08					5	28550,05		4	28971,06
4	27149,79					5	28579,35		5	28996,60
5	27512,66					5	28942,30			
6	27768,52		5	28838,89		3	29187,76		5	29615,86
8	27819,74	$\Delta\nu = 1070{,}08$	5	28889,62	$\Delta\nu = 859{,}85$	5	29249,43	$\Delta\nu = 417{,}45$	5	29666,15
2	31561,57		2	32630,58		2	32990,46		3	33407,61
2	31705,93					3	33132,00		2	33548,15
2	31751,17					3	33180,15		1	33597,63
1	31760,05					3	33189,40		3	33606,44
2	31978,41					3	33407,61			
1	32466,69		1	33536,68		1u	33896,35			
1	32469,64		1	33539,49					2	34316,74
2	32490,11					3	33917,97		1	34337,09
3	32698,12					1	34127,13			

§ 11. Viele der in Tab. II gegebenen Gruppen sind unvollständig, und zunächst wäre man geneigt, die Schuld daran ungenauen und nicht erschöpfenden Messungen zuzuschreiben. Wie wir weiter unten sehen werden, trifft dies auch bei den Messungen Watsons zu; manche schwache Linie, die eigentlich da sein müßte, fehlt bei ihm und nahe Doppellinien trennt er nicht.

Die langwelligen Glieder jedoch sind von mir mit größter Sorgfalt untersucht worden. Auf langfristigen Aufnahmen (bis zu 20 Stunden) hätten sicher auch die schwächsten Komponenten zum Vorschein kommen müssen. Es dürfte deshalb außer jedem Zweifel stehen, daß die Lücken bei den ultraroten Gliedern reell sind. Nur bei den ganz langwelligen Gliedern kann diese Behauptung fehlgehen, da jenseits 9300 Å.-E. die Empfindlichkeit der Platten doch wesentlich zurückgeht.

Ein Vergleich der einzelnen Gruppen zeigte nun zudem, daß dieselbe Konfiguration, also Gruppen mit entsprechenden Lücken und derselben Reihenfolge der Intensität der Linien systematisch wiederkehren (wenn man von dem Fehlen der Linien absieht, die schon bei den ultraroten Gliedern sehr schwach sind). Damit waren durch den Habitus der einzelnen Gruppen ganz bestimmte einander zugeordnet und eine Überschlagsberechnung, bei der die Tabellen von Dunz[1]) vorzügliche Dienste leisteten, zeigte, daß die meisten der einzelnen Gruppen Glieder von Serien sind, die den Charakter einer ersten Nebenserie tragen. Eine Serie einfacher Linien wurde im Anschluß hieran ermittelt.

Schon jetzt sei erwähnt, daß diese Serien auch die Rossischen in sich schließen, doch nicht als Dublettserien *konstanter* Schwingungsdifferenz, wie sie von Rossi gegeben sind.

§ 12. *Die einzelnen Serien.*

Vorbemerkung. Die Serienrechnungen wurden für internationale Ångströmeinheiten nach der Ritzschen Formel berechnet.

$$\nu = G - \frac{N}{(m + d + \delta(G - \nu))^2},$$

wo ν die Vakuumwellenzahl, G die Grenze der Serie und N die Rydbergkonstante bedeutet. Als Wert von N liegt zugrunde 109730,00, eine Zahl, die aus den Messungen von Paschen über Wasserstoff und Bohrs Heliumlinien[2]) extrapoliert wurde. Natürlich ist diese Wahl für das Folgende unwesentlich.

Schon eine Überschlagsbetrachtung über den Verlauf der nachfolgenden 8 Seriengruppen D_1 bis D_7 zeigt, daß sie (zu-

1) B. Dunz, Inaug.-Diss. Tübingen 1911.
2) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50. p. 935. 1916.

nächst als vollständige Oktette betrachtet) nach denselben Grenzen konvergieren. Dies wurde noch rechnerisch geprüft; aus drei aufeinanderfolgenden Gliedern ($m = 4, 5, 6$) wurden die Grenzen berechnet, wobei sich bei den Serien D_1 bis D_5 eine Übereinstimmung ergab, die in Anbetracht der den Wellenlängenwerten anhaftenden Fehler[1]) ganz gut war. Die Serien D_6 und D_7 gaben allerdings etwas größere Abweichungen.

Die endgültigen, den Rechnungen zugrunde liegenden Grenzwerte wurden aus den drei folgenden, der Serie D_2 angehörenden Linien gewonnen:

Intensität	λ I. Å.-E. (Watson Korr.)	ν Vak.	m
5	5804,40	17223,53	4
4	5074,17	19702,18	5
4	4749,56	21048,73	6

Aus diesen Linien ergab sich die Grenze G_2 zu 24105,72. Mit Hilfe der aus Tab. I sehr genau bekannten Schwingungsdifferenzen wurden dann die anderen Grenzwerte berechnet.

Somit sind die den Rechnungen zugrunde liegenden Werte der Grenzen:

	$\Delta\nu$	
$G_1 = 25672{,}15$	1399,25	1566,43
$G_2 = 24272{,}90$	167,18	
$G_3 = 24105{,}72$	297,37	
$G_4 = 23808{,}35$	194,27	
$G_5 = 23614{,}08$	456,25	
$G_6 = 23157{,}83$	86,40	
$G_7 = 23071{,}43$	179,94	
$G_8 = 22891{,}49$	1932,28	
$[G_9 = 20959{,}21]$		

Die folgenden acht Tabellen enthalten nun acht Seriengruppen, die nach diesen Grenzen (G_1 bis G_8) konvergieren. Mit Ausnahme der Serien D_6 und D_7 sind alle durch die Ritzsche Formel ziemlich gut dargestellt. Wie schon oben erwähnt, ist die Darstellung bei D_6 und D_7 weniger gut. Die Grenzen, die man für diese Serien erhält, liegen allerdings etwas höher als die oben berechneten. An der Zusammengehörigkeit dieser Gruppen zu einer Serie ist aber wohl nicht zu zweifeln, da der gleiche Bau und die Intensitätsabnahme mit wachsender Seriennummer dafür sprechen; dies beweist ja oft mehr als eine Berechnung mit nicht genau bekannten Wellenlängen.

1) Diese Fehler der Messungen Watsons sind etwa zu $\pm$ 0,05 Å.-E. anzunehmen, wie einige interferometrisch ermittelte Werte ergaben.

Bemerkungen zu den einzelnen Serien:

Serie D_1 und D_2. Die schwächeren Trabanten der Linien 8300 und 8418, wie bei Serie D_5 und D_{5a} der Linie 8877, konnte in den höheren Ordnungszahlen nicht nachgewiesen werden, obgleich dies sehr wichtig gewesen wäre. Mit dem kleinen Gitter war die Trennung unmöglich; mit dem Etalon ist der Nachweis wohl deshalb nicht gelungen, weil die Intensitäten der beiden Linien gar zu verschieden ist, so daß die Hauptlinie die schwächere überstrahlt.

Ebenso war es mit der Trennung der Linien $G_7 - m d_1$ und $G_7 - m d_2$, die auch nur bei den ultraroten Linien gelang. Doch deutet wohl das „u" (unscharf) Watsons darauf hin, daß die Linie $G_7 - 4 d_{1,2}$ doppelt ist.

Serie D_1.

Konstanten der Serienformel: $d_1 = -\ 0{,}009273$; $\delta_1 = 3{,}7556 \cdot 10^{-7}$, berechnet aus $G_5 - 4 d_1 = 16732{,}96$ und $G_5 - 5 d_1 = 19211{,}37$.

m	3	4	5	6	7	8	9
$G_1 - m d_1$							
1 beob.	(7) 8300,34	(5) 5748,25	(5) 5031,80	(3) 4712,04	(1) 4538,32		
$G_3 - m d_1$	12044,39	17391,79	19870,05	21216,29	22028,42		
1 ber.	8301,60	5748,25	5031,26	4711,99	4538,38		
1 beob.	(1) 8417,24	Nicht beob.					
$G_3 - m d_1$	11877,13	1 Luft ber.					
1 ber.	8418,49	5805,65					
$G_4 - m d_1$							
1 beob.	(4) 8780,68	(5) 5974,80	(5) 5208,80	(3) 4863,04	(1) 4678,19	(0) 4565,86	(0) 4491,80
$G_5 - m d_1$	11385,58	16732,96	19211,37	20557,73	21369,85	21895,54	22256,55
1 ber.	8782,05	5974,80	5208,80	4863,04	4678,80	4565,51	4491,77
$G_6 - m d_1$							
1 beob.	(2) 9220,28	(5 u) 6174,88	(3) 5355,18	(0) 4994,84	(1) 4800,11		
$G_7 - m d_1$	10842,68	16190,16	18668,31	20015,09	20827,04		
1 ber.	9221,66	16174,82	5355,06	4994,87	4800,16		
$G_8 - m d_1$							
$m d_1$ beob. Mittelwert	12228,59	6881,11[1])	4402,78	3056,48	2244,36	1718,54	1357,68
$m d_1$ ber.	12230,35	6881,12	4402,71	3056,35	2244,79	1718,24	1357,36

1) Mittel ohne Berücksichtigung von $G_1 - m d_1$.

Serie D_2.

Konstanten der Serienformel: $d_2 = -0{,}010191$; $\delta_2 = 4{,}6376 \cdot 10^{-7}$, berechnet aus 17223,53 und 19702,18.

m	3	4	5	6	7	8	9
$G_1 - md_2$							
λ beob.	(1) 8301,56						
$G_2 - md_2$	12042,62						
λ ber.	8300,72						
λ beob.	(7) 8418,45	(5) 5804,40	(4) 5074,17	(4) 4749,56	(1) 4572,96	(0) 4485,62	
$G_3 - md_2$	11875,41	17223,53	19702,18	21048,73	21861,60	22387,04	
λ ber.	8417,55	5804,40	5074,17	4749,56	4578,20	4465,59	
λ beob.	(5) 8634,67	(5) 5906,88	(4) 5151,90	(3) 4817,62	(0) 4636,09		
$G_4 - md_2$	11578,04	16926,14	19404,93	20751,37	21563,90		
λ ber.	8633,73	5906,88	5151,93	4817,62	4636,27		
$G_5 - md_2$							
λ beob.	(2) 9148,72	(2) 6142,43			(1) 4780,27		
$G_6 - md_2$	10927,49	16275,72	[3])		20913,50		
λ ber.	9147,64	6142,45	5330,63		4780,49		
λ beob.	(0) 9221,50	(5 u) 6174,88[1])		[(0) 4994,84]	[(1) 4800,11]		
$G_7 - md_2$	10841,25	16190,16					
λ ber.	9220,54	6176,23	5355,90				
$G_8 - md_2$							
md_2 beob. Mittel	12230,28	6882,17[2])	4403,48	3056,99	2244,60	1718,68	
md_2 berechnet	12229,04	6882,19	4403,54	3056,99	2245,25	1718,56	

1) Das „unscharf" deutet wohl auf die Doppelheit dieser Linie.
2) Ohne Berücksichtigung von $(G_7 - 4d_2)$. 3) Beobachtet $\lambda = 5330{,}71$.

Serie D_3.

Serienkonstanten: $d_3 = -\ 0{,}014112$; $\delta_3 = 1{,}6526 \cdot 10^{-7}$;
berechnet aus $G_1 - 4d_3 = 18769{,}33$ und $G_1 - 5d_3 = 21259{,}36$.

m	3	4	5	6	7	8	9
λ beob.	(6) 7472,46	(4) 5826,86	(1) 4702,50				
$G_1 - md_3$	13378,80	18769,33	21259,36				
λ ber.	7471,16	5826,86	4702,00				
$G_2 - md_3$							
λ beob.	(3) 8468,42	(3) 5811,40	(0) 5076,55				
$G_3 - md_3$	11812,30	17202,79	19692,95				
λ ber.	8461,70	5811,36	5076,56				
λ beob.	(3) 8681,98	(4) 5913,59	(3) 5154,37	(3) 4818,76	(0) 4636,64	(0) 4525,87	
$G_4 - md_3$	11515,02	16905,51	19395,63	20746,46	21561,34 ?	22089,00 ?	
λ ber.	8680,18	5913,58	5154,79	4818,77	4636,94	4526,12	
λ beob.	(0) 8830,80	berechnet		(0) 4864,31			
$G_5 - md_3$	11320,90	16711,84 [1]		20552,03			
λ ber.	8829,13			4854,31			
λ beob.	(2) 9201,88	(3) 6150,25	(0) 5333,21				
$G_6 - md_3$	10864,36	16255,01	18745,23				
λ ber.	9199,78	6150,25	5333,26				
$G_7 - md_3$							
$G_8 - md_3$							
md_3 beob. Mittel	12293,35	6902,85	4412,72	3061,89	2247,01	1719,35	
md_3 ber.	12291,01	6902,82	4412,79	3061,93	2248,20	1720,50	

1) Beobachtet 10710,81.

Serie D_4.

Serienkonstanten: $d_4 = -0{,}019567$; $\delta_4 = 3{,}1539 \cdot 10^{-7}$; berechnet aus $G_1 - 4\,d_4 = 18754{,}02$ und $G_1 - 5\,d_4 = 21250{,}87$.

m	3	4	5	6	7	8	9
λ beob.	(6) 7488,85	(8) 5330,71	(5) 4704,37	(3) 4422,70	berechnet	berechnet	
$G_1 - m d_4$	13349,51	18754,02	21250,87	22605.15	23420,65	23949,44	
λ ber.	7487,75	5330,71	4704,37	4422,71			
λ beob.	(2) 8365,82	(4) 5760,42	(0) 5085,94	(1) 4714,41	berechnet	berechnet	
$G_2 - m d_4$	11950,12	17355,05	19851,75	21205,62	22021,40	22550,19	
λ ber.	8364,96	5760,51	5085,97	4714,36			
λ beob.	(2) 8484,52	(2) 5816,54	berechnet	berechnet			
$G_3 - m d_4$	11782,93	17187,59	19684,44	21038,68			
λ ber.	8483,01	5816,54					
λ beob.	(1) 8704,15	(4) 5918,89	(0) 5156,60	berechnet			
$G_4 - m d_4$	11485,62	16890,38	19387,25	20741,31			
λ ber.	8702,61	5918,94	5156,65				
λ beob.	(3) 8853,97	(4) 5987,88	(4) 5208,76	(2) 4865,49	berechnet		
$G_5 - m d_4$	11291,27	16695,77	19193,08	20547.17	21362,58		
λ ber.	8852,81	5987,82	5208,84	4865,52			
λ beob.	(0) 9226,80	(1) 6156,15	berechnet				
$G_6 - m d_4$	10835,02	16239,43	18736,55				
λ ber.	9225,00	6156,05					
λ beob.	(2) 9300,70	(3) 6189,08	berechnet				
$G_7 - m d_4$	10748,93	16153,16	18650,15				
λ ber.	9299,12	6188,98	5360,11 [1])				
λ beob.	ber. aus 13349	(3) 6258,77	(2) 5412,59	berechnet			
$G_8 - m d_4$	10568,85	15973,17	18470,32	19824,45			
λ ber.	9459,17	6258,70	5412,62				
$m d_4$ beob. Mittel	12322,72	6918,17	4421,18	3067,07			
$m d_4$ berechnet	12320,69	6918,13	4421,28	3067,04	2251,50	1722,71	

1) Beob. ist 5359,97 (3). Diese Linie gehört zu der Serie „S_2“ ($m = 4{,}5$). Die Linien können bei Watson nicht getrennt sein.

Serie D_5.

Serienkonstanten $d_5 = -0{,}020381$ und $\delta_5 = 5{,}0887 . 10^{-7}$; berechnet aus $G_3 - 4\,d_5 = 17177{,}17$ und $G_3 - 5\,d_5 = 19678{,}26$.

m	3	4	5	6	7	8	9
$G_1 - m d_5$							
λ beob.	(1) 8876,45						
$G_2 - m d_5$	11934,95						
λ ber.	8875,66						
λ beob.	(7) 8495,36	(5) 5820,07	(6) 5080,34	(5) 4752,73	(3) 4575,09	(1) 4486,84	(0) 4396,62
$G_3 - m d_5$	11767,90	17177,17	19678,26	21034,65	21851,38	22380,93	22743,56
λ ber.	8494,54	5820,07	5080,34	4752,67	4575,02	4486,77	4396,58
$G_4 - m d_5$							
λ beob.	(3) 8865,72	(4) 5991,58	(3) 5210,51	(1) 4866,42	(0) 4680,32		
$G_5 - m d_5$	11276,31	16685,46	19186,64	20543,25	21360,08		
λ ber.	8864,97	5991,56	5210,51	4866,42	4680,32		
$G_6 - m d_5$							
λ beob.	(0) 9814,00	(3) 6193,02	berechnet				
$G_7 - m d_5$	10733,59	16142,75	18643,97				
λ ber.	9813,13	6192,97					
$G_8 - m d_5$							
$m d_5$ beob. Mittel	12337,80	6928,62	4427,45	3070,95	2254,17	1724,79	1362,16
$m d_5$ ber.	12336,83	6928,55	4427,46	3070,81	2254,02	1724,44	1361,70

Serie D_{5a}.

Grenze 24272,90; Konstanten ermittelt aus 17343,29 und 19844,85. $d = -0{,}024278$; $\delta = 5{,}1850 . 10^{-7}$.

ν	11933,27	17343,29	19844,85	21201,53	22018,42	22548,32	22910,87
$m d_{5a}$ beob.	12339,63	6929,61	4428,05	3071,37	2254,48	1724,58	1362,03
$m d_{5a}$ ber.	12338,87	6929,61	4428,05	3071,24	2254,25	1724,60	1361,82
λ Luft beob.	(7) 8377,63	(7) 5764,55	(6) 5037,87	(5) 4715,50	(3) 4540,55	(2) 4433,89	(0) 4363,69
λ Luft ber.	8377,13	5764,55	5037,87	4715,47	4540,50	4433,89	4363,65

Serie D_6.

Konstanten der Serienformel: $d_6 = -0{,}032371$; $\delta_6 = 6{,}5835 \cdot 10^{-7}$

berechnet aus $G_1 - 4\,d_6 = 18717{,}72$ und $G_1 - 5\,d_6 = 21230{,}79$.

m	3	4	5	6	7	8	9
λ beob.	(8) 7535,79	(7) 5841,05	(5) 4708,82	(2) 4424,79	(1) 4262,76	(0) 4175,24	
$G_1 - m\,d_6$	13266,36	18717,72	21230,79	22593,61	23413,94	23944,01	
λ ber.	7527,63	5841,05	4708,82	4424,90	4269,96	4175,21	
$G_2 - m\,d_6$							
λ beob.	(1) 8544,66	(2) 5828,86	ber. aus 21230				
$G_3 - m\,d_6$	11699,99	17151,28	19664,36				
λ ber.	8534,24	5828,86					
$G_4 - m\,d_6$							
λ beob.	(1) 8919,43	(3) 6000,98	(1) 5214,27	(0) 4868,17			
$G_5 - m\,d_6$	11208,41	16659,48	19172,81	20535,86			
λ ber.	8908,21	6000,87	5214,29	4868,38			
$G_6 - m\,d_6$							
λ beob.	ber. aus 13266	(1) 6202,87	ber. aus 21230				
$G_7 - m\,d_6$	10665,64	16117,13	18630,07				
λ ber.	9373,34	6202,92					
λ beob.	ber. aus 13266	(3) 6278,02	(2) 5418,49	berechnet			
$G_8 - m\,d_6$	10485,70	15936,86	18450,22	19812,37			
λ ber.	9534,18	6272,94	5418,51				
$m\,d_6$ beob. Mittel	12405,73	6954,46	4441,30	3078,38	2258,21	1728,14	
$m\,d_6$ ber.	12391,44	6954,43	4441,36	3079 12	2259,27	1728,00	

Serie D_7.

Serienkonstanten: $d_7 = -0{,}036972$; $\delta_7 = 1{,}00699 \cdot 10^{-6}$;
berechnet aus $G_1 - 4\,d_7 = 18710{,}12$ und $G_1 - 5\,d_7 = 21225{,}34$.

m	3	4	5	6	7	8	9
1 beob.	(8) 7514,06	(7) 5343,21	(6) 4710,08	(2) 4425,40	(0) 4270,25	(0) 4175,24	
$G_1 - m d_7$	13251,81	18710,12	21225,34	22590,50	23411,25	23944,01	
1 ber.	7528,99	5343,21	4710,08	4425,62	4270,41	4175,52	
$G_2 - m d_7$							
$G_3 - m d_7$							
1 beob.	(1) 8778,78	(2) 5934,48	berechnet	(1) 4823,17			
$G_4 - m d_7$	11387,98	16846,16	19361,54	20726,45			
1 ber.	8758,53	5934,37		4823,37			
$G_5 - m d_7$							
1 beob.	(0) 9310,65	(1) 6172,80	berechnet				
$G_6 - m d_7$	10737,44	16195,62	18711,02				
1 ber.	9287,72	6172,78					
$G_7 - m d_7$							
1 beob.	ber. aus 13251	(3) 6276,09	(0) 5420,08				
$G_8 - m d_7$	10471,15	15929,25	18444,81				
1 ber.	9547,42	6276,00	5420,11				
$m d_7$ beob. Mittel	12420,26	6962,16	4446,75	3081,65	2260,90	1728,14	
$m d_7$ berechnet	12393,76	6962,03	4446,81	3082,76	2261,75	1729,73	

Die Trennung der Linie $G_6 - m d_2$ $\lambda_{ber.} = 5330{,}63$ von der starken Linie 5330,71 gelang ebenfalls nicht.

In Serie D_2 ist die Linie $G_6 - 7 d_2$ $\lambda = 4780{,}27$ vielleicht nicht eingereiht. Denn dann müßte Watson auch die Linie $\nu = 20100{,}85$ führen. Die gleiche Bemerkung ist in Serie D_3 für die Linie $G_5 - 6 d_3$ ($\lambda = 4864{,}34$) zu machen.

Serie D_4. Die Glieder $G_1 - 7 d_3$ und $G_5 - 7 d_4$ müßten eigentlich da sein, da die Intensitäten der vorangehenden Linien noch genügend groß sind. Es berechnen sich:

$$G_1 - 7 d_4 = 23420{,}65; \quad G_1 - 8 d_4 = 23949{,}44;$$
$$G_5 - 7 d_4 = 21862{,}58.$$

Ob die beobachteten Schwingungszahlen (1) 23423,48; (0) 23948,60 und 21865,60 mit diesen identisch sind, ist fraglich, da diese Abweichungen zu groß sind.

Serie D_5. Über die schwachen Linien $G_2 - m d_5$ wurde schon oben gesprochen. Auffallend ist das Fehlen der weiteren Linien $G_7 - m d_5$, die nach der Intensität der Linie 6198,02 (Int. 3) zu schließen, vorhanden sein müßten.

Bei *Serie* D_6 sollte noch die Linie $G_4 - 5 d_7$ beobachtet sein.

Diese acht Seriengruppen, die offenbar in engem Zusammenhange stehen, bilden wohl die erste Nebenserie eines „Oktett"-Systemes. Falls sich aus besseren Messungen eindeutig beweisen ließe, daß diese Serien nach derselben Grenze streben, so wäre eine deutliche Analogie zwischen diesen Serien und den Dublett- und Triplettserien, die man bisher kennt, zu konstatieren:

Die erste Nebenserie eines Dublettsystems ist charakterisiert durch zwei Grenzen und zwei Terme (ein Satellit), die eines Triplettsystemes durch drei Grenzen und drei Terme (drei Satelliten), während man es hier mit acht Grenzen und acht Termen zu tun hätte. Von Wichtigkeit ist die Kenntnis, welche Grenz-Term-Kombirationen vorkommen können. Soweit eine Feststellung bei den unvollständigen Messungen möglich ist, treten die in folgendem Schema angedeuteten Linien auf.

	md_1	md_2	md_3	md_4	md_5	md_{5a}	md_6	md_7
G_1			stark	stark			stark	stark
G_2	stark	schwach		mittel	schwach	stark		
G_3	schwach	stark	mittel	mittel	stark		schwach	
G_4		mittel	mittel	schwach				schwach
G_5	mittel		schwach	mittel	mittel		mittel	
G_6		mittel	mittel	mittel				schwach
G_7	mittel	schwach		mittel	mittel		schwach	schwach
G_8				mittel			[mittel]	

Wie man aus dieser Zusammenstellung ersieht, weisen die Serien mit den Termen md_1 und md_2; md_5 und md_{5a} insofern einen ähnlichen Bau auf, als bei ihnen die Grenzen G_1 und G_8 nicht vorkommen. Ebenso gehören wohl die Serien D_3, D_4, D_6 und D_7 enger zusammen. Die gleiche Beobachtung kann man machen, wenn man die Serienkonstanten vergleicht, von denen hier noch eine Zusammenstellung folgen soll.

$$
\begin{aligned}
d_1 &= -0{,}009273, & \delta_1 &= 3{,}7556 \cdot 10^{-7},\\
d_2 &= -0{,}010191, & \delta_2 &= 4{,}6376 \cdot 10^{-7},\\
d_3 &= -0{,}014112, & \delta_3 &= 1{,}6526 \cdot 10^{-7},\\
d_4 &= -0{,}019567, & \delta_4 &= 3{,}1539 \cdot 10^{-7},\\
d_5 &= -0{,}020381, & \delta_5 &= 5{,}0887 \cdot 10^{-7},\\
d_{5a} &= -0{,}024278, & \delta_{5a} &= 5{,}1850 \cdot 10^{-7},\\
d_6 &= -0{,}032371, & \delta_6 &= 6{,}5835 \cdot 10^{-7},\\
d_7 &= -0{,}036972, & \delta_7 &= 10{,}0699 \cdot 10^{-7}.
\end{aligned}
$$

Der Wert von „δ“ weist in dieser Reihenfolge einen unregelmäßigen Gang auf, der verschwindet, wenn man die Anordnung in zwei Teile trennt: d_1, d_2, d_5, d_{5a} und d_3, d_4, d_6, d_7.

Nach der Feststellung dieser *ersten Nebenserie* ist die nächste Frage die nach der ihr entsprechenden *zweiten Nebenserie*, die also auch dieselben Grenzen G_1 bis G_8 haben müßte.

Es gelang nun, zwei solche Seriengruppen aufzufinden. Es sind die auf den folgenden zwei Tabellen geführten Serien S_1 und S_2.

Daß diese Serien nach denselben Grenzen konvergieren, wurde wiederum rechnerisch geprüft.

Serie S_1.
Serienkonstanten: $s_1 = 0{,}18529$; $\sigma_1 = -6{,}2129 \cdot 10^{-7}$;
berechnet aus $G_1 - 3{,}5\, s_1 = 17570{,}62$ und $G_1 - 4{,}5\, s_1 = 20666{,}88$

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
λ beob.	(8) 7032 41	berechnet:	(5) 5689,74	(5) 4837,31	(3) 4488,06	(1) 4306,32	(0) 4198,19
$G_1 - ms_1$	14215,20	10346,27	17570,62	20666,88	22275,09	23215,16	23813,10 ?
λ ber.	7079,70		5689,74	4837,31	4488,12	4306,08	4198,07
λ beob.	(10)		(5) 6182,07	(5) 5188,51	(4) 4788,89	(2) 4582,48	(0) 4459,86
$G_2 - ms_1$	15615,20		16171,34	19268,01	20875,82	21816,39	22415,95 ?
λ ber.			6182,06	5188,60	4788,96	4582,38	4460,14
λ beob.	(2)		(4) 6246 69	(4) 5233,97	berechnet:	(0) 4617 86	
$G_3 - ms_1$	15782,39		16004,05	19100,66	20708,66	21649,00	
λ ber.			6246 65	5234,02	20709 dopp.?	4617,77	
λ beob.	(6)		(2) 6965 02	(1) 5816,74			
$G_4 - ms_1$	16079,76		15706,53	18803,28			
λ ber.			6965,18	5816,79			
λ beob.	(10)		(4) 6444,67	(4) 5372,28	(2) 4944,87	(1) 4725,14	
$G_5 - ms_1$	16274,03		15512,41	18608,91	20217,38	21157,48	
λ ber.			6444,61	5372,32	4945,08	4725,04	
λ beob.	(6)		(1) 6640,00	berechnet:			
$G_6 - ms_1$	16730,28		15056,09	18152,66			
λ ber.			6639,91				
λ beob.	(9)		berechnet:	(1) 5533,51			
$G_7 - ms_1$	16816,67		14969,80	18066,26			
λ ber.			6678 dopp.?	5533,55			
λ beob.	(8)		(1) 6759 48	(1) 5589 18			
$G_8 - ms_1$	16996,62		14789,97	17886,75			
λ ber.			6759,48	5589,35			
ms_1 beob. Mittel	39888,11		8101,64	5005,05	3396,95	2456,73	
ms_1 ber.	39793,14	15325,88	8101,53	5005,27	3397,36	2456,30	1858,38

Serie S_2.

Konstanten $s_2 = +0{,}206969$; $\sigma_2 = -9{,}1117 \cdot 10^{-7}$;
aus $G_3 - 3{,}5\, s_2 = 16088{,}68$ und $G_3 - 4{,}5\, s_2 = 19143{,}41$ für $G_3 = 24105{,}72$.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
λ beob.	(6)	berechnet:	(4) 5656,59	(3) 4827,34	(0) 4483,26		
$G_1 - m s_2$	13798,51	10542,53	17655,15	20709,55	22298,93		
λ ber.			5656,60	4827,27	4483,17		
$G_2 - m s_2$							
λ beob.	(9) 6506,53		(5) 6213,83	(5) 5222,28	(3) 4821,88	(1) 4614,37	(0) 4491,80
$G_3 - m s_2$	15364,94		16088,68	19143,41	20732,99	21665,37	22256,55
λ ber.	6577,91		6213,68	5222,28	4821,88	4614,50	4491,61
λ beob.	(9)		(5) 6330,90	(3) 5304,73	(2) 4892,00		
$G_4 - m s_2$	15662,31		15791,17	18845,88	20435,86		
λ ber.			6330,83	5304,69	4892,07		
λ beob.	(6)		(3) 6409,72	(4) 5359,97	(2) 4938,94	(1) 4721,54	
$G_5 - m s_2$	15856,58		15597,00	18651,64	20241,64	21173,61	
λ ber.			6409,70	5359,93	4939,02	4721,65	
λ beob.	(1)		(3) 6602,87	(1) 5494,31			
$G_6 - m s_2$	16312,83		15140,76	18195,58			
λ ber.			6602,86	5494,83			
λ beob.	(10)		berechnet:				
$G_7 - m s_2$	16399,23		15054,35				
λ ber.			6640,76				
λ beob.	(6)		berechnet:	berechnet:			
$G_8 - m s_2$	16579,17		14874,41				
λ ber.			6721,11				
λ beob.	(8)		(1) 7724,62	berechnet:			
$G_9 - m s_2$	18511,45		12942,05	15996,90			
λ ber.			7724,55				
$m s_2$ beob. Mittel	39470,66		8017,09	4962,41	3372,72	2440,40	1849,17
$m s_2$ ber.	39303,89	15129,62	8017,04	4962,31	3372,76	2440,97	1848,20

1. An der Serie S_2:

Aus $\nu_1 = 16088{,}68$, $\nu_2 = 19143{,}41$ und $\nu_3 = 20732{,}99$ berechnet sich die Grenze (nach der Ritzschen Formel) zu 24105,84 ($+ 1566{,}43 = 25672{,}27$), während der entsprechende Wert der ersten Nebenserie 24105,72 ist.

2. An der Serie S_1:

Aus $\nu_1 = 17570{,}62$; $\nu_2 = 20666{,}88$; $\nu_3 = 22275{,}09$ ergibt sich 25673,65, während der entsprechende Wert der ersten Nebenserie 25672,15 war.

Diese Übereinstimmung ist eine so gute, daß man die Grenzen aus der ersten Nebenserie übernehmen kann. Die Serienkonstanten sind dann:

$$s_1 = + 0{,}185299, \qquad \sigma_1 = - 6{,}2129 \cdot 10^{-7},$$
$$s_2 = + 0{,}206969, \qquad \sigma_2 = - 9{,}1117 \cdot 10^{-7}.$$

Von den im Ultrarot verlaufenden berechneten Gliedern ($m = 2{,}5$) konnte leider bis jetzt nichts erhalten werden. Die Linien $G_1 - 2{,}5\,s$ sollen noch photographisch nachgewiesen und der Nachweis der weiter im Ultrarot liegenden, vermutlich starken Linien noch mit Bolometer oder Thermosäule demnächst versucht werden, da er wichtig genug erscheint.

Bei der Serie S_1 scheint alles in Ordnung zu sein. Die Abweichung des berechneten Wertes vom beobachteten spricht nicht gegen die Richtigkeit der Zuordnung des ersten Gliedes. Der identische Bau, entsprechende Intensitäten und umgekehrte Lagerung sind vielmehr Argumente dafür.

Anders ist es bei Serie S_2. Hier fällt insbesondere das Fehlen der höheren Glieder von $G_8 - m s_2$ auf, während die Glieder $G_6 - m s_2$ beobachtet sind, obgleich das Grundglied weniger stark ist. (Die Intensität der Linie 16312,83 ($\lambda = 6128{,}45$) ist allerdings etwas höher anzusetzen!)

Die Linie $G_7 - 3{,}5\,s_1$ müßte da sein; ihre Wellenlänge berechnet sich mit dem Mittelwerte $3{,}5\,s_1 = 8101{,}64$ zu ($\nu = 14969{,}79$) $\lambda = 6678{,}28$. Diese Linie liegt also in unmittelbarer Nähe der starken Linie 6678,275; ob die schwache Linie nach großen oder kleinen Wellenlängen liegt, läßt sich aber aus den Messungen Watsons nicht voraussagen. Mit dem Etalon ließ sich die schwächere Linie bis jetzt nicht auffinden.

Konsequenterweise müßte man annehmen, daß auch die zwei übrigen Gruppen der Tab. II Grundglieder von zwei zweiten Nebenserien sind, die nach derselben Grenze konvergieren wie S_1 und S_2. (Vgl. nachstehende Hauptserien!) Berechnungen, die in dieser Richtung angestellt wurden, führten zu keinem endgültigen Ergebnis.

Die *Hauptserien*, die den Serien S_1 und S_2 entsprechen, haben, wenn auch hier die Rydberg-Schustersche Regel gilt, die Grenzen $1{,}5\,s$, also:

$$1{,}5\,s_1 = 39888{,}11,$$
$$1{,}5\,s_2 = 39470{,}66$$

und, falls die beiden übrigen eben erwähnten Gruppen der Tabelle ebenfalls Grundglieder sind,

$$1{,}5\,s_3 = 39111{,}81,$$
$$1{,}5\,s_4 = 38041{,}28.$$

Verschiedene dieser Serien konnten bis jetzt ermittelt werden. In den folgenden Schemen sind Serien zusammengestellt, die die Grenze 39888,11 haben. Durch Kombination ihrer Terme mit den übrigen drei Grenzen (39470,55 usw.) ergeben sich die entsprechenden Glieder der Tab. Ia.

Leider sind die vorliegenden Messungen Watsons, wie die von Rossi, wohl unvollständig; denn trotz des starken Intensitätsabfalles, den man bei der Hauptserie oft beobachtet, müßten höhere Glieder noch beobachtet werden können. Experimente in dieser Richtung werden manches zur Sicherstellung dieser Serien beitragen. Mir selbst war es bisher unmöglich, Neon oder eine Quarzröhre mit Neon zu erhalten, um die höheren Glieder auffinden zu können.

Serie P_1.

Grenze 39888,11. Konstanten: $p_1 = 0{,}133357$. $\pi_1 = -2{,}8492 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
$\lambda_{\text{beob.}}$	(8) 7032,41	(4) 3510,72	(3) 2992,45	
$\nu_{\text{Vak.}}$	14215,96	28475,99	33407,61	
$mp_{\text{beob.}}$	25672,15	11412,12	6480,50	
$mp_{\text{ber.}}$	25866,33	„	„	
$\lambda_{\text{ber.}}$	7131,75	3510,72*	2992,45*	

Serie P_2.

Grenze 39888,11. $p_2 = 0{,}157767$. $\pi = -1{,}2144 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
λ beob.	(10) 6402,25	(6) 3472,53	(3) 2982,69	(1) 2795,96
ν Vak.	15615,20	28789,24	33516,89	35755,28
mp beob.	24272,90	11098,87	6371,22	4132,83
mp ber.	24341,54	11098,91	6371,22	4132,83
λ ber.	6430,52	3472,54	2982,69*	2795,96*

Serie P_3.

Grenze 39888,11. $p_3 = 0{,}168682$. $\pi_3 = -1{,}3299 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
λ beob.	(9) 6334,43	(4) 3464,31	(2) 2979,82	(0) 2794,62
ν Vak.	15782,39	28857,52	33548,15	3577 ,42
mp beob.	24105,72	11030,59	6339,96	4115,69
mp ber.	24034,28	11030,59	6339,96	4116,10
λ ber.	6305,01	3464,31*	2979,82*	2794,65

Serie P_4.

Grenze 39888,11. $p_4 = 0{,}185022$. $\pi = -1{,}3421 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	(5)
λ beob.	(8) 6217,28	(4) 3450,73	(1) 2975,53	
ν Vak.	16079,76	28971,06	33597,63	
mp beob.	23808,35	10917,05	6290,48	
mp ber.	23666,41	10917,05	6290,48	*4090,19*
λ ber.	6162,88	3450,73*	2975,53*	2792,63

Serie P_5.

Grenze 39888,11. $p_5 = 0{,}186896$. $\pi = -1{,}1761 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
λ beob.	(10) 6143,06	(5) 3447,69	(3) 2974,77	(1) 2792,29
ν Vak.	16274,03	28996,60	33606,44	35802,26
mp beob.	23614,08	10891,51	6281,67	4085,85
mp ber.	23536,07	10891,51	6281,67	4086,16
λ ber.	6113,76	3447,69*	2974,77*	2792,31

§ 18. Außer den in § 12 aufgeführten Seriengruppen wurden noch eine Reihe anderer aufgefunden, die zwar gleiche Schwingungsdifferenzen haben, aber nach anderen Grenzen konvergieren.

Die Ritzsche Formel stellt diese Serien nicht besonders gut dar; vielleicht ist das Zahlenmaterial hier ungenauer, da viele dieser Linien sehr nahe bei anderen liegen. Außerdem sind nicht viele Glieder beobachtet. Aus diesen Gründen ist eine genaue Angabe der Rechnungsresultate hier unterlassen worden und sind nur die zusammengehörigen Gruppen zusammengestellt.

Die Serien scheinen gemeinsame Grenzen zu haben. Für die Linien 1 berechnet sich aus den Gliedern mit der Seriennummer 4, 5, 6 (bzw. 3,5, 4,5, 5,5) die Grenze:

a) 26448,8, d) 26443,6,
b) 26449,4, e) 26447,5,
c) 26442,5, f) 26447,1.

Die Serien a—d haben den Charakter einer ersten, e und f den einer zweiten Nebenserie.

a) Grenze für die Linien 1. 26448,8.

m	3	4	5	6	7
1.					
2.					
3.					
4.	(7) 12287,03	(4) 17673,59	(3) 20167,88	(3) 21520,60	(0) 22337,08?
5.	(1) 12092,78				
6.	(6) 11636,53	(5) 17022,96	(4) 19517,34	(2) 20870,20	(1) 21686,42?
7.	(1) 11550,14				
8.		(1) 16756,40			

b) Grenze für die Linien 1. 26449,4.

m	3	4	5	6	7
1.					
2.	(2) 12753,25				
3.	(8) 12585,93	(4) 17971,97	(3) 20465,68	(1) 21818,44	
4.					
5.	(5) 12094,29	(5) 17480,35	(2) 19974,07	(1) 21326,87	
6.					
7.	(6) 11551,67	(5) 16937,50	(5) 19431,36	(3) 20784,06	(2) 21600,09
8.					

c) Grenze für die Linien 1. 26442,5.

m	3	4	5	6	7
1.	(4) 14162,17	(6) 19539,34	(4) 22031,14	(2) 23381,86	(0) 24200,95
2.	(2) 12762,79				
3.	(3) 12595,74				
4.	(3) 12298,34	(2) 17675,62			
5.	(4) 12104,10				
6.	(1) 11647,93	(4) 17025,13	(4) 19517,34		
7.	(2) 11561,49				
8.	(4) 11381,50	(3) 16758,64	(4) 19250,76	(2) 20601,65	(0) 21419,25

d) Grenze für die Linien 1. 26443,6.

m	3	4	5	6	7
1.	(4) 14177,85	(3) 19550,19	(3) 22038,23	(1) 23386,78	(0) 24200,95
2.					
3.	(4) 12611,50				
4.	(5) 12314,08	(2) 17686,47	(0) 20174,47		
5.	(1) 12119,64				
6.	(2) 11663,68	(3) 17035,80	(0) 19523,78		
7.	ber. 11577,28[1])	(1) 16949,47			
8.	(2) 11397,24	(2) 16769,29	(2) 19257,77		
9.		(2) 14837,26	(0) 17325,56		

e) Grenze der Linien 1. 26447,5.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
1.			(4) 18398,99	(4) 24469,87	(2) 23068,14
2.					
3.			(2) 16832,44	(0) 19903,33	(1) 21499,87
4.			(3) 16535,04		
5.			(4) 16340,70	(0) 19411,69	(1) 21008,45
6.			(5) 15884,33	(0) 18955,44	
7.			(6) 15797,96	(4) 18869,24	(4) 20465,68
8.			(6) 15618,17	(1) 18689,28	
9.			(3) 13685,89		

f) Grenze der Linien 1. 26447,1.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
1.			(2) 18348,83	(2) 21448,23	(0) 23054,70
2.					
3.					
4.			(3) 16484,87		(0) 21191,33
5.					
6.			(5) 15834,35	(1) 18933,84	
7.					
8.			(2) 15567,96		

1) Nicht beobachtet! Müßte nahe bei der Linie 8634,67 liegen.

Inwiefern diese Serien mit den früheren zusammenhängen, konnte bis jetzt nicht ermittelt werden.

Die Arbeit wurde ausgeführt mit Mitteln, die die Stiftung für wissenschaftliche Forschung an der Universität Zürich in zuvorkommender Weise dem Physikalischen Institut der Universität zur Verfügung gestellt hat. Auch mir ist es eine angenehme Pflicht, dem Kuratorium der Stiftung meinen innigsten Dank für diese Unterstützung auszusprechen.

Hrn. Prof. Edgar Meyer möchte ich auch an dieser Stelle herzlich für die Liebenswürdigkeit danken, mit der er allen meinen Wünschen entgegenkam.

Zürich, September 1918.
Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 26. September 1918.)

3. *Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades;* von *J. Sommer.*

Die Integration der linearen Differentialgleichung

$$a_0 \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi' + a_4 \varphi = \psi(t),$$

welche exakt die kleinen Schwingungen und in erster Annäherung jede Art einfach gekoppelter Schwingungen darstellt, erfordert die Auflösung ihrer charakteristischen oder determinierenden Gleichung

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Man will nun aber gerne die im allgemeinen umständliche, exakte Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung vermeiden, besonders wenn es sich zunächst bloß um die qualitative Beschreibung des Schwingungsvorganges handelt. Hierzu ist es ausreichend zu wissen, wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung hinsichtlich ihrer Realität und des Vorzeichens ihrer reellen Teile beschaffen sind, wozu man nur gewisse rationale Funktionen der Koeffizienten zu kennen braucht.

Die Frage nach der Gesamtzahl der reellen Wurzeln bzw. nach der Anzahl der reellen Wurzeln, welche innerhalb eines bestimmten Intervalles liegen, ist sogar für Gleichungen beliebigen Grades durch den Lehrsatz von J. K. Fr. Sturm in der Theorie vollständig lösbar und ist speziell für Gleichungen vierten Grades noch leicht zu beantworten. Nach Sturm hat Ch. Hermite neue Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage nach der Anzahl reeller Wurzeln angegeben, wobei er von den Eigenschaften quadratischer Formen mit n veränderlichen Gebrauch machte. Ausgehend von diesem gleichen Gedanken, hat ferner Hr. A. Hurwitz[1]) die

1) A. Hurwitz, Math. Annal. 46. p. 273 f. Leipzig 1895.

Bedingungen aufgestellt, unter welchen eine Gleichung $n$ten Grades nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Hr. Hurwitz löste die hiermit gestellte Aufgabe in elegantester Weise unter Verwendung des Cauchyschen Residuensatzes, also mit den Hilfsmitteln der höheren Analysis.

Wenn es danach auch nicht mehr schwer ist, alle Bedingungen aufzustellen, durch welche sich die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, nach Realität und des Vorzeichens ihres reellen Teiles, vollkommen charakterisieren lassen, so glaubte ich doch, dem Physiker und Techniker einen Dienst zu erweisen mit einer Zusammenstellung dieser Bedingungen und ihrer elementaren Ableitung. So ist aus solchem Wunsche, der mir persönlich schon oft entgegentrat, die nachfolgende Zusammenstellung entstanden.

Eine solche Zusammenstellung ist insbesondere dann notwendig, wenn es gilt, die Konstanten zu ermitteln, für welche zum voraus bestimmte Schwingungstypen sich ergeben, oder wenn, anders ausgedrückt, die Beschaffenheit der Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorgeschrieben ist.

In einem letzten Paragraphen habe ich dann die Anwendung dieser Bedingungen auf die Integration der verkürzten Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$a_0 \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi_3 + a_4 \varphi = 0$$

gemacht, indem ich in einigen Bildern die wichtigsten Kurventypen zeichnete, welche durch die Differentialgleichung dargestellt sind, oder indem ich wenigstens angab, wie diese Bilder leicht zu zeichnen sind.

§ 1. Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichung vierten Grades.

Im folgenden sollen stets a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 reelle, gegebene Zahlenkoeffizienten bezeichnen, und insbesonders soll a_0 durchgehends eine positive Größe bedeuten $a_0 > 0$, indem dies keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit ist.

Nun sei

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \tag{1}$$

und

$$f_1(x) \equiv f'(x) = 4 a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 2 a_2 x + a_3,$$

dann dividiere man $f(x)$ durch $f_1(x)$, nenne den Quotienten $q_1(x)$ und den Rest, nachdem man vorher darin die Vorzeichen sämtlicher Koeffizienten in das entgegengesetzte Vorzeichen umgewandelt hat, $f_2(x)$, so daß

$$f(x) = q_1(x) f_1(x) - f_2(x)$$

wird, und setze dieses Divisionsverfahren so lange fort

$$f_1(x) = q_2(x) f_2(x) - f_3(x)$$
$$f_2(x) = q_3(x) f_3(x) - f_4,$$

bis man auf einen von x unabhängigen konstanten Rest f_4 kommt; alsdann bilden die Funktionen

$$(2) \qquad f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4$$

eine Sturmsche Kette und der Satz von Sturm, auf dem unsere Entwicklungen aufgebaut sind, lautet folgendermaßen:

Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt so viele reelle Wurzeln in dem Intervall zwischen zwei reellen Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$, als der Überschuß der Anzahl der Zeichenwechsel in der Sturmschen Kette (2) für $x = x_1$ über die Anzahl der Zeichenwechsel dieser Kette für $x = x_2$ beträgt.

Das oben beschriebene Divisionsverfahren ist für die biquadratische Funktion $f(x)$ noch leicht ausführbar und liefert außer $f(x)$ und $f_1(x)$ noch die Funktionen der Kette (2):

$$(3) \quad \begin{cases} f_2(x) = \dfrac{-1}{16 a_0}\{(8 a_0 a_3 - 3 a_1^2) x^2 + (12 a_0 a_3 - 2 a_1 a_2) x \\ \qquad\qquad + (16 a_0 a_4 - a_1 a_3)\} \\ \qquad \equiv \dfrac{-1}{16 a_0}\{b_0 x^2 + b_1 x + b_2\}, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} f_3(x) = -\dfrac{16 a_0}{b_0^2}\{(-2 a_1^2 a_3^2 + 6 a_1^3 - 28 a_0 a_1 a_2 a_3 + 12 a_0 a_1^2 a_4 \\ \quad + 8 a_0 a_2^3 - 32 a_0^2 a_2 a_4 + 36 a_0^2 a_3^2) x + (-a_1^3 a_2 a_3 \\ \quad + 9 a_1^3 a_4 - 32 a_0 a_1 a_3 a_4 - 3 a_0 a_1 a_3^2 + 4 a_0 a_2^2 a_3 \\ \qquad\qquad + 48 a_0^2 a_3 a_4)\} \\ \quad \equiv -\dfrac{1}{b_0^2}\{c_0 x + c_1\} \equiv -\dfrac{1}{b_0^2}\{(b_0(2 a_2 b_0 - 3 a_1 b_1) \\ \quad - 4 a_0(b_0 b_2 - b_1^2)) x + b_0(a_3 b_0 - 3 a_1 b_2) + 4 a_0 b_1 b_2\}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} f_4 = \dfrac{16 a_0 b_0^2}{27 c_0^2}[4(a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_0 a_4)^3 - (27 a_1^2 a_4 \\ \qquad + 27 a_0 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_0 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3)^2] \\ \quad \equiv \dfrac{1}{16 a_0 c_0^2}[b_0 c_1^2 - b_1 c_0 c_1 + b_2 c_0^2]. \end{cases}$$

Die letzte Größe ist also eine Konstante, nämlich eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, und unterscheidet sich von der *Discriminante* D der Funktion $f(x)$ nur um einen konstanten, außerwesentlichen Faktor. Der Gleichförmigkeit halber will ich auch an Stelle und zu den vorübergehend eingeführten Bezeichnungen b_0, c_0 noch D_0 und D_1 schreiben, so daß hinfort gelten soll:

$$(3a) \quad D_1 = 8\,a_0\,a_2 - 3\,a_1^2,$$

$$(4a) \quad \begin{cases} D_2 = -2\,a_1^2\,a_2^2 + 6\,a_1^3\,a_3 - 28\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3 + 12\,a_0\,a_1^2\,a_4 \\ \qquad + 8\,a_0\,a_2^3 - 32\,a_0^2\,a_2\,a_4 + 36\,a_0^2\,a_3^2, \end{cases}$$

$$(5a) \quad \begin{cases} D_3 = 27\,D = 4(a_2^2 - 3a_1\,a_3 + 12\,a_0\,a_4)^3 - (27\,a_1^2\,a_4 \\ \qquad + 27\,a_0\,a_3^2 + 2\,a_2^3 - 72\,a_0\,a_2\,a_4 - 9\,a_1\,a_2\,a_3)^2. \end{cases}$$

Falls etwa schon $D_1 = 0$ ausfällt, so ist die oben angegebene Sturmsche Kette durch eine einfachere zu ersetzen, worauf wir unten zurückkommen. Zuerst sei $D_1 \neq 0$ vorausgesetzt.

Ist nun zunächst $D_3 = 0$, d. h. verschwindet die Diskriminante der Funktion $f(x)$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, mindestens aber eine Doppelwurzel, und diese mehrfachen Wurzeln lassen sich bequem bestimmen. Es ist nämlich jeder $m$fache Wurzelfaktor $(x - w)^m$ von $f(x)$ ein $(m-1)$facher Faktor von $f_1(x)$ und daher erhält man alle mehrfachen Wurzeln, indem man den größten gemeinsamen Teiler der Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ berechnet mit Hilfe des bereits beschriebenen Divisionsverfahrens. Dieser Teiler stimmt eben bis auf einen Zahlenfaktor mit einer der Funktionen in der Sturmschen Kette überein. Nach Absonderung dieses Teilers aus $f(x)$ sind dann die Wurzeln von $f(x) = 0$ ohne weiteres zu bestimmen, indem keine höheren Gleichungen als solche zweiten Grades aufzulösen sind.

Ist $D \neq 0$, so hat $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln, und wir können dann den Satz von Sturm anwenden auf ein Intervall, in dem die sämtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Da nun für hinreichend große absolute Beträge von x die Vorzeichen der Funktionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ mit den Vorzeichen der Glieder ihrer höchsten Potenzen übereinstimmen, so setze man in verständlicher, abgekürzter Redeweise in der Sturmschen Kette die Werte $x_2 = +\infty$ und $x_1 = -\infty$, dann folgt, daß die Gleichung

$f(x) = 0$ so viele reelle verschiedene Wurzeln besitzt als der Überschuß der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der zweiten der nachstehenden Reihen über die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der ersten Reihe

(6) $\qquad + a_0, + a_0, - D_1, - D_2, D_3,$

(6a) $\qquad + a_0, - a_0, - D_1, + D_2, D_3$

beträgt, wo nun auch D statt D_3 gesetzt werden kann.

Die Größen D_1, D_2, D können positiv oder negativ sein, und je nach den verschiedenen Möglichkeiten erhält man für die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ folgende Fälle:

(I) $D < 0$: zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln;

(IIa) $D > 0$, $D_1 > 0$: alle Wurzeln imaginär;

(IIb) $D > 0$, $D_1 < 0$, $D_2 > 0$: alle Wurzeln imaginär;

(IIc) $D > 0$, $D_1 < 0$, $D_2 < 0$: alle vier Wurzeln reell.[1])

Es ist hier der Ausdruck imaginär in dem allgemeineren Sinne — rein imaginär und komplex umfassend — zu verstehen, und natürlich treten diese imaginären Wurzeln paarweise konjugiert auf.

Die angeführten Bedingungen in den vier Fällen sind von einander unabhängig; denn zu jedem Falle lassen sich unschwer Beispiele konstruieren. Ferner folgt aus dem Sturmschen Satz u. a., daß nicht gleichzeitig $D < 0$, $D_1 > 0$, $D_2 < 0$ sein kann.

Ganz leicht erledigt sich der Ausnahmefall, in dem $D_1 = 0$ ausfällt. Dann wird die Sturmsche Kette aus den Funktionen gebildet:

$$f(x);\ f_1(x);\ f_2(x) = -\frac{1}{16 a_0}\{b_1 x + b_2\};\ f_3 = \frac{64 a_0}{b_1^2} D,$$

und für die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ hat man:

(I′) $\qquad D < 0$: zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln,

(II′) $\qquad D > 0$: alle Wurzeln imaginär.

---

1) Man vgl. z. B. H. Weber, Lehrbuch der Algebra. 1. 2. Aufl. p. 276 u. 297, Braunschweig 1898, wo die Bedingungen für den Fall $a_1 = 0$ angegeben sind.

Es fällt auf, daß die Gleichung $f(x) = 0$ stets imaginäre Wurzeln besitzen muß, wenn $D_1 = 0$ ist. Das ist auch verständlich, wenn man D_1 durch die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 dieser Gleichung ausdrückt:

$$D_1 = -a_0^2\{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2\}.$$

Hiernach kann dieser Ausdruck nicht verschwinden, wenn alle Wurzeln reell sind, mit Ausnahme des hier ausgeschiedenen Falles, in dem $D_2 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ist.

Falls endlich $D_2 = 0$ wird, $D_1 \neq 0$, so ist mit $D_1 > 0$ auch $D > 0$ und mit $D_1 < 0$ zugleich $D < 0$, so daß man für $D > 0$ wieder lauter imaginäre Wurzeln und für $D < 0$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln erhält.

§ 2. Die Vorzeichenbestimmung der Wurzeln.

Nach der Aufstellung der Bedingungen für die Realität der Wurzeln wollen wir nun diejenigen weiteren Bedingungen ermitteln, unter welchen die reellen Teile der Wurzeln entweder positiv oder negativ sind.

Hat $f(x) = 0$ zunächst rein imaginäre, von Null verschiedene Wurzeln $x = i\,w$, so ist

$$f(iw) = a_0\,w^4 - a_2\,w^2 + a_4 - i\,(a_1\,w^3 - a_3\,w) = 0,$$

weshalb gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0\,w^4 - a_2\,w^2 + a_4 &= 0 \\ a_1\,w^2 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

für ein reelles w erfüllt sein müssen, Das ist nur möglich, wenn

$$\Delta = a_1\,a_2\,a_3 - a_1^2\,a_4 - a_0\,a_3^2 = 0$$

wird. Diese Bedingung ist notwendig und ist durch einige naheliegende weitere Bedingungen über a_1, a_3 und a_0, a_2, a_4 zu einer hinreichenden Bedingung zu ergänzen. Wir können diesen Fall als erledigt ansehen.

Die weitere Diskussion ist besonders einfach, wenn alle Wurzeln reell sind, indem dann allein schon die Descartessche Zeichenregel eine Entscheidung über die Anzahl positiver und negativer Wurzeln liefert. Diese Regel lautet:

Vermindert man die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der aufeinanderfolgenden Koeffizienten der Funktion $f(x)$

— bzw. $f(-x)$ — um die Anzahl der reellen positiven — bzw. negativen — Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so ist die Differenz Null, oder eine gerade ganze Zahl.

Um aber im Falle komplexer Wurzeln auch das Vorzeichen der reellen Teile bestimmen zu können, brauchen wir außerdem noch eine Funktion der Wurzeln von $f(x) = 0$, in welcher diese reellen Teile selbständig auftreten. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die vier Wurzeln, so leistet dies die symmetrische Funktion:

$$(1)\quad \Pi = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4),$$

welche sich rational und ganz durch die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ ausdrücken läßt, indem die Umrechnung ergibt:

$$(2)\quad \Pi = \frac{1}{a_0^3}(a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) = \frac{\Delta}{a_0^3}.$$

Da $a_0 > 0$ vorausgesetzt ist, so hat Π immer gleiches Vorzeichen mit ihrem wesentlichen Faktor

$$(3)\quad \Delta = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2.$$

Wenn $f(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln, etwa x_1 und x_2, und ferner zwei komplexe Wurzeln hat, welche mit

$$x_3, x_4 = \varrho \pm i\sigma$$

bezeichnet werden mögen, so ist das Teilprodukt aus Π

$$(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4) = [(x_1+\varrho)^2+\sigma^2]$$
$$[(x_2+\varrho)^2+\sigma^2] = k^2 > 0$$

reell und positiv, ferner

$$x_3 + x_4 = 2\varrho \quad \text{und} \quad x_1 + x_2$$

reell, also

$$(4)\quad \Pi = 2k^2(x_1+x_2)\varrho.$$

Neben diesem Ausdrucke, dessen Vorzeichen nur von dem von $x_1 + x_2$ und ϱ abhängt, hat man dann noch zur Verfügung:

$$(5)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1+x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$(6)\quad x_1 x_2 x_3 x_4 = (x_1 x_2)(\varrho^2+\sigma^2) = \frac{a_4}{a_0},$$

wonach, wegen $\varrho^2 + \sigma^2 > 0$, das Vorzeichen des Produktes in der letzten Gleichung nur von x_1 und x_2 abhängt.

Diese Beziehungen gestatten in mehreren Fällen schon die eindeutige Bestimmung der Vorzeichen von x_1, x_2, ϱ, oder liefern umgekehrt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für bestimmte Vorzeichen. Sind aber die Produkte $x_1 x_2$ und $(x_1 + x_2)\varrho$ zugleich negativ, so würde aus

$$(x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0}$$

das Vorzeichen von ϱ noch nicht bestimmt sein; dann haben aber wieder

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

und ϱ gleiches Vorzeichen und man gelangt zu einer Entscheidung über das Vorzeichen von ϱ, indem man zu der Gleichung für die reziproken Wurzeln übergeht. In der Tat, setzt man $x = \frac{1}{\xi}$, so hat die Gleichung:

$$F(\xi) = \xi^4 f\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_4 \xi^4 + a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0 = 0$$

die Wurzeln:

$$\xi_1 = \frac{1}{x_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{x_2}, \quad \xi_3, \xi_4 = \frac{\varrho \mp i\sigma}{\varrho^2 + \sigma^2}$$

und es wird:

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + \frac{2\varrho}{\varrho^2 + \sigma^2} = -\frac{a_3}{a_4}, \tag{7}$$

welche Gleichung an Stelle der Gleichung

$$(x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0}$$

tritt.

Natürlich könnte diese Gleichung auch in den anderen Fällen benutzt werden, oder wenigstens zur Aufstellung von Bedingungen führen, welche Folgerungen aus den übrigen sind und diese teilweise ersetzen könnten.

Sind endlich alle Wurzeln von $f(x) = 0$ komplex,

$$x_1, x_2 = \varrho_1 \pm i\sigma_1, \quad x_3, x_4 = \varrho_2 \pm i\sigma_2,$$

dann wird wieder:

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_2 + x_3)(x_1 + x_4) = [(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2]$$
$$[(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] = \varkappa^2$$

reell und positiv und:

$$\Pi = 4\,\varkappa^2 \cdot \varrho_1\,\varrho_2 . \tag{8}$$

Danach lassen sich die Vorzeichen der reellen Teile ϱ_1, ϱ_2 aus dem Vorzeichen von Π oder Δ sowie aus der Beziehung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\,\varrho_1 + 2\,\varrho_2 \tag{9}$$

bestimmen.

Die Ergebnisse der eingehenden Diskussion fassen wir in drei Tabellen zusammen.

I. $a_0 > 0$, $D < 0$: zwei reelle und ein Paar komplexer Wurzeln.

Anzahl der reellen Wurzeln		Komplexe Wurzeln		Δ	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
positive	negative	Reellteil positiv	Reellteil negativ		
0	2	0	1	> 0	$a_1 > 0$, $a_4 > 0$ [$a_3 > 0$]
2	0	1	0	> 0	$a_1 < 0$, $a_4 > 0$ [$a_3 < 0$]
2	0	0	1	< 0	$a_4 > 0$ [1]
0	2	1	0		
1	1	0	1	> 0	$a_1 > 0$, $a_4 < 0$
				< 0	$a_4 < 0$, $a_3 < 0$
1	1	1	0	> 0	$a_1 < 0$, $a_4 < 0$
				< 0	$a_4 < 0$, $a_3 > 0$

Die wenigen eingeklammerten Bedingungen sind Folgen der übrigen.

IIa. $a_0 > 0$, $D > 0$, $D_1 > 0$ } zwei Paare kom-
IIb. $a_0 > 0$, $D > 0$, $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ } plexer Wurzeln.

Komplexe Wurzeln		Δ	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
Reellteil pos.	Reellteil neg.		
1	1	< 0	keine
0	2	> 0	$a_1 > 0$ [$a_4 > 0$, $a_3 > 0$]
2	0	> 0	$a_1 < 0$ [$a_4 > 0$, $a_3 < 0$]

1) Die weitere Scheidung dieser Fälle, entweder an der speziellen Gleichung oder, etwas umständlicher, allgemein auf Grund des Sturmschen Satzes, kann hier übergangen werden.

IIc. $a_0 > 0$, $D > 0$, $D_1 < 0$, $D_2 < 0$: alle Wurzeln reell.

Anzahl der Wurzeln positive	Anzahl der Wurzeln negative	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
4	0	$a_1 < 0,\ a_2 > 0,\ a_3 < 0,\ a_4 > 0\ [\Delta > 0]$
0	4	$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0\ [\Delta > 0]$
2	2	entweder $a_1 a_3 < 0,\ a_2 > 0,\ a_4 > 0$ oder $a_2 < 0,\ a_4 > 0$
3	1	entweder $a_1 < 0,\ a_3 a_3 < 0,\ a_4 < 0$ oder $a_1 a_2 < 0,\ a_3 > 0,\ a_4 < 0$
1	3	entweder $a_1 > 0,\ a_2 a_3 > 0,\ a_4 < 0$ oder $a_1 a_2 > 0,\ a_3 < 0,\ a_4 < 0$

Natürlich ist es möglich, hieraus die Bedingungen auch nach anderen Gesichtspunkten geordnet zusammenzufassen. Frägt man z. B. nach den Bedingungen, unter welchen die Gleichung vierten Grades nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, so erhält man als gemeinsamen Bestandteil der Fälle mit reellen und komplexen Wurzeln, in denen jene Forderung erfüllt ist, die Bedingungen:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta > 0,$$

oder weil $\Delta = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4$ bei positivem a_3 und a_4 nur dann auch positiv ausfällt, wenn $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, so erhält man die von Hrn. Hurwitz[1]) als notwendig und hinreichend aufgestellten Bedingungen:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad a_4 > 0.$$

Wie man sieht, gründet sich die Diskussion wesentlich auf die Werte der Größen D_1, D_2, D und Δ. Die Berechnung dieser Größen ist aber nicht mühsam und braucht nur so weit geführt zu werden, als die Ermittlung der Vorzeichen es erfordert.

Die Ausdehnung der elementaren Methoden auf Gleichungen höheren Grades und die Anwendung des Sturmschen Satzes nach unserer Fassung wäre dagegen mit großen praktischen Schwierigkeiten verknüpft, da die Rechnungen zu umfangreich werden.

1) A. Hurwitz, l. c. p. 275.

§ 8. Das Integral der Schwingungsgleichung.

Indem wir nun zu der geometrischen Darstellung des reellen allgemeinen Integrals der verkürzten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung übergehen, wollen wir wie üblich

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{usw.}$$

setzen und die Differentialgleichung schreiben:

$$(1) \qquad a_0 y'''' + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0 .$$

Macht man dann für das Integral den Ansatz $y = e^{rx}$, dann lautet die charakteristische Gleichung:

$$(2) \qquad a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0 ,$$

mit den Wurzeln r_1, r_2, r_3, r_4, so daß das allgemeine Integral jetzt die Form hat:

$$(3) \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x} .$$

Physikalisch sind die Fälle ausgezeichnet, wo x, y gleichzeitig reelle stetige Veränderliche sind, in denen also die Gleichung (3) reelle ebene Kurven darstellt. Von der unendlichen Mannigfaltigkeit dieser Kurven kann man sich eine Vorstellung verschaffen, indem man zur Vereinfachung alle Typen zu einer Klasse vereinigt, welche durch Spiegelung an der x- oder y-Achse ineinander übergehen.

Die Gleichung (3) läßt sich auch für komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung und passende Werte der Konstanten C in reeller Form darstellen, da man

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

setzen kann. Schreibt man die Wurzeln der Gleichung (2) r_1, r_2, r_3, r_4, wenn alle vier reell sind, ferner

$$r_1, r_2, r_3 \,|\, r_4 = \varkappa + i\lambda ,$$

wenn zwei paarweise komplex sind, endlich $r_1, r_2 = \varkappa' + i\lambda'$, $r_3, r_4 = \varkappa'' + i\lambda''$, wenn alle Wurzeln komplex sind, so treten an die Stelle der alle Fälle umfassenden Gleichung (3) die folgenden Gleichungen in reeller Form:

$$(3') \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x} ,$$

$$(4) \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C e^{\varkappa x} \sin(\lambda x + \varphi) ,$$

$$(5) \qquad y = C_1 e^{\varkappa' x} \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 e^{\varkappa'' x} \sin(\lambda'' x + \varphi'') ,$$

worin C_1, C_2, C_3, C_4, C, φ, φ', φ'' reelle Integrationskonstante bedeuten.

Für die graphische Darstellung ist es praktisch, y als Summe von Aggregaten der Formen

$$y_1 = c' e^{r' x} + c'' e^{r'' x} \tag{6}$$

oder

$$y_2 = c e^{\alpha x} \sin(\lambda x + \varphi) \tag{7}$$

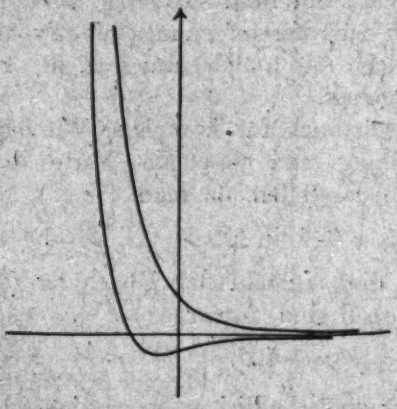
aufzufassen, damit sich y als Summe von nur noch zwei Kurven mit den Gleichungen (6) bzw. (7) ergibt.

Es entspricht dies der Auffassung, daß y als Lösung einer Differentialgleichung für die *erzwungene* Schwingung

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = F(x)$$

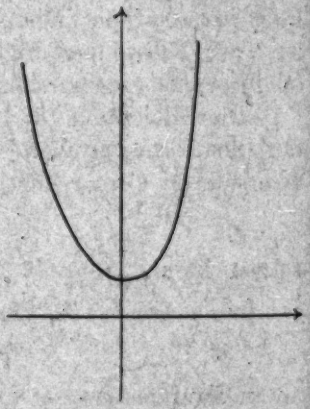
angesehen werden kann, worin $F(x)$ die spezielle Form besitzt: $c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x}$, mit reellen oder komplexen Werten w_1, w_2. Diese Auffassung hat auch einen naheliegenden physikalischen Sinn.

Die Gleichung $y_1 = c' e^{r' x} + c'' e^{r'' x}$ liefert nur drei, wesentlich verschiedene, reelle Kurventypen. Entweder erinnert die



$r' < 0 \quad r'' < 0 \quad c_1 > 0$

Fig. 1.



$r' > 0 \quad r'' < 0 \quad c_1 > 0 \quad c_2 > 0$

Fig. 2.

durch diese Gleichung dargestellte Kurve an die einfache Exponentiallinie, eventuell mit einer in ihrem Zuge eingelegten einfachen Schwingung (vgl. Fig. 1), oder an die Kettenlinie (vgl. Fig. 2), oder endlich an die Tangenslinie (vgl. Fig. 3).

Die mit den Werten und Vorzeichen von c' und c'' veränderliche Orientierung und Lage dieser Kurven im Koordinatensystem kann für ihre Form außer acht gelassen werden.

Ferner liefert die zweite Gleichung $y_2 = c \cdot e^{\varkappa x} \sin(\lambda x + \varphi)$ als reelle Kurven: a) für $\varkappa = 0$ die Sinuslinie, b) für $\varkappa < 0$ das Bild der gedämpften Schwingung, wie es Fig. 4 zeigt, und c) für $\varkappa > 0$ eine Kurve, welche aus Fig. 4 durch eine Spiegelung an der y-Achse abgeleitet werden kann. Diese Figg. 1—4 stellen zugleich schematisch die reellen Lösungen der einfachen Schwingungsgleichung von der Form

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = 0$$

dar. Aus ihnen setzen sich die reellen Lösungen der allgemeinen linearen Differentialgleichung (1) durch Summation zusammen.

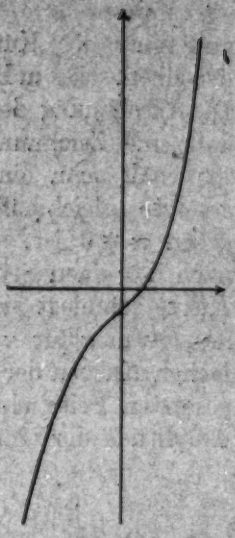


Fig. 3.

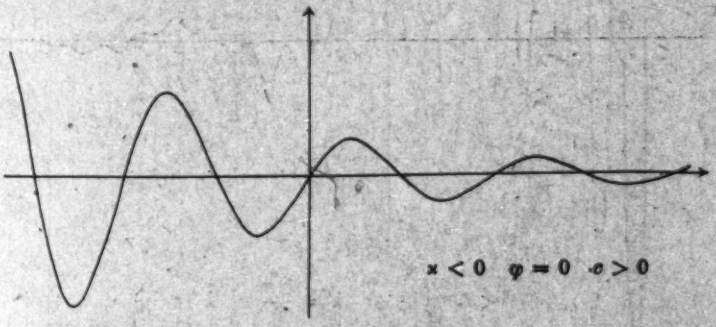


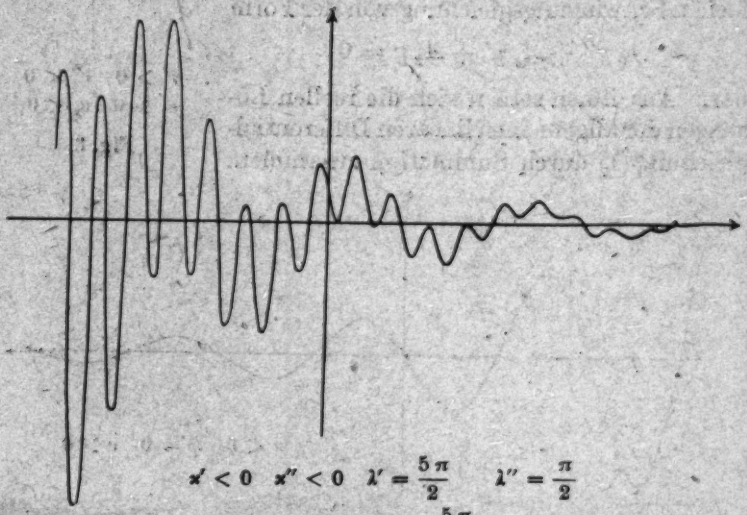
Fig. 4.

Erfüllen die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen I des vorhergehenden Paragraphen, so ist die Lösung der Gleichung (1) durch

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C e^{\varkappa x} \sin(\lambda x + \varphi) \tag{4}$$

dargestellt, und es ist nun leicht, sich ein schematisches Bild von den reellen, durch die letzte Gleichung gelieferten Kurventypen zu verschaffen.

Man erhält diese Typen durch Addition der Kurve Fig. 4 und einer der Kurven Fig. 1—3 — bzw. dem Spiegelbilde derselben, sei es in Bezug auf die x-Achse oder auf die y-Achse —. Die Anschauung der hiernach möglichen Typen ist so einfach, daß eine Zeichnung überflüssig erscheint. Wenn $\varkappa = 0$ ist, so erhält man eine, den einfachen Kurven Figg. 1—3 aufgesetzte gleichmäßig fortlaufende Schwingung. Wenn dagegen $\varkappa \neq 0$ ist, so werden die aufgesetzten Schwingungen nach der einen Seite hin immer kleiner, und die resultierende Kurve schmiegt sich bei hinreichend großem, positivem oder negativem x für $\varkappa < 0$ bzw. $\varkappa > 0$ immer enger an jene einfachen Kurven der Figg. 1—3 an, während nach der entgegengesetzten Seite eine Schwingung mit unbegrenzt wachsender Amplitude der einfachen Kurve aufgesetzt ist.



$\varkappa' < 0 \quad \varkappa'' < 0 \quad \lambda' = \frac{5\pi}{2} \quad \lambda'' = \frac{\pi}{2}$

$C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad \varphi' = -\frac{5\pi}{4} \quad \varphi'' = 0$

Fig. 5.

Erfüllen nun zweitens die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen IIa und IIb in § 2, so ist die allgemeine Lösung der Gleichung (1) von der Form

$$(5) \qquad y = C_1 e^{\varkappa' x} \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 e^{\varkappa'' x} \sin(\lambda'' x + \varphi'')$$

und die reellen, in dieser Gleichung enthaltenen Kurven sind schematisch durch die Figg. 5 und 6 dargestellt.

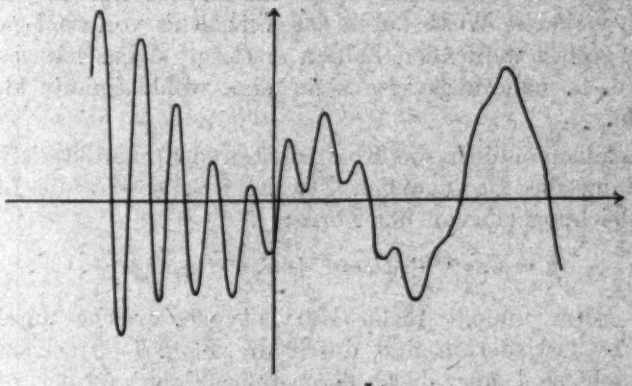
Fig. 5 entspricht der speziellen Gleichung:

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin\frac{5\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + e^{-\frac{x}{5}} \sin\frac{\pi}{2}x$$

und zeigt den Fall, in dem $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gleiches Vorzeichen besitzen, indem der Fall positiver $\varkappa$ aus der Zeichnung durch eine Spiegelung an der y-Achse hervorgeht. Man hat offenbar zwei sich aufeinander lagernde gedämpfte Schwingungen, so daß im ganzen der etwas verzerrte Verlauf einer gedämpften Schwingung mit ab- oder zunehmender Amplitude herauskommt, die aus einer kürzeren in eine längere Schwingungsperiode übergeht.

Die nächste Kurve, Fig. 6, stellt die Gleichung dar:

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin\frac{5\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + e^{\frac{x}{5}} \sin\frac{\pi}{2}x$$



$$\varkappa' < 0 \quad \varkappa'' > 0 \quad \lambda' = \frac{5\pi}{2} \quad \lambda'' = \frac{\pi}{2}$$

$$C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad \varphi' = -\frac{5\pi}{4} \quad \varphi'' = 0$$

Fig. 6.

und erläutert den Fall mit entgegengesetzten Vorzeichen der Dämpfungskonstanten $\varkappa'$ und $\varkappa''$. Die Kurve nähert sich mit wachsendem x immer mehr der Kurve

$$y = e^{\frac{x}{5}} \sin\frac{\pi}{2}x,$$

d. h. einer Sinuslinie mit ständig wachsender Amplitude und mit abnehmendem, negativem x der Kurve

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin\frac{5\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

die ebenfalls eine Sinuslinie mit wachsender Amplitude ist. Man hat somit einen Übergang von einer abnehmenden Schwingung mit bestimmter Periode zu einer zunehmenden Schwingung mit anderer Periode.

Zwischen diesen beiden letzten Fällen liegt die Annahme $\varkappa' = \varkappa'' = 0$, die man sich als Übergang der Kurven in Figg. 5 und 6 leicht vorstellen kann. Es mag nur noch bemerkt werden, daß die Funktion $y = C_1 \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 \sin(\lambda'' x + \varphi'')$ im allgemeinen keine reelle Periode hat, nach der sie sich exakt wiederholt, sondern nur dann, wenn λ' und λ'' im Verhältnis zweier ganzer Zahlen zueinander stehen. Ist dann etwa $\lambda' : \lambda'' = g_1 : g_2$, oder $\lambda' = g_1 \lambda$ und $\lambda'' = g_2 \lambda$, so nimmt y wieder denselben Wert an, wenn x um $2\pi/\lambda$ oder ein beliebiges Vielfaches davon wächst. Bekanntlich kann man aber näherungsweise das Verhältnis zweier irrationaler Zahlen auf unendlich vielfache Weise durch das Verhältnis von zwei ganzen, immer größer werdenden Zahlen ersetzen; daher hat y praktisch, d. h. näherungsweise stets eine wohldefinierte kleinste Periode.

Erfüllen endlich die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen IIc in § 2, so ist die Lösung der Gleichung (1) von der Form:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x}. \tag{3'}$$

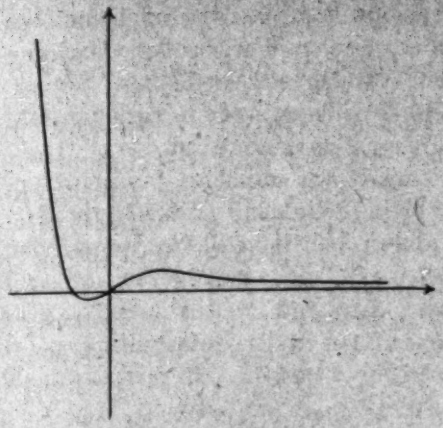
Diese Form umfaßt reelle Kurventypen, welche durch die Figg. 1—3 wiederum und durch die Figg. 7—9 schematisch dargestellt sind, oder durch deren Spiegelbilder an der y-Achse bzw. x-Achse. Die Figg. 7—9 entsprechen speziell den Gleichungen:

$$y = e^{-2x} + e^{-\frac{2}{5}x} - e^{-\frac{6}{5}x} - e^{-\frac{8}{5}x},$$

$$10\,y = -3\,e^{-3x} + 23{,}22\,e^{-x} - 21{,}25\,e^{2x} + e^{5x}.$$

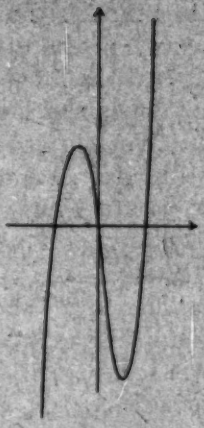
$$10\,y = e^{-3x} - 23{,}22\,e^{-x} - 10{,}62\,e^{2x} + \tfrac{1}{5}\,e^{5x}.$$

Immer hat man es bei diesen Kurven mit einem aperiodischen Verlaufe zu tun, in den sich eine Schwingung einschieben kann. Indem man das Verhalten der Exponentialfunktion e^{rx} für unendliche x berücksichtigt, ist es sehr leicht, festzustellen, wie die Kurve ins Unendliche geht. Man schließt hiernach u. a.,



$r_1 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 < 0 \quad r_4 < 0$
$r_1 < r_4 < r_3 < r_2$
$C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad C_3 < 0 \quad C_4 < 0$

Fig. 7.



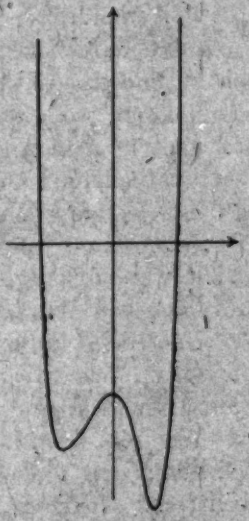
$r_1 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 > 0 \quad r_4 > 0$
$C_1 < 0 \quad C_2 > 0 \quad C_3 < 0 \quad C_4 > 0$
$r_1 < r_2 < r_3 < r_4$

Fig. 8.

daß die x-Achse Asymptote der Kurve sein kann für $x \to +\infty$, *oder* für $x \to -\infty$, aber nicht so, daß die Kurve in beiden Richtungen der Achse ins Unendliche geht. Besonders ist es aber für die Zeichnung der Kurve nützlich, zu wissen, wie viele und welche Extremwerte mit horizontaler Tangente die Kurve besitzt und wie oft sie die x-Achse schneidet. Dies verlangt immer die Bestimmung der endlichen reellen Wurzeln einer transzendenten Gleichung von der Gestalt:

$$F(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} + c_4 e^{r_4 x} = 0,$$

mit reellen Koeffizienten c_i. Setzt man $u = e^x$, so ist u eine positive reelle Zahl und man hat also nur die von Null verschiedenen positiven reellen Wurzeln der Gleichung



$r_1 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 > 0 \quad r_4 > 0$
$C_1 < 0 \quad C_2 < 0 \quad C_3 < 0 \quad C_4 > 0$
$r_1 < r_2 < r_3 < r_4$

Fig. 9.

$$f(u) = c_1 u^{r_1} + c_2 u^{r_2} + c_3 u^{r_3} + c_4 u^{r_4} = 0$$

zu bestimmen. Für eine schematische Zeichnung genügt es sogar, wenn man die *Anzahl* der reellen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ bzw. der positiven Wurzeln der Gleichung $f(u) = 0$ kennt, und man kann jedenfalls leicht einsehen, daß die Zahl dieser Wurzeln keinesfalls größer sein kann als 3.

Um das zu beweisen, können wir zunächst voraussetzen, daß die Gleichung $f(u) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt, indem man dies allenfalls durch beliebige kleine Variationen der Koeffizienten c_i erreichen kann, ohne daß hierbei die Zahl der Wurzeln geändert würde. Sind nun weiter zuerst einmal r_i vier rationale Zahlen, so kann man in der Gleichung $f(u) = 0$ eine neue Veränderliche $w = u^e$ substituieren, daß man eine neue Gleichung

$$c' w^{e_1} + c'' w^{e_2} + c''' w^{e_3} + c'''' = 0$$

erhält, in der $e_1 > e_2 > e_3 > 0$ ganze rationale Exponenten sind. Diese Gleichung weist offenbar nie mehr als drei Zeichenwechsel auf und hat daher höchstens drei positive Wurzeln, woraus dasselbe für die Gleichung $f(u) = 0$ folgt. Danach hat auch die Gleichung $F(x) = 0$ höchstens drei reelle endliche Wurzeln.

Sind aber unter den Größen r_1, r_2, r_3, r_4 einige oder alle irrational, dann kann man jede derselben r_i in eine rationale Zahl r_i' und eine so kleine Zahl zerleger, daß man $e^{r_i x} = e^{r_i' x} + \eta$ setzen kann, wo η so nahe an Null bleibt, als man will, und daß man in dem Ausdrucke $F(x) = \Sigma c_i e^{r_i' x} + \varepsilon$ die Größe ε ebenfalls beliebig nahe an Null halten kann. Da nun $\Sigma c_i e^{r_i' x}$ in der Umgebung einer Nullstelle sowohl positive als negative Werte annimmt, deren absoluter Betrag größer als $|\varepsilon|$ gemacht werden kann, so hat $F(x) = 0$ so viele und höchstens so viele reelle Wurzeln als $\Sigma c_i e^{r_i' x} = 0$, nämlich drei.

Umgekehrt kann man für gegebene Werte r_i die Koeffizienten c_i stets so bestimmen, daß $F(x)$ für drei beliebig gewählte reelle Werte von x verschwindet.

Wie die Gestalt der Integrale der linearen Differentialgleichung sich ändert, wenn die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln aufweist, ist hinlänglich bekannt. Da auch die Gestalten der reellen Kurven für diesen Fall zwar Modifikationen der von uns beschriebenen Bilder verlangen, aber nichts wesentlich Neues bringen, so erübrigt sich eine besondere Besprechung dieser Ausnahmefälle.

(Eingegangen 24. Oktober 1918.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

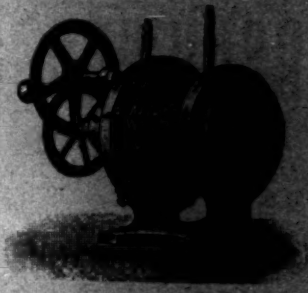
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1850.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.

System Gaede, D.R.P. angemeldet

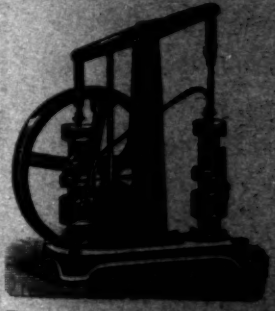


Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



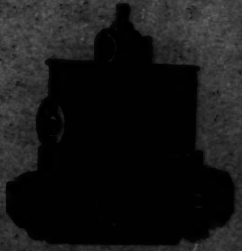
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

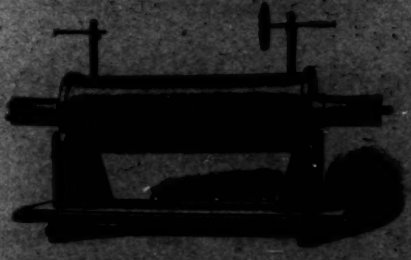
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. A. Becker. Über die Bestimmung von Elektronen-Austrittsgeschwindigkeiten 393
2. R. J. Humm. Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie 474
3. W. Jaeger und H. von Steinwehr. Über den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents 487

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren tunlichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919 № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. *Über die Bestimmung von Elektronen-Austrittsgeschwindigkeiten;* von *A. Becker.*

Inhalt: Einleitung. — Kapitel I. Theoretisches. A. Die Bewegungsgesetze. I. Homogenes Feld. II. Zentrales Feld. — B. Die Mengenverteilung. I. Äußere Geschwindigkeiten. a) Einheitliche Geschwindigkeit: α) Allseitig gleiche Ausstrahlung, β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz; b) nicht einheitliche Geschwindigkeit (allgemeiner Fall); c) Maxwellsche Verteilung der Lineargeschwindigkeiten; d) Maxwellsche Verteilung der Voltgeschwindigkeiten. II. Austrittsarbeit und innere Geschwindigkeiten. 1. Innere und äußere räumliche Verteilung: α) Allseitig gleiche Ausstrahlung, β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz. 2. Verteilungskurven im zentralen Feld: α) Allseitig gleiche innere Ausstrahlung, β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz. 3. Verteilungskurven im homogenen Feld: α) Allseitig gleiche innere Ausstrahlung, β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz. — Kapitel II. Praktische Folgerungen. — Kapitel III. Spezielle Anwendungen. A. Der lichtelektrische Effekt. B. Die Elektronenemission der Röntgenstrahlen. C. Die Elektronenemission von Kanalstrahlen.

Für das Verständnis des Mechanismus der Auslösung von Elektronen aus einer Substanz unter der Wirkung einer bestimmten inneren oder äußeren Ursache ist die Kenntnis der auftretenden Austrittsgeschwindigkeiten von grundlegender Bedeutung.

Die im wesentlichen in Betracht kommenden Methoden zu deren Bestimmung stützen sich auf die direkt oder indirekt meßbare Beeinflussung der Elektronenbahn durch äußere magnetische oder elektrische Felder. Voraussetzung ist hierbei, daß einerseits der etwa mögliche gleichzeitige Einfluß dieser Felder auf den Vorgang der Emission selbst für die Schlußfolgerung eliminierbar wird, und daß andererseits die experimentelle Untersuchung sowohl hinsichtlich der Wahl ihres speziellen Verfahrens als bei der Auswertung der mit ihm gewonnenen unmittelbaren Erfahrung durch eine ausreichende

theoretische Einsicht in den der Beobachtung unterworfenen Vorgang geleitet wird.

Daß die Frage nach den Austrittsgeschwindigkeiten trotz zahlreicher dem Gegenstande gewidmeten Untersuchungen bisher nur in wenigen Fällen als befriedigend gelöst betrachtet werden kann[1]), erklärt sich vornehmlich daraus, daß diese als selbstverständlich erscheinenden Voraussetzungen doch vielfach unerfüllt geblieben sind. Dies trifft namentlich auf die überwiegend vorliegenden Fälle der Benutzung elektrischer Felder zu, deren jeweilige Anordnung von besonders erheblichem Einfluß auf das Beobachtungsergebnis und damit auch — bei mangelnder Beherrschung der maßgebenden Verhältnisse — auf die daraus gezogenen Schlüsse ist.

Dies dürfte den im folgenden unternommenen Versuch einer eingehenden *quantitativen Beschreibung der theoretischen Grundlagen der wichtigsten elektrischen Meßverfahren* rechtfertigen. Es sollen hierdurch nicht nur die für eine einwandfreie Verwertung reicher, bis jetzt vorliegender experimenteller Erfahrung maßgebenden theoretischen Methoden entwickelt, sondern auch der weiteren Forschung klare Gesichtspunkte für einen erfolgreichen Fortschritt gegeben werden. Die Untersuchung ist in dieser Hinsicht im wesentlichen als eine in quantitativer Richtung weiterführende Ergänzung einer an sich im Prinzip bereits festliegenden, zuerst in den grundlegenden Arbeiten von Hrn. Lenard[2]) und neuerdings u. a. namentlich von Hrn. Ramsauer[3]) zum Ausdruck gebrachten Kenntnis zu betrachten, wenn sie auch mehrfach Gelegenheit nimmt, auf Fragen prinzipieller Art von neuem kritisch einzugehen. Daneben enthält sie einen ersten Versuch einer durch die gewonnenen Ergebnisse ermöglichten Zusammenstellung der die Elektronen-Austrittsgeschwindigkeiten im allgemeinen und in verschiedenen Spezialfällen betreffenden gegenwärtigen quantitativen Kenntnis.[4])

1) Vgl. hierzu Kapitel III.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149. 1902.

3) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. p. 961 u. 1121. 1914; auch Heidelb. Akad. A. 19 u. 20. 1914.

4) Vgl. auch die hierhergehörigen Abschnitte der umfassenden Veröffentlichung von P. Lenard: Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg 1918, bei C. Winter.

Der theoretischen Betrachtung des folgenden I. Kapitels werden im Anschlusse an Fragen allgemeiner Art eine Reihe bestimmt gewählter einfacher Verhältnisse zugrunde gelegt, zunächst ohne Rücksicht auf die Einzelheiten ihrer experimentellen Realisierung.

Diesen wendet sich Kapitel II zu, indem es feststellt, wie weit und in welcher Weise die vorherigen Entwicklungen zur direkten Anwendung auf die der Erfahrung zugänglichen Vorgänge geeignet sind. Es wird hierbei auch auf diejenigen Faktoren eingegangen, durch deren Einfluß sich die zuvor der Theorie zugrunde gelegten Verhältnisse von denen des Experimentes wesentlich zu unterscheiden vermögen, und dabei auf neue Wege hingewiesen, welche solche Faktoren teilweise auszuschalten oder durch deren getrennte Untersuchung die experimentelle Lösung wichtiger Einzelfragen gestatten.

Das III. Kapitel schließlich geht umgekehrt von der Erfahrung aus, deren Ergebnisse es auf der Grundlage der zuvor erhaltenen Einsicht für einige spezielle Fälle der bisherigen Beobachtung zu einem einwandfreien Gesamtbild zu vereinigen sucht. Es betrachtet insbesondere den *lichtelektrischen Effekt mit Einschluß der durch Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen und die Elektronenemission der Kanalstrahlen.*[1])

Eine Begrenzung erfährt das behandelte Problem einerseits durch die Beschränkung auf die die Elektronenemission fester und flüssiger Körper betreffenden Methoden, andererseits durch die auf die zu betrachtenden Spezialfälle meist ohne weiteres zutreffende Annahme geringer Elektronenkonzentration, welche die Berücksichtigung der Eigenkräfte[2]) der Elektronen entbehrlich macht. Die weitere Voraussetzung konstanter Elektronenmasse hinterläßt nur für den Fall der

1) Über die Sekundärstrahlen der Kathodenstrahlung vgl. die Veröffentlichung der vorhergehenden Anmerkung.

2) Da in der glühelektrischen Literatur die Auffassung zu bestehen scheint, als sei erst durch die glühelektrischen Arbeiten die Aufmerksamkeit auf die allerdings nur hier in erheblichem Maße mitwirkenden Eigenkräfte der Elektronen (sog. Raumladung) gelenkt worden, sei bemerkt, daß schon Hr. Lenard (Ann. d. Phys. 2. p. 364. 1900 und 8. p. 171. Anm. 1. 1902) auf sie als etwa zu berücksichtigenden Faktor hingewiesen hat.

schnellsten negativen Sekundärstrahlen der Röntgenstrahlung das Bedürfnis nach einer geringen Modifikation der festgestellten quantitativen Beziehungen.

Kapitel I.

Theoretisches.

Für die Untersuchung der Elektronenbewegung im elektrischen Felde kommen vornehmlich die beiden ausgezeichneten Fälle des homogenen und des radialen Feldes in Betracht. Das letztere kann sowohl ein zylindrisches als ein zentrales sein. Für die Geschwindigkeitsmessung liegen im homogenen und im zylindrischen Felde im Prinzip verwandte Verhältnisse vor. Da das letztere bisher nur für Untersuchungen in Benutzung kam, die außerhalb der gegenwärtigen Betrachtung liegen (Glüheffekt)[1]), kann sich die folgende Darstellung auf das homogene und das zentrale Feld beschränken.

Die Ermittlung der Austrittsgeschwindigkeiten und ihrer Verteilung auf die gesamte emittierte Elektronenzahl mit den gegenwärtig zu betrachtenden Methoden beruht jeweils auf der experimentellen Festlegung des Zusammenhanges zwischen meßbarer Anzahl der Elektronen und der von ihnen in der benutzten Feldanordnung durchlaufenen Potentialdifferenz. Dieser Zusammenhang ist einerseits durch die Bahn des einzelnen Elektrons im betreffenden Felde, andererseits durch seine Emissionsrichtung bestimmt. Hierauf soll im folgenden getrennt eingegangen werden.

A. Die Bewegungsgesetze.

Es seien hier die für die spätere Verwertung maßgebenden, im wesentlichen bekannten Verhältnisse kurz aufgeführt.

I. Homogenes Feld.

Dasselbe sei durch zwei parallele Kondensatorplatten realisiert, deren eine den als Emissionsort gewählten Koordinatenanfangspunkt enthalte, deren gegenseitiger Abstand d und deren Potentialdifferenz V sei.

1) Für den Zweck der Geschwindigkeitsmessung durch W. Schottky, Ann. d. Phys. 44, p. 1011. 1914.

1. *Das mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v_0 begabte Elektron unterliege auf seiner ganzen Bahn ausschließlich den Kräften des angenommenen Feldes.*

Die Bahnkurve liegt bekanntlich in einer Ebene, als welche die xz-Ebene gewählt sei. Koinzidiert die x-Achse mit der Feldrichtung, so lautet die Bahngleichung

$$x = \frac{e}{2m}\frac{V}{d}\frac{z^2}{v_{0z}^2} + \frac{v_{0x}}{v_{0z}} \cdot z, \tag{1}$$

wenn v_{0x} und v_{0z} die Geschwindigkeitskomponenten in der x- und z-Richtung bezeichnen. Wird e positiv eingesetzt, so entspricht positives V einer Beschleunigung, negatives V einer Verzögerung des Elektrons in Richtung der positiven x-Achse.

Das Elektron beschreibt eine Parabel, deren Scheitel durch die Koordinaten

$$x_s = \frac{v_{0x}^2}{2\frac{e}{m}\frac{V}{d}} \quad \text{und} \quad z_s = \frac{v_{0x} \cdot v_{0z}}{\frac{e}{m} \cdot \frac{V}{d}}$$

gegeben ist und vom Koordinatenanfangspunkte aus unter dem Winkel

$$\alpha_s = \operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{tg} \alpha) \tag{2}$$

gegen die x-Achse erscheint, wenn α der Ausgangswinkel der Elektronenbahn ist.

Für die x-Komponente der Geschwindigkeit ergibt sich

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - v_{0x}^2 = 2\frac{e}{m}\frac{V}{d} \cdot x \text{ oder } V_x - V_{0x} = \frac{V}{d} \cdot x,$$

während die z-Komponente unverändert bleibt. Für das Vordringen im Felde entscheidet also lediglich die erstere; die x-Komponente V_x der Voltgeschwindigkeit ändert sich jeweils um die vom Elektron durchlaufene Potentialdifferenz

$$\frac{V}{d} \cdot x.$$

Ist α der Emissionswinkel gegen die Plattennormale, so kann im verzögernden Felde die Gegenplatte nur dann erreicht werden, wenn

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2\,e/m} = V_{0x} = V_0 \cdot \cos^2 \alpha \geqq |V|. \tag{3}$$

Die Anwendung des unendlich ausgedehnten homogenen

Feldes zur Geschwindigkeitsmessung liefert also unmittelbar nur Angaben über die normalen Komponenten.[1])

Ist die zum Meßinstrument geleitete *Gegenplatte begrenzt*, etwa nach dem Schutzringprinzip, so liegen die Verhältnisse etwas weniger einfach. Damit das Elektron etwa den zentralen, isoliert gedachten Teil der Gegenplatte, der als Kreisscheibe mit dem Radius R vorausgesetzt sei, treffe, ist sowohl der Emissionsort des Elektrons als seine z-Koordinate in der Ebene der Gegenplatte Beschränkungen unterworfen. Zur Erhaltung der Gleichwertigkeit aller Emissionsrichtungen muß die Elektronenquelle als punktförmig auf der Achse des Kondensators angenommen werden[2]), und andererseits muß die z-Koordinate aller meßbaren Elektronen am Orte der Gegenplatte (für $x = d$) innerhalb des Wertbereiches 0 bis R liegen.

Für Emissionsrichtungen im Winkelbereiche 0 bis arctg $k/2$

$$\left(\text{wo } k = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{R}{d}\right)$$

trifft die letztere Bedingung, wie aus (2) hervorgeht, ohne weiteres immer zu, falls nur die Normalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit das Erreichen der Gegenplatte überhaupt zuläßt, d. h. die Beziehung (3) erfüllt ist. Die zentrale Auffangeplatte ist also für Elektronen dieses Bereiches als unendlich groß zu betrachten.

Für das Abfangen von Elektronen aller anderen Emissionsrichtungen ergibt sich aus (1) die Bedingung

$$\frac{V}{V_0} \geqq \frac{4 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_0} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \tag{4}$$

$$\geqq \frac{4}{k^2} \sin \alpha \cdot (\sin \alpha - k \cdot \cos \alpha).$$

Dieselbe geht für

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{k}{2},$$

dem unteren Grenzwerte ihrer Gültigkeit, in die der Bedingung (3) entsprechende Form

1) Diese einfache, zuerst von Hrn. Lenard (Ann. d. Phys. 8. p. 149. 1902) benutzte und deutlich hervorgehobene Tatsache ist in der Folgezeit mehrfach zum Schaden des Fortschrittes unbeachtet geblieben.

2) Die Voraussetzung, daß die begrenzte Fläche *symmetrisch* liege zur Normalen der emittierenden Fläche am punktförmigen Emissionsort, werde im folgenden der Einfachheit halber in allen Fällen gemacht, in denen eine Begrenzung des Auffängers angenommen ist.

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{4}} = \cos^2 \alpha$$

über.

Für Emissionswinkel zwischen

$$\operatorname{arctg} \frac{k}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_0$$

wird sie durch negative Potentiale V (verzögernde Felder), für alle größeren Emissionswinkel durch positive Potentiale (beschleunigende Felder) erfüllt. Für $\alpha = \alpha_0$ wird dementsprechend $V = 0$.

Berechnet man umgekehrt den Winkelbereich α, dessen Elektronen bei einer bestimmten Potentialdifferenz V die Auffangeplatte erreichen können, so findet sich

$$(5) \quad \sin^2 \alpha = \tfrac{1}{2} \sin^2 \alpha_0 \cdot \left\{1 + \tfrac{1}{2} \frac{V}{V_0} + \sqrt{1 + \frac{V}{V_0}\left(1 - \frac{k^2}{4} \frac{V}{V_0}\right)}\right\}.$$ [1]

Für kleine Werte von k und V/V_0 folgt hieraus die einfache Form

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha_0 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{V}{V_0}\right).$$

Eine begrenzte Auffangeplatte im homogenen Felde ist also nur in demjenigen Spannungsgebiete als unendlich ausgedehnte Platte anzusehen, in dem für die Messung nur Emissionswinkel $\alpha \leqq \operatorname{arctg} k/2$ in Betracht kommen. Außerhalb dieses Gebietes werden weder Normalkomponenten noch wahre Geschwindigkeiten unmittelbar gemessen.

Zur Analyse derartiger Beobachtungsresultate ist die Anwendung der unter (4) oder (5) angegebenen Beziehungen erforderlich. (Vgl. Kapitel III, B u. C.)

2. *Der emittierenden Platte sei ein dem bisher allein angenommenen Felde parallel gerichtetes, verzögerndes Feld vorgelagert.*

Dieses sei im Gegensatz zu dem auf größere Entfernungen sich erstreckenden *äußeren* Felde als *Oberflächenfeld* bezeichnet,

1) Das negative Vorzeichen der Wurzel würde dem hier nicht in Betracht kommenden Fall entsprechen, daß das Elektron vom Rande des Auffängers her ($-z = R$) derart beschleunigt in das Feld einträte, daß es darnach den Koordinatenanfangspunkt unter dem durch die Gleichung hierfür gegebenen Winkel gegen die positive x-Achse mit der festgelegten Geschwindigkeit V_0 durchschritte.

da angenommen sei, daß dessen Einfluß als Folge der mit dem Austritt des Elektrons verbundenen besonderen physikalischen Verhältnisse sich nur auf die allernächste Umgebung der Plattenoberfläche, die hier als Ebene im mathematischen Sinne vorausgesetzt sei, erstrecke.

Ist $\mathfrak{E}_i$ die Oberflächen-Feldstärke[1]) im Abstande x von der Plattenoberfläche, die eine mit wachsendem x abnehmende, im übrigen beliebige Funktion von x sei, so ist $\mathfrak{E}_i . dx$ die Arbeit der Einheitsladung bei ihrer Verschiebung um dx gegen die Kraft dieses Feldes. Die Energieänderung eines Elektrons nach Durchschreiten des gesamten inneren Feldbereiches $\bar{x}_i$ wird also bei gleichzeitiger Überlagerung des äußeren homogenen Feldes

$$(6) \qquad \Delta E_{\bar{x}_i} = -e\int_0^{\bar{x}_i}\left\{|\mathfrak{E}_i| + \frac{V}{d}\right\}dx = -e\Pi - e\frac{V}{d}\cdot\bar{x}_i,$$

wenn Π die vom inneren Felde allein herrührende durchlaufene Potentialdifferenz bezeichnet, die positiv einzusetzen ist. Allgemeine Aussagen über die Größe des relativen Einflusses jedes einzelnen der beiden Summanden auf die Energieänderung würden die Kenntnis von Π und $\bar{x}_i$ voraussetzen. Der bisherigen experimentellen Erfahrung entspricht jedenfalls die Annahme, daß der zweite Summand bei allen der Beobachtung zugänglichen Verhältnissen am Gesamtwerte von $\Delta E_{\bar{x}_i}$ höchstenfalls bei relativ hohen äußeren Feldern merklich beteiligt sein dürfte. Es sei bezüglich dieses Falles auf die spätere Betrachtung (Kap. II, II) und die vorliegende Literatur[2]) verwiesen und für jetzt angenommen, daß $\Delta E_{\bar{x}_i}$ ausschließlich durch das Oberflächenfeld bestimmt sei, daß also die beiden Felder gewissermaßen hintereinandergeschaltet seien.

---

1) Mit den hier gewählten Indizes i und a soll angedeutet sein, daß sich die betreffende Größe jeweils auf das Innere bzw. den Außenraum des Oberflächenfeldes bezieht.

2) Vgl. insbesondere P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149. 1902; W. Schottky, Physik. Zeitschr. 15. p. 625. 1914. Es könnten die vorliegenden Verhältnisse auch bei gewissen bei hohen Feldern in Flammen beobachteten Erscheinungen vielleicht in Betracht kommen (vgl. den Bericht A. Becker, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 13. p. 159. 1916).

Da die gesamte Arbeitsleistung nur in der x-Richtung erfolgt, so trifft die zunächst auf die x-Komponente bezügliche Gleichung (6) auf die ganze Geschwindigkeit bzw. Energie zu, d. h. es ist auch

$$(6a) \qquad \frac{m}{2} v_a^2 - \frac{m}{2} v_i^2 = -e\Pi \text{ oder } V_0^a = V_0^i - \Pi,$$

wenn v_a und v_i die linearen, V_0^a und V_0^i die Voltgeschwindigkeiten des Elektrons beim Eintritt in das Oberflächenfeld bzw. äußere Feld sind.

Durch Vorschaltung des Oberflächenfeldes wird also die Energie der emittierten Elektronen um den konstanten Betrag Π verringert.

Da aber diese Verringerung die Folge der ausschließlichen Reduktion der x-Komponente ist, tritt gleichzeitig eine *Richtungsänderung der Geschwindigkeit* ein.[1]) Tritt das unter dem Winkel α emittierte Elektron unter dem Winkel α' aus dem inneren Felde aus, so ist

$$v_i \sin \alpha = v_a \cdot \sin \alpha'$$

und

$$\frac{v_i}{v_{xi}} \cdot \cos \alpha = \frac{v_a}{v_{xa}} \cdot \cos \alpha' .$$

Hieraus wird

$$7) \qquad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{v_a}{v_i} = \sqrt{\frac{V_0^a}{V_0^i}} = \text{const.}$$

und

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{v_{xi}}{v_{xa}} \cdot \sqrt{\frac{V_0^a}{V_0^i}} .$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung findet sich

$$\frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha' \cdot d\alpha'} = \sqrt{\frac{V_0^a}{V_0^i}}$$

und hieraus mit Benutzung der vorhergehenden Gleichung das Verhältnis zweier zusammengehöriger Bereiche

$$(7a) \qquad \frac{d\alpha}{d\alpha'} = \frac{v_{xa}}{v_{xi}} = \sqrt{\frac{V_0^a}{V_0^i}} ,$$

woraus schließlich die für später wichtige Beziehung folgt

$$(7b) \qquad \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\sin \alpha' \cdot d\alpha'} = \frac{V_0^a}{V_0^i} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} .$$

1) Vgl. die geometrische Darstellung dieses Falles bei C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. p. 1148. 1914.

Man erkennt, daß mit der Richtungsänderung eine völlige Ausschaltung eines gewissen inneren Winkelbereiches verbunden ist, da höchstenfalls diejenigen Elektronen in das äußere Feld übertreten können, deren Austrittswinkel

$$\alpha' = \frac{\pi}{2},$$

deren Emissionswinkel α nach (7)

$$= \arcsin \sqrt{\frac{V_0^i - \Pi}{V_0^i}}$$

ist. Der Grenzwinkel für den Austritt ist darnach um so kleiner, je kleiner die innere Elektronengeschwindigkeit ist, so daß beim Vorhandensein von Elektronen verschiedener Geschwindigkeiten der Austritt ins äußere Feld mit einer Bevorzugung der schnelleren erfolgt.

II. *Zentrales Feld.*

Dasselbe sei durch zwei konzentrische Kugeln mit den Radien R_i und R_a und der gegenseitigen Potentialdifferenz V verwirklicht. Durch weitgehende Verkleinerung von R_i absolut und namentlich relativ zu R_a kann der Forderung entsprochen werden, daß alle an der Innenkugel auftretenden Emissionsrichtungen radial sein sollen.

1. Ist das an der Innenkugel mit der Geschwindigkeit v_0 emittierte Elektron *ausschließlich der Wirkung des äußeren zentralen Feldes* unterworfen, so sind seine Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = a\frac{z}{r^3},$$

wenn der Koordinatenanfangspunkt im Mittelpunkte des Kugelkondensators liegt und der Faktor

$$a = \frac{e}{m} V \frac{R_a \cdot R_i}{R_a - R_i}$$

ist. Daraus folgt die Energiegleichung

$$v_r^2 - v_0^2 = 2a \cdot \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{r}\right)$$

oder

$$V_r - V_0 = V \frac{R_a}{R_a - R_i} \cdot \frac{r - R_i}{r},$$

die für $r = R_a$ in $V_r - V_0 = V$ übergeht. Das Elektron kann also im verzögernden Felde die äußere Kugelschale immer dann erreichen, wenn

$$V_0 \geqq |V|. \tag{8}$$

Die Messung im zentralen Felde liefert also direkt die wahren Geschwindigkeiten.

2. *Ist der Austritt des Elektrons aus der Innenkugel mit einer Austrittsarbeit verbunden,* wie sie unter I 2 angenommen war, so unterscheiden sich alle meßbaren Geschwindigkeiten von den inneren um den konstanten Betrag *II*.

Im Falle *streng normaler Emissionsrichtung* würde eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit nicht eintreten und damit der Austritt einer bestimmten Elektronensorte (bestimmter innerer Geschwindigkeit), falls er überhaupt möglich wäre, nur mit einer Reduktion der Geschwindigkeit, aber nicht der Anzahl verbunden sein.

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist hier ebenso wie im homogenen Felde nur eine reduzierte Anzahl jeder Elektronensorte der Messung zugänglich. Hiermit wird im allgemeinen in allen praktischen Fällen zu rechnen sein, sofern die Innenkugel kein mathematischer Punkt ist oder gar durch eine sehr kleine ebene Scheibe ersetzt wird, was in Hinsicht des äußeren Feldverlaufes unbedenklich bliebe.

B. Die Mengenverteilung.

Nach Festlegung der Bewegungsweise des einzelnen Elektrons kann jetzt die Frage nach der jeweils der Messung zugänglichen Elektronenmenge näher untersucht werden. Die Aufgabe besteht in der theoretischen Aufsuchung der Konsequenzen bestimmter einfacher, die Art der Emission betreffenden Annahmen, deren Berechtigung nachträglich durch den Vergleich ihrer Konsequenzen mit den Ergebnissen der Beobachtung zu prüfen ist.

I. Äußere Geschwindigkeiten.

Die folgenden Betrachtungen sollen zunächst der Verteilung der *äußeren* Geschwindigkeiten gelten. Man kann hierzu entweder die Elektronenbewegung erst vom Augenblick des Austrittes aus dem Oberflächenfelde verfolgen oder

annehmen, daß ein solches Feld überhaupt fehle. Auf die Feststellung der äußeren Geschwindigkeiten bezieht sich in der Tat auch das direkte Experiment, sofern die etwa vorhandene Austrittsarbeit durch die benutzten äußeren Felder nicht merkbar verändert wird und sich infolgedessen der unmittelbaren Bestimmung entzieht.

a) Einheitliche Geschwindigkeit.

Dies ist der denkbar einfachste Fall. Seine Untersuchung ist deshalb von besonderem Werte, weil sich aus ihr unmittelbar der Übergang zu jedem beliebigen komplizierteren Fall gewinnen läßt. Dies folgt aus der Erwägung, daß der letztere immer als Resultat einer Summierung über einzelne Geschwindigkeiten aufgefaßt werden kann.

Einer bestimmten Festlegung bedarf noch für einen Teil der Untersuchung die räumliche Verteilung der Emission. In dieser Hinsicht sollen die beiden einfachen möglichen Fälle allseitig gleicher bzw. nach dem Cosinusgesetze erfolgender Ausstrahlung näher betrachtet werden.

α) Allseitig gleiche Ausstrahlung.

Die Elektronenquelle emittiere in der Zeiteinheit die Elektronenanzahl N gleichmäßig über die vordere Halbkugel. Dann ist die allseitig gleiche Raumdichte, d. h. die in der Zeiteinheit die Einheit des räumlichen Winkels erfüllende Elektronenmenge, $N/2\pi$ und die im Winkelbereiche α und $\alpha + d\alpha$ gegen die Normale des jeweiligen Flächenelementes austretende Anzahl

$$dy = N \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha \,. \tag{9}$$

1. *Zentrales Feld.* — Erfolgt die Ausstrahlung von der inneren Elektrode, und wirkt *die ganze* umhüllende *äußere Elektrode als Auffänger*, so kommt die räumliche Verteilung der Emission nicht in Betracht. Die äußere Elektrode nimmt bei fehlendem und bei beliebigem beschleunigenden Felde die gesamte emittierte Elektronenmenge auf. Dies erfolgt auch noch bei verzögernden Feldern, solange die angelegte Potentialdifferenz kleiner ist als die Voltgeschwindigkeit der Elektronen. Werden beide einander gleich, so sinkt

die abfangbare Anzahl plötzlich auf Null und verharrt hier für beliebig größere verzögernde Potentialdifferenzen. Die ermittelbare Verteilungskurve besteht also aus einer Parallelen zur Spannungsachse mit der Ordinate N (für die Zeiteinheit) und einer bei der Abszisse $-V_0$ auf Null herabfallenden Parallelen zur Mengenachse (vgl. Kurve 1 der nachfolgenden Fig. 1).

Ist die *Auffangeelektrode begrenzt*, so bleibt die Gestalt der Verteilungskurve unverändert, nur ihre Ordinate verschiebt sich auf den kleineren Wert

$$N \cdot \frac{F}{2\pi R_a^2},$$

der in den Ausdruck $z = N(1 - \cos a_0)$ übergeht, falls die Begrenzung — wie stets angenommen sei — gegen die Normale der emittierenden Fläche symmetrisch liegt und vom Emissionsorte aus gegen diese unter dem Winkel a_0 erscheint.

2. *Unendlich ausgedehntes homogenes Feld.* — Während für Potentialdifferenzen $V \geqq 0$ stets alle emittierten Elektronen von der Gegenplatte abgefangen werden, die Verteilungskurve im Gebiete beschleunigender Spannungen also als Parallele zur Spannungsachse mit der Ordinate N erscheint, wird die Kurvengestalt im Gebiete verzögernder Spannungen durch die Verteilung der Normalkomponenten der Geschwindigkeit bestimmt. Da im gegenwärtigen Falle die Normalen aller emittierenden Flächenelemente einander parallel sind, so liegen die Normalkomponenten der Geschwindigkeit aller im Winkelbereiche $0 - a$ gegen die Normalen austretenden Elektronen zwischen V_0 und $V_0 \cdot \cos^2 a$. Dieselben können also noch alle die Gegenplatte erreichen, solange die verzögernde Potentialdifferenz der Bedingung $|V| \leqq V_0 \cdot \cos^2 a$ genügt. Nach (9) ist ihre Anzahl

$$y = N(1 - \cos a), \tag{10}$$

woraus sich für den gesuchten Zusammenhang zwischen abfangbarer Elektronenmenge und angelegter Potentialdifferenz im Gebiete verzögernder Felder unmittelbar ergibt

$$y = N\left(1 - \frac{\sqrt{2\,e/m\,V}}{c_0}\right) = N\left(1 - \sqrt{\frac{V}{V_0}}\right). \tag{11}$$

Für $V = 0$ wird $y = N$, für $V = V_0$ wird $y = 0$, wie

erforderlich. Im Zwischengebiete ändert sich y mit der Wurzel aus V.[1])

Die Steigerung der Verteilungskurve wird

$$(12) \qquad \frac{dy}{dV} = -N\sqrt{\frac{e}{m}}\,\frac{1}{v_0\sqrt{2V}} = -N\,\frac{1}{2\sqrt{V_0 \cdot V}},$$

sie wächst also dauernd mit abnehmendem V und wird für $V = 0$ unendlich. Die Kurve bildet am Orte $V = 0$ einen scharfen *Knickpunkt*, dessen Ursache in dem überwiegenden Vorhandensein geringer Normalkomponenten der Geschwindigkeit liegt.[2]) Hierauf ist zuerst von Hrn. Ramsauer (l. c.) hingewiesen worden, wodurch eine Reihe unzutreffender Vorstellungen namentlich aus der lichtelektrischen Literatur beseitigt wurde. Er hat auch bereits die vorstehende Gleichung (12), ohne Ableitung, angegeben.

Bezieht man die angelegte Potentialdifferenz V auf die Austrittsgeschwindigkeit V_0 als Einheit, und gibt man die jeweils abgefangene Elektronenzahl y in Bruchteilen der vorhandenen Gesamtmenge N an, so daß als neue Variable

$$\frac{V}{V_0} = \bar{V} \quad \text{und} \quad \frac{y}{N} = \bar{y}$$

---

1) Für die erhaltene Gleichung der Verteilungskurve der Normalkomponenten, die sich, ohne Ableitung bzw. Verwertung, auch schon bei N. Campbell (Phil. Mag. **24**. p. 536. 1912) findet, ist auch folgende auf die Geschwindigkeitskomponenten zurückgreifende Herleitung naheliegend: die relative Anzahl Elektronen, deren Geschwindigkeitskomponenten in der Normalenrichtung im Bereiche v_n bis $v_n + dv_n$ bzw. V_n bis $V_n + dV_n$ liegen, ist, wie aus (3) und (9) hervorgeht,

$$\frac{dv_n}{v_0} = \frac{dV_n}{\sqrt{2V_0}\cdot\sqrt{2V_n}}.$$

Ebenso groß ist die relative Anzahl der entsprechenden y- und z-Komponenten. Es wird also die Gesamtzahl der bei der Spannungsdifferenz V abfangbaren Elektronen

$$y = N\left(\frac{1}{\sqrt{2V_0}}\right)^3 \cdot \int_V^{V_0} \frac{dV_n}{\sqrt{2V_n}} \cdot \int_0^{V_0} \frac{dV_y}{\sqrt{2V_y}} \cdot \int_0^{V_0} \frac{dV_z}{\sqrt{2V_z}},$$

dessen Lösung unmittelbar zum Ausdruck (11) führt.

2) Dies muß naturgemäß nicht bei jeder Elektronenemission der Fall sein; das Auftreten eines scharfen Knickpunktes ist daher nur in Fällen einer besonderen Geschwindigkeits- bzw. Richtungsverteilung der Elektronen zu erwarten. Vgl. die später zu behandelnden Fälle.

auftreten, so folgt aus (11) und (12)

(11a) $\bar{y} = 1 - \sqrt{\bar{V}}$ und (12a) $\frac{d\bar{y}}{d\bar{V}} = -\frac{1}{2\sqrt{\bar{V}}}$.

Die y-V-Kurven aller beliebigen Austrittsgeschwindigkeiten fallen also bei dieser Wahl der Einheiten in eine gemeinsame, dem besonderen Falle der Emission und Meßmethode eigentümliche Grundkurve zusammen. Den Verlauf dieser Grundkurve für den gegenwärtig betrachteten Fall zeigt Fig. 1 (Kurve 2)[1]) zusammen mit der zugehörigen Grundkurve für das zentrale Feld (Kurve 1).

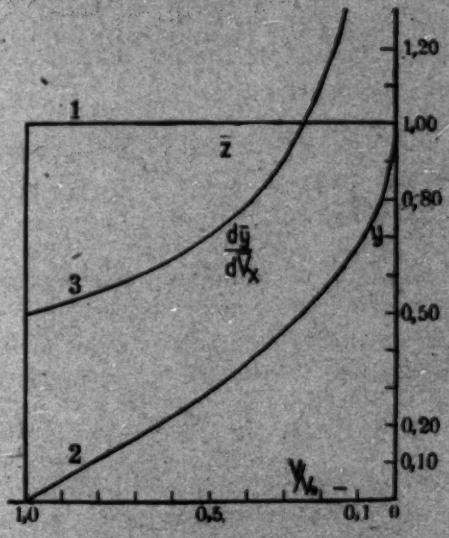


Fig. 1.

Identifiziert man die angelegte relative Spannungsdifferenz $\bar{V}$ mit der entsprechenden Normalkomponente $\bar{V}_n$ der Elektronengeschwindigkeit, so liefert die *Kurve 2* (Fig. 1) *und die zugehörige Gleichung (11 a) die Integralwerte über ein beliebiges* bei $V_n = V_0$ beginnendes *Normalkomponentenbereich*, während *Gleichung (12 a) und die sie darstellende Kurve 3*

1) Daß beim Vorhandensein einer einheitlichen Geschwindigkeit im homogenen Felde überhaupt eine „Verteilungskurve" auftritt, ist nach dem Gesagten nicht mehr auffallend. In der Literatur sind diese Verhältnisse mehrfach verkannt worden.

direkt *die Verteilung der Elektronenzahl auf die vorkommenden Normalkomponenten* angibt.[1])

8. *Begrenztes homogenes Feld.* — Bei begrenzter Auffangefläche gilt für verzögernde Potentialdifferenzen

$$\text{im Bereich } |\bar{V}| > \frac{1}{1+\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{4}} \quad \text{die Beziehung (11a)}$$

Bei allen anderen Potentialdifferenzen werden immer nur diejenigen Elektronen meßbar, welche in dem durch Gleichung (5) gegebenen Winkelbereich α emittiert werden. Setzt man deren Anzahl nach (10) ein, so wird

$$(13)\quad \bar{y} = 1 - \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha_0 \cdot \left\{1 + \frac{\bar{V}}{2} + \sqrt{1+\bar{V}}\cdot\left(1 - \frac{k^2}{4}\cdot\bar{V}\right)\right\}}.$$

Für $\bar{V} = 0$ folgt hieraus, wie erforderlich, $(\bar{y})_0 = 1 - \cos\alpha_0$; für $\bar{V} = \frac{4}{k^2}$ wird $(\bar{y}) = 1$. Die gesamte ausgestrahlte Menge wird also erst bei um so höheren beschleunigenden Feldern ($\bar{V} > 0$) meßbar, je kleiner α_0 und je größer V_0 ist. Der Anstieg in diesem Gebiete erfolgt sehr nahe linear.

Von Interesse ist noch die Kurvensteigung in der unmittelbaren Nachbarschaft von $V = 0$ beiderseits der Ordinatenachse. Es kann zu deren Ermittlung die für diesen Fall früher angegebene vereinfachte Gleichung (5) benutzt werden. Aus ihr ergibt sich

$$\left|\frac{d\bar{y}}{d\bar{V}}\right| = \frac{\sin^2\alpha_0}{4(1-\bar{y})},$$

die Steigung ist also nur abhängig von der Variablen $\bar{y}$ und infolgedessen wegen des stetigen Verlaufes der Kurve beiderseits der Ordinatenachse sehr nahe gleich. Der bei unendlich ausgedehnter Auffangefläche am Orte $V = 0$ auftretende Knickpunkt verschwindet also durch die Begrenzung des Auffängers an diesem Orte, weil jetzt im feldfreien Kondensator die kleineren Normalkomponenten für die Messung nicht in Betracht kommen. Wo sie jetzt eine Rolle spielen, nämlich bei

$$\bar{V} = \frac{4}{k^2},$$

1) Als charakteristisch für den vorliegenden Fall möge bemerkt werden, daß bei $\bar{V} = 0{,}25$ gerade die Hälfte aller emittierten Elektronen zur Gegenplatte gelangt. Für den gleichen Ort wird

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{V}} = 1.$$

tritt er wieder auf, aber mit um so weniger scharfer Ausprägung, je größer dieser Spannungswert, d. h. je kleiner k ist.

Die Fig. 2 zeigt zu späterer Verwertung den entsprechenden Kurvenverlauf vorwiegend im Gebiete der verzögernden Felder für $k = \operatorname{tg} a_0 = 0{,}4848$, d. h. $a_0 = 23^\circ 30'$. Man sieht, daß die meßbare Elektronenmenge hier weit hinter derjenigen im unbegrenzten Kondensator zurückbleibt und daß sich die Kurve ohne merkliche Änderung ihrer Krümmung in das Gebiet der positiven Abszisse fortsetzt. Sie würde den Maximalwert erst bei $\bar{V} = 21{,}1$ erreichen. Diese Erscheinung läßt sich an den Beobachtungen der vorliegenden Literatur, welche sich auf Geschwindigkeitsmessungen bei variiertem Plattenabstande beziehen und meist eine völlig irrtümliche Erklärung fanden, vielfach verfolgen.

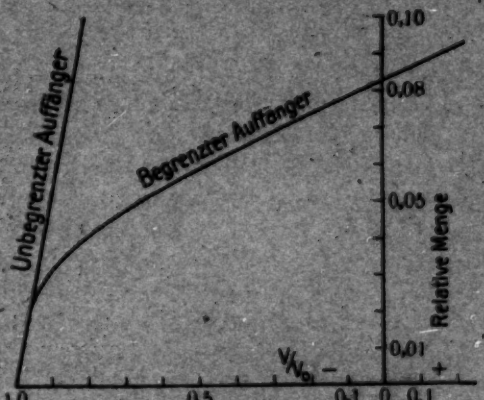


Fig. 2.

β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz.

Ist die ausgestrahlte Elektronenmenge proportional dem Cosinus des Emissionswinkels (gemessen gegen die Normale der emittierenden Fläche), so wird die im Winkelbereiche a bis $a + da$ pro Zeiteinheit emittierte Anzahl

$$dy = 2N \cdot \sin a \cdot \cos a \cdot da \tag{14}$$

und damit die räumliche Dichte

$$\frac{N}{\pi} \cdot \cos a .$$

1. *Zentrales Feld.* — Dient die *ganze* umhüllende *Außenelektrode als Auffänger*, so bleibt das Ergebnis mit dem früher (a, 1) angegebenen völlig übereinstimmend.

Bei *begrenzter Auffangefläche* wird die meßbare Elektronenzahl

$$z = N \cdot (\sin^2 a_0 - \sin^2 a_i) ,$$

falls α_a und α_i die Winkel gegen die Normale der emittierenden Fläche bezeichnen, unter denen die (symmetrisch gedachte) äußere und innere Begrenzung des Auffängers vom Emissionsorte aus erscheinen.

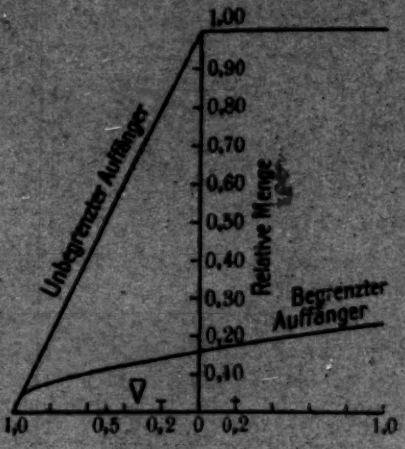


Fig. 3.

2. *Homogenes Feld.* — Bei *unendlich ausgedehnter Auffangefläche* sind für die Messung im verzögernden Felde lediglich die Normalkomponenten der Anfangsgeschwindigkeit maßgebend. Dem Winkelbereiche α bis $\alpha + d\alpha$ entspricht das Intervall der Normalkomponenten

$$dV = -v_{0a} \cdot v_0 \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha \cdot \frac{1}{e/m},$$

so daß die Steigerung der beobachtbaren Kurve gemäß (14) wird

$$\frac{dy}{dV} = -2N \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v_0^2} = -\frac{N}{V_0} \tag{15}$$

und die Kurvenordinate selbst

$$y = N \cdot \left(1 - 2\frac{e}{m}\frac{1}{v_0^2} \cdot V\right) = N \cdot \left(1 - \frac{V}{V_0}\right), \tag{16}$$

oder mit V_0 als Einheit der Potentialdifferenz und N als Einheit der Menge

$$\bar{y} = 1 - \bar{V} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{V}} = -1. \tag{16a, 15a}$$

Die Verteilungskurve ist also eine Gerade, und die Schärfe des Knickpunktes tritt gegen früher zurück (Fig. 3).

Bei *begrenztem Auffänger* wird nach (5) außerhalb des schon unter (α, 3) genannten Bereiches

$$\bar{y} = \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha_0 \left\{1 + \tfrac{1}{2}\bar{V} + \sqrt{1 + \bar{V} \cdot \left(1 - \frac{k^2}{4}\bar{V}\right)}\right\}. \tag{17}$$

Den entsprechenden Kurvenverlauf für den bereits der Fig. 2 zugrundegelegten Spezialfall zeigt — jetzt in etwas weiterer Verfolgung — die Fig. 3.

Der *Vergleich der beiden betrachteten Fälle α und β* miteinander zeigt allgemein die einfache Beziehung

$$1 - \bar{y}_\alpha = \sqrt{1 - \bar{y}_\beta} \quad \text{oder} \quad \bar{y}_\beta = 2\bar{y}_\alpha - \bar{y}_\alpha^2$$

zwischen beiden. Dieselbe ermöglicht also ohne weiteres eine Transformation der einen Grundkurve in die andere.

Solange $\bar{y}_\alpha$ relativ klein bleibt, ergibt sich daraus die noch einfachere Form $\bar{y}_\beta \sim 2\bar{y}_\alpha$. Dies trifft im Falle enger Begrenzung des Auffängers (wie etwa in dem Beispiel der Figg. 2 und 3) mit großer Annäherung auf das ganze Gebiet verzögernder Felder zu. Hier stehen also die beobachtbaren Kurvenordinaten nahe im Verhältnis 1 : 2 zueinander, und in qualitativer Hinsicht besteht keine Verschiedenheit des Kurvencharakters. Eine solche macht sich erst bei größeren Werten von $\bar{y}_\alpha$, hier also im Gebiete beschleunigender Felder, bemerkbar. Da auch $\bar{y}_\beta = 1$ wird für

$$V = \frac{4}{\mu^2},$$

so erreicht die Ordinate in beiden Fällen bei der gleichen beschleunigenden Potentialdifferenz ihren Maximalwert.

b) Nicht einheitliche Geschwindigkeit (allgemeiner Fall).

Der allgemeinste Fall des Vorhandenseins einer beliebigen Anzahl beliebig verteilter Geschwindigkeiten ist auf der Grundlage der im Vorhergehenden für eine einheitliche Geschwindigkeit verzeichneten Kenntnis einfach durch Summierung zu behandeln.

1. *Zentrales Feld.* — Bei *unbegrenztem Auffänger* setzt sich die Verteilungskurve im Gebiete verzögernder Felder aus einer der Zahl vorhandener Einzelgeschwindigkeiten gleichen Anzahl von Stufen zusammen, deren Lage die Absolutwerte dieser Geschwindigkeiten und deren Höhe die diesen Werten jeweils zugeordnete Elektronenzahl angibt. Sie erreicht bei $V = 0$ den Summenwert der vorhandenen Elektronen und verläuft im Gebiete beschleunigender Felder in dieser Höhe parallel zur Spannungsachse. Bei sehr erheblicher Anzahl der diskreten Geschwindigkeitswerte geht die Stufenfolge praktisch in einen kontinuierlichen Kurvenanstieg über, der dann nicht mehr Angaben über einzelne bestimmte Geschwindig-

keiten, sondern nur mehr über im übrigen beliebig wählbare Bereiche der Geschwindigkeit zu machen erlaubt. Durch Differentiation dieser beobachtbaren Integralkurve folgt dann die Verteilung der Elektronenzahl auf die einzelnen Bereiche direkt.

Bei *begrenztem Auffänger* unterscheidet sich das Beobachtungsergebnis nur dadurch, daß von jeder den einzelnen Geschwindigkeiten zugehörigen Elektronenzahl nach Maßgabe der unter a) genannten Verhältnisse nur ein bestimmter Bruchteil auftritt. Ist die räumliche Verteilung für alle Austrittsgeschwindigkeiten dieselbe, so ist dieser Bruchteil konstant, und die Verteilungskurven werden durch einen der Ordinate beizufügenden konstanten Faktor ineinander transformierbar. In diesem Falle ist der Relativverlauf der Kurven vom besonderen Gesetze der räumlichen Verteilung der Emission unabhängig.

2. *Homogenes Feld.* — Ist die Verteilung der Absolutwerte der emittierten Geschwindigkeiten — etwa durch die Beobachtung im zentralen Felde — bekannt, so sind die im homogenen Felde zu erwartenden Verhältnisse leicht angebbar. Da bei Potentialdifferenzen $V \gtrless 0$ immer einfach die Summe bzw. bei begrenztem Auffänger ein entsprechender Bruchteil aller emittierten Elektronen auftritt, bedarf nur das Gebiet der verzögernden Felder näherer Betrachtung.

Bei *unbegrenztem Auffänger* und *allseitig gleicher Ausstrahlung* wird die Gleichung der Verteilungskurve nach (11)

$$(18)\quad y = N_1 + N_2 + \ldots + N_n - \sqrt{V} \cdot \left\{ \frac{N_1}{\sqrt{V_1}} + \frac{N_2}{\sqrt{V_2}} + \ldots + \frac{N_n}{\sqrt{V_n}} \right\},$$

wenn N_1, $N_2 \ldots$ und V_1, $V_2 \ldots$ Gesamtzahl und Voltgeschwindigkeit der bei der angelegten Potentialdifferenz V zur Messung beitragenden einzelnen diskreten Elektronensorten bezeichnen. Da für sie $V_n \gtrless V$ sein muß, so ist auch $N_1 + N_2 + \ldots = z$, der bei der gleichen Spannung V im zentralen Felde meßbaren Elektronenzahl. Da außerdem die einzelnen N-Werte sich aus der Steigung der z-V-Kurve an der jeweiligen Stelle von V_n ergeben, so wird allgemein

$$(18a)\quad y = z - \sqrt{V} \cdot \sum_{V}^{V_{max}} \frac{(\mathrm{grad}\, z)_{V_n}}{\sqrt{V_n}}.$$

Beim Vorhandensein eines kontinuierlichen Überganges der Geschwindigkeiten ineinander kann im allgemeinen N als Funktion der Austrittsgeschwindigkeit V_0 aufgefaßt werden. Bezeichnet man die Relativzahl der Elektronen, deren Austrittsgeschwindigkeit (in Volt) im Bereiche V_0 bis $V_0 + dV_0$ liegt, mit $P(V_0)\,dV_0$, so ist, wenn zur Vereinfachung der Schreibweise in weitester Ausdehnung der möglichen oberen Grenze der vorkommenden Geschwindigkeiten $V_{max} = \infty$ gesetzt wird,

$$z = N \cdot \int_V^\infty P(V_0)\,dV_0 \quad \text{und} \quad (\text{grad}\, z)_{V_0} = N \cdot P(V_0),$$

wo N die Gesamtzahl aller emittierten Elektronen ergibt.

Die Gleichung (18) nimmt dann die Form an

$$y = z - N \cdot \sqrt{V} \cdot \int_V^\infty \frac{P(V_0)}{\sqrt{V_0}} \cdot dV_0. \tag{18b}$$

Die beiden gefundenen Gleichungen bezeichnen in analytischer Form den Weg, auf dem die *Herleitung der y-V-Kurve aus der z-V-Kurve* im Falle des Zutreffens der gemachten Voraussetzungen bezüglich Meßweise und Art der Emission erfolgen kann. Ein solches Verfahren besitzt Bedeutung sowohl für Vergleichszwecke als auch für die Lösung der besonderen Aufgabe, aus der Verteilung der Absolutwerte der Geschwindigkeit diejenige der Normalkomponenten zu finden.

Der bezeichnete Weg ist im allgemeinen nicht sehr einfacher Art. Handelt es sich um eine beschränkte Zahl einzelner Austrittsgeschwindigkeiten, die aus der Steigerung der z-V-Kurve entnommen werden kann, so ist die Summe in (18a) derart zu bilden, daß sie sich für jeden beliebig einsetzbaren V-Wert jeweils auf alle diejenigen Summanden erstreckt, deren $V_0 \geqq V$ ist, so daß also die Zahl der Summanden mit wachsendem, verzögerndem V ständig abnimmt.

Bei kontinuierlich gekrümmter z-V-Kurve würde die direkte Kenntnis eines analytischen Ausdruckes für $P(V_0)$ als Funktion von V_0 am ehesten eine Lösung von (18b) in geschlossener Form oder etwa die Anwendung einer rasch konvergierenden Reihe zulassen. Anderenfalls kann auch hier das obige Verfahren in Annäherung angewandt

werden, wenn das auftretende Spannungsbereich in geeignete Intervalle eingeteilt wird.[1])

Man findet aber auch leicht noch die für die analytische Durchführung geeignetere Form

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{V}\cdot\int_{V}^{\infty}\frac{z}{V_0^{3/2}}\cdot dV_0, \tag{18c}$$

die durch partielle Integration direkt in (18b) übergeht. Kann auch hier das Integral nach Einsetzen von $z = f(V_0)$ nicht in geschlossener Form gelöst werden, so ermöglicht der Ausdruck eine einwandsfreie Lösung durch graphische Integration des aus der z-V-Kurve ohne weiteres herleitbaren Ganges von $z/V_0^{3/2}$ mit V_0.

Wesentlich einfacher gestaltet sich der umgekehrte Weg der *Herleitung der z V-Kurve aus der y-V-Kurve*, also der Ermittlung der *wahren Geschwindigkeitsverteilung* aus Beobachtungen im homogenen Felde. Aus (18) ergibt sich unmittelbar nach Einführen von z und Ersetzen des Klammerausdruckes durch den Gradienten von y

$$z = y - 2V\frac{dy}{dV} = y + 2V\left|\frac{dy}{dV}\right|, \tag{19}$$

oder auch

$$\int_{V}^{\infty}P(V_0)\,dV_0 = \int_{V}^{\infty}P(V_z)\,dV_z + 2V\cdot P(V_\infty).\ ^{2})$$

Der Weg der Transformation wird hieraus ohne weiteres ersichtlich. Er ist für eine einwandsfreie Auswertung einer Homogenfeldmessung von prinzipieller Bedeutung.

Erfolgt die *Emission* aller vorhandenen Austrittsgeschwindigkeiten *nach dem Cosinusgesetze*, so wird nach (16)

---

1) Vgl. die ohne Angabe des Weges bereits von Hrn. Ramsauer (l. c. p. 1142) durchgeführte Transformation einer beobachteten z-V-Kurve in die entsprechende y-V-Kurve.

2) Es steht hier und auch später der Abkürzung halber V_z für V_{0z}; da jetzt immer nur Austrittsgeschwindigkeiten eine Rolle spielen, kann die Vereinfachung des Index nicht mißverständlich sein. Nur für die Bezeichnung des wahren Wertes der Austrittsgeschwindigkeit wird der Index 0 zur Unterscheidung von dem variablen Voltwerte V des Kondensators vorerst festgehalten.

$$y = z - V \cdot \sum_{V}^{V_{max}} \frac{(\text{grad } z)_{V_0}}{V_0} \tag{20}$$

oder bei kontinuierlichem Übergange der Geschwindigkeiten ineinander

$$y = z - N \cdot V \cdot \int_{V}^{\infty} \frac{P(V_0)}{V_0} \, dV_0 . \tag{20a}$$

Umgekehrt ergibt sich für die Bestimmung von z aus y

$$z = y - V \frac{dy}{dV} = y + V \left| \frac{dy}{dV} \right| . \tag{21}$$

Während die übliche Beobachtungsweise im zentralen Felde ohne weiteres über die räumliche Verteilung der Emission, wie bemerkt, nichts entscheiden läßt, wird dies durch Hinzunahme der Messung im Homogenfelde möglich. Es würde derjenige der beiden betrachteten Fälle am ehesten den tatsächlichen Verhältnissen nahekommen, dessen spezielles Transformationsverfahren die bessere Übereinstimmung der beiden Meßergebnisse untereinander lieferte.[1])

Bei *begrenztem Auffänger* ist die im Homogenfelde auftretende Verteilungskurve, wie aus den Betrachtungen unter a) folgt, das Resultat einer über sämtliche Austrittsgeschwindigkeiten sich erstreckenden Summierung von jeweils zwei Kurventeilen, deren Einzelbereiche bei den verschiedenen Geschwindigkeiten, da ihre Lagen Funktionen derselben sind, übereinandergreifen. Die analytische Form für diese Verhältnisse, die auf der Grundlage der Beziehungen (11) und (13) bzw. (16) und (17) zu entwickeln wäre, ist im allgemeinen wenig übersichtlich. Handelt es sich um die Herleitung der einer bekannten Verteilung der wahren Geschwindigkeiten entsprechenden y-V-Kurve, so dürfte eine graphische Summierung am leichtesten durchführbar sein.[2])

Dieser erhebliche Nachteil einer begrenzten Meßanordnung für die Auswertung der mit ihr erzielbaren Meßwerte führt zu der Erkenntnis, daß eine merkliche Begrenzung überhaupt von vornherein vermieden sein sollte. Nur das in der bis-

1) Diesem indirekten Verfahren gegenüber sei auch auf die spätere direkte Behandlung der betreffenden Frage hingewiesen (Kap. II).

2) Vgl. die Durchführung dieser Methode unter Kap. III, C.

herigen Literatur vielfach zutage tretende Fehlen dieser Erkenntnis und der Wunsch nach Ermöglichung wenigstens teilweiser nachträglicher Sicherstellung der auf solche Weise erhaltenen Ergebnisse rechtfertigt die verhältnismäßig weitgehende Betrachtung dieses Falles in den vorhergehenden Abschnitten. Von einer weiteren allgemeinen Verfolgung desselben kann nunmehr abgesehen werden, da die bisherigen Feststellungen für die spätere Behandlung spezieller Fälle ausreichend sind.

Es sollen im Anschluß an den vorstehenden allgemeinster Fall nicht einheitlicher Geschwindigkeit noch zwei bemerkenswerte besondere Fälle betrachtet werden.

c) Maxwellsche Verteilung der Lineargeschwindigkeiten.

Gilt für die linearen Austrittsgeschwindigkeiten das Maxwellsche Verteilungsgesetz[1]), so ist die Relativzahl der im Geschwindigkeitsbereiche v bis $v + dv$ liegenden Elektronen

$$P(v)\,dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_w^3} \cdot v^2 \cdot e^{-v^2/v_w^2} \cdot dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \bar{v}^2 \cdot e^{-\bar{v}^2} \cdot d\bar{v},$$

wenn v_w die wahrscheinlichste und

$$\bar{v} = \frac{v}{v_w}$$

die mit v_w als Einheit gemessene Geschwindigkeit bezeichnet.

Die Einführung der Voltgeschwindigkeit oder Energie liefert für die Relativzahl der im Energiebereiche $\bar{V}$ bis $\bar{V} + d\bar{V}$ liegenden Elektronen

$$P(\bar{V})\,d\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\bar{V}} \cdot e^{-\frac{\bar{V}}{2}} \cdot d\bar{V}, \tag{22}$$

wenn auch die Voltgeschwindigkeit mit dem wahrscheinlichsten Wert als Einheit gemessen wird, also

$$\bar{V} = \frac{V}{V_w}$$

ist.

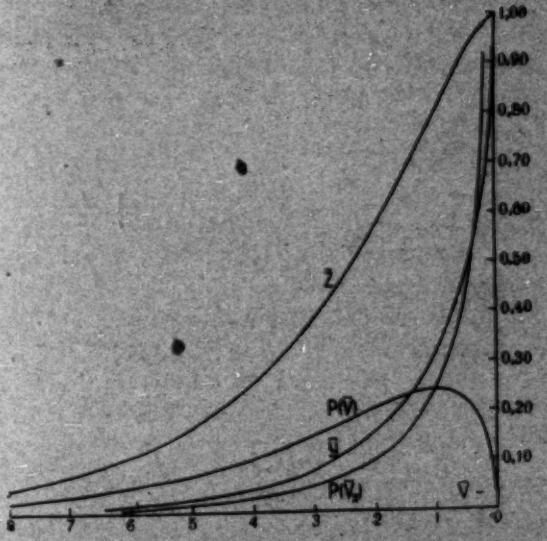
Wird diese Einheit auch bei Angabe der bei der jeweiligen Messung angelegten Potentialdifferenzen festgehalten, so ergibt sich folgendes:

1) Dieser Fall ist von dem von Hrn. Richardson für den Glüheffekt angenommenen naturgemäß verschieden.

1. Im *zentralen Felde* ist für beliebige räumliche Verteilung der Emission

$$(23)\quad z = N \cdot \int_{\bar{V}}^{\infty} P(\bar{V})\, d\bar{V} = N \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\bar{V}}{2}} \cdot e^{-\frac{\bar{V}}{2}} - \Phi\left(\sqrt{\frac{\bar{V}}{2}}\right) \right\},$$

wenn N die Gesamtzahl aller emittierten Elektronen ist und die Funktion Φ das Gaußsche Fehlerintegral für das betreffende Argument bezeichnet, dessen jeweilige Werte ohne weiteres aus bekannten Tabellen zu entnehmen sind. Eine graphische Darstellung gibt die Kurve z der Fig. 4 für $N=1$. Sie zeigt bei kleinen Gegenspannungen einen verhältnismäßig beträchtlichen Abfall, hat bei $\bar{V}=1$, wie zu erwarten, einen Inflexionspunkt und erstreckt sich, was für sie besonders charakteristisch ist, in immer langsamerem Abfall mit merklichen Ordinatenwerten noch auf relativ hohe Gegenspannungen. Ihre Differentiation gibt die direkte Verteilung der Einzelgeschwindigkeiten $P(\bar{V})$.



Maxwellsche Verteilung der Lineargeschwindigkeiten.
Fig. 4.

2. Im *homogenen Felde* wird im Falle *allseitig gleicher Ausstrahlung*, der hier ausschließlich betrachtet sei, nach (18b)

$$y = z - N\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\bar{V}}{2}}\cdot e^{-\frac{\bar{V}}{2}} \tag{24}$$

oder nach Einsetzen von z aus (23)

$$y = N\cdot\left\{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\bar{V}}{2}}\right)\right\}. \tag{24a}$$

Die entsprechende Kurve y der Fig. 4 besitzt einen anfänglich sehr starken Abfall, um aber auch erst bei größeren verzögernden Spannungen unmerklich zu werden. Ihre Differentiation liefert direkt die Verteilung der x-Komponenten der Voltgeschwindigkeit, für welche aus (24a) die Gleichung folgt

$$\frac{dy}{d\bar{V}} = N\cdot P(\bar{V}_x) = -N\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{2}}}\cdot e^{-\frac{\bar{V}}{2}}. \tag{24b}$$

Die Zahl der Komponenten wächst also, wie bekannt, stark mit deren abnehmender Größe.

Die Zusammenstellung von (24) und (24b) liefert eine Bestätigung der allgemeinen Beziehung (19).

Zu einem Ausdrucke für $P(\bar{V}_x)$ führt nun auch unmittelbar das bekannte Verteilungsgesetz der Komponenten der Lineargeschwindigkeit. Ersetzt man in

$$P(v_x)\,dv_x = \frac{2}{v_m\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{v_x^2}{v_m^2}}\,dv_x$$

die Komponente der Lineargeschwindigkeit durch diejenige der Voltgeschwindigkeit, so folgt sofort ein mit (24b) identischer Wert.

d) Maxwellsche Verteilung der Voltgeschwindigkeiten.

Die Annahme, daß die Voltgeschwindigkeiten oder die Energie so auf die emittierten Elektronen verteilt sei wie nach dem Maxwellschen Gesetze die Geschwindigkeiten auf die Gasmoleküle, ist versuchsweise zuerst von Hrn. Ramsauer[1]) zur näheren Untersuchung der von ihm festgestellten Verteilung der lichtelektrischen Anfangsgeschwindigkeiten quantitativ in Betracht gezogen worden.[2]) Die späteren Kon-

1) C. Ramsauer, l. c. p. 1129.

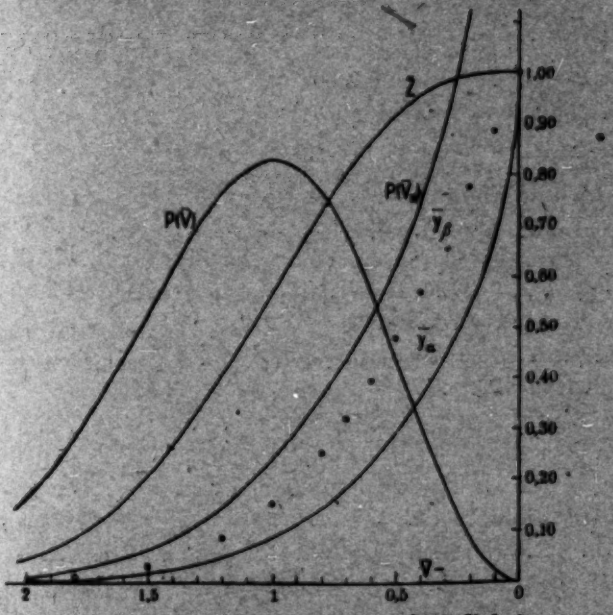
2) Vgl. hierzu auch Kap. III, A.

sequenzen rechtfertigen eine eingehendere Betrachtung dieses Falles.

Die Relativzahl der im Bereiche V und $V + dV$ der Voltgeschwindigkeit liegenden Elektronen sei also

$$P(V)\,dV = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{V_w^3} \cdot V^2 \cdot e^{-\frac{V^2}{V_w^2}} \cdot dV,$$

wo V_w die wahrscheinlichste Voltgeschwindigkeit ist, die von Fall zu Fall variieren kann. Man gelangt zu einheitlicher



Maxwellsche Verteilung der Voltgeschwindigkeiten.

Fig. 5.

Behandlung aller Fälle, wenn alle Voltgeschwindigkeiten mit der wahrscheinlichsten als Einheit gemessen werden, also wie unter c)

$$\bar{V} = \frac{V}{V_w}$$

eingeführt wird. Dann ist für das Bereich $\bar{V}$ und $\bar{V} + d\bar{V}$

(25) $$P(\bar{V})\,d\bar{V} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \bar{V}^2 \cdot e^{-\bar{V}^2} \cdot d\bar{V}.$$ [Kurve $P(\bar{V})$ Fig. 5.]

Hieraus folgt für die Verteilung der Lineargeschwindigkeiten das Gesetz

$$P(v)\,dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 5\sqrt{5} \cdot v^5 \cdot e^{-5/4 v^4} \cdot dv, \tag{26}$$

wenn auch die Lineargeschwindigkeit mit deren wahrscheinlichstem Werte als Einheit gemessen wird.

Man erkennt leicht, daß diese wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w nicht identisch ist mit der Geschwindigkeit, die dem wahrscheinlichsten Energiewerte zugehört. Wird letztere mit $(v)_{V_w}$ bezeichnet, so ist

$$(v)_{V_w} = v_w \cdot 0{,}946;$$

die Maxima der Verteilungskurve der Linear- und der Voltgeschwindigkeit sind also gegeneinander verschoben.

I. Im *zentralen Felde* findet sich als Resultat der Integration von (25)

$$z = N\left\{1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \bar{V} \cdot e^{-\bar{V}^4} - \Phi(\bar{V})\right\}. \tag{27}$$

Die durch Kurve $\bar{z}$ der Fig. 5 gegebene graphische Darstellung zeigt wesentlich rascheren Abfall mit zunehmender Gegenspannung als im vorher betrachteten Falle c), so daß Spannungswerte $\bar{V} > 2{,}5$ kaum mehr praktische Bedeutung gewinnen. In diesem Gebiete ist der Wert des Fehlerintegrals schon so nahe der 1, daß z überwiegend durch den mit weiter wachsendem $\bar{V}$ rasch abnehmenden zweiten Summanden in (27) bestimmt wird. Bei $\bar{V} = 1$ tritt naturgemäß eine Inflexion ein. Deren beobachtete Lage ließe umgekehrt in allen praktischen Fällen die Feststellung der wahrscheinlichsten Voltgeschwindigkeit und damit eine Zurückführung der betreffenden Kurve auf die für die spezielle Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten charakteristische Grundkurve zu. Zur Sicherstellung des aus der Kurvenkrümmung immerhin nicht leicht erkennbaren Inflexionspunktes könnte der ihm zugeordnete Relativwert 0,5725 der Ordinate aufgesucht werden. Mit größerer Genauigkeit, weil weniger von möglichen Unsicherheiten einzelner Kurvenstellen beeinflußt, wäre andererseits der wahrscheinlichste Wert der Energie aus deren arithmetischem Mittelwert V_m herleitbar mit Benutzung der Beziehung

$$V_w = 0{,}886 \,.\, V_m.$$

Denn V_m ergibt sich aus dem Gesamtverlaufe der z-Kurve als Quotient aus der Größe der von der z-Kurve und den beiden Koordinatenachsen begrenzten Fläche und der Gesamtelektronenzahl, d. i. dem Maximalwerte von z.

2. *Homogenes Feld.* — Es sollen die beiden früher angenommenen Fälle der räumlichen Verteilung der Emission vorausgesetzt sein und im einzelnen betrachtet werden.

a) *Allseitig gleiche Ausstrahlung.* Durch Einsetzen von (25) in (18b) findet man

$$(28)\quad \begin{cases} y = z - N\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\bar{V}} \cdot \int_{\bar{V}}^{\infty} \bar{V}'^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\bar{V}'} \cdot d\bar{V}' \\ = z - N\sqrt{\bar{V}} \cdot \left\{1{,}0227 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\bar{V}} \cdot e^{-\bar{V}} - \Psi(\sqrt{\bar{V}})\right\}, \end{cases}$$

wenn das an erster Stelle stehende Integral durch das mit wachsendem Argument rasch einem Grenzwerte zustrebende, anfänglich aber sehr nahe geradlinig ansteigende Integral

$$\Psi(\sqrt{\bar{V}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\bar{V}}} e^{-x^2} \cdot dx$$

ersetzt wird. Der durch eigene Berechnung festgestellte Verlauf beider Integrale möge durch Fig. 6 wiedergegeben werden. Ihr oberer Grenzwert entspricht dem in (28) auftretenden Zahlenwerte.

Wird in (28) z durch seinen Wert (23) ersetzt, so folgt

$$(28a)\quad y = N \cdot \{1 + \sqrt{\bar{V}} \cdot \Psi(\sqrt{\bar{V}}) - 1{,}0227\sqrt{\bar{V}} - \Phi(\bar{V})\}.$$

Wie Kurve $\bar{y}_a$ der Fig. 5 zeigt, fällt y schon bei sehr kleinen Gegenspannungen sehr stark ab und ist über $\bar{V} = 2$ kaum mehr praktisch verfolgbar. Charakteristisch ist der Ordinatenwert 0,088 für $\bar{V} = 1$. Die Reduktion der in der Beobachtung benutzten Spannungen auf den etwa derart ermittelten wahrscheinlichsten Wert der auftretenden Austrittsgeschwindigkeiten würde die gezeichnete y-Kurve als gemeinsame Grundkurve ergeben müssen.

Die durch Differentiation der y-Kurve zu findende Verteilung der Normalkomponenten der Voltgeschwindigkeit wird durch folgenden Ausdruck dargestellt:

Setzt man die Werte (27) und (28a) in (19) ein, so folgt

$$(29) \quad -\frac{d\bar{y}}{d\bar{V}} = P(\bar{V}_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{V}} + \frac{0{,}511}{\sqrt{\bar{V}}} - \frac{1}{2\sqrt{\bar{V}}} \cdot \Psi(\sqrt{\bar{V}}).$$

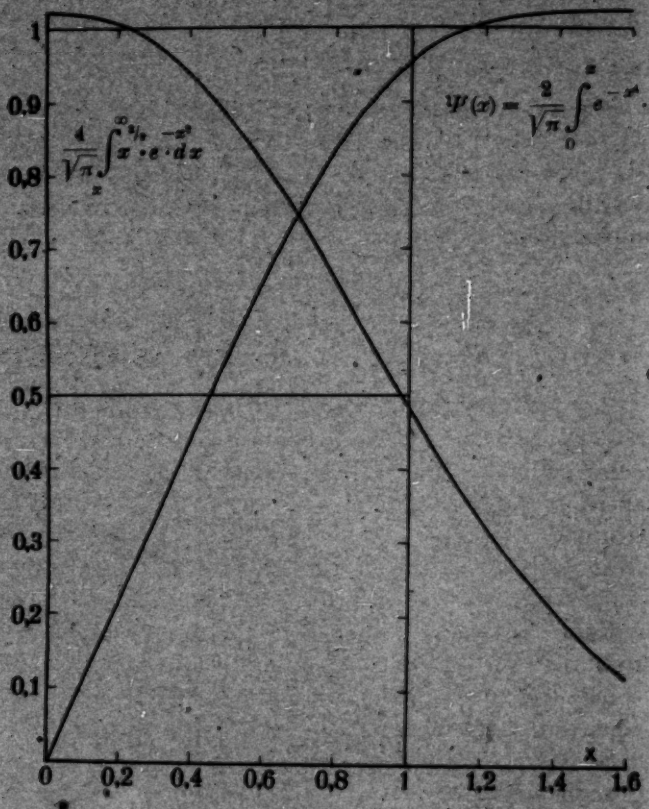


Fig. 6.

oder auch

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\bar{V}}} \int_{\bar{V}}^{\infty} \bar{V}^{3/2} \cdot e^{-\bar{V}^2} d\bar{V},$$

was mit Hilfe der Fig. 6 leicht ausgewertet werden kann.

β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz. Nach Einsetzen von (25) in (20a) ergibt sich einfach

$$(30)\qquad \begin{cases} y = z - N \cdot \bar{V} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\bar{V}}^{\infty} \bar{V} \cdot e^{-\bar{V}^2} d\bar{V} \\ = z - N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \bar{V} \cdot e^{-\bar{V}^2} \end{cases}$$

und nach Elimination von z

$$(30a)\qquad y = N\{1 - \Phi(\bar{V})\}.$$

Die y-Kurve verläuft jetzt, wie durch o der Fig. 5 angezeigt wird, wesentlich flacher. Ihre Transformation in die z-Kurve hätte jetzt mittels (21) zu erfolgen. Umgekehrt findet man mit Hilfe dieser letzteren Gleichung die Verteilung der Normalkomponenten

$$(31)\qquad -\frac{d\bar{y}}{d\bar{V}} = P(\bar{V}_n) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{V}^2}$$

II. Austrittsarbeit und innere Geschwindigkeiten.

Besteht die Möglichkeit der Existenz eines Oberflächenfeldes, so erheben sich nach Feststellung der auf die äußeren Geschwindigkeiten bezüglichen Verhältnisse sofort zwei weitere Fragen: 1. Welche Verteilung der inneren Geschwindigkeiten[1]) entspricht der durch den Versuch direkt ermittelbaren Verteilung der äußeren Geschwindigkeiten? 2. Auf welche Weise kann das Vorhandensein eines Oberflächenfeldes und die Größe der durch dasselbe geforderten Austrittsarbeit überhaupt festgestellt werden?

Zur Behandlung dieser Fragen ist der Untersuchung der Mengenverteilung die unter *A*, I, 2 verzeichnete Kenntnis über den Einfluß des Oberflächenfeldes auf die Elektronenbewegung zugrundezulegen.

1. Innere und äußere räumliche Verteilung.

Das Vorhandensein eines Oberflächenfeldes beeinflußt sowohl die Geschwindigkeit wie die räumliche Verteilung der

1) Man erkennt aus der schon unter A, I, 2 gegebenen Definition, daß der von Hrn. Lenard, l. c. p. 182ff., eingeführte und eingehend präzisierte Begriff der *inneren* Geschwindigkeit hier in engerem Sinne verstanden ist (von Hrn. Ramsauer, l. c. p. 1145ff., mit V_3 bezeichnet), da noch hinzukommende Vorgänge im Materialinneren der emittierenden Substanz hier nicht in den Kreis der Betrachtung gezogen werden.

emittierten Elektronen. Der erstere Einfluß ist sehr einfacher Art; er besteht in der Verringerung aller Voltgeschwindigkeiten um den Betrag der Austrittsarbeit. Auf den zweiten soll hier besonders eingegangen werden.

Es werde ein unendlich kleines Flächenelement als Elektronenquelle vorausgesetzt und untersucht, welche Beziehungen zwischen der räumlichen Verteilung der Elektronenzahl an der inneren bzw. äußeren Grenze des angenommenen Oberflächenfeldes bestehen. Der Betrachtung seien wieder die beiden einfachen Fälle allseitig gleicher bzw. nach dem Cosinusgesetze erfolgender Emission zugrundegelegt, durch welche im vorhergehenden das Gesetz der äußeren Verteilung festgelegt worden war. Da aber jetzt unter der Emission die Ausstrahlung in das Oberflächenfeld zu verstehen ist, so beziehen sich die beiden Annahmen jetzt auf die innere räumliche Verteilung, zu der die äußere zu suchen ist.

α) Allseitig gleiche Ausstrahlung.

Wird wie früher mit α der ursprüngliche „innere", mit α' der zugehörige „äußere" Emissionswinkel bezeichnet, so gilt für die innere Verteilung nach (9)

$$dy = N_i \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.$$

Ersetzt man den Winkel α durch den zugehörigen α' gemäß (7b), so folgt sofort die äußere Verteilung

$$dy = N_i \frac{\sin\alpha' \cdot \cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^a}{V_0^i} \cdot \sin^2\alpha'}} \cdot \frac{V_0^a}{V_0^i} \cdot d\alpha' \,. \tag{32}$$

Während die erstere nur vom Emissionsgesetze bestimmt wird, ist die letztere außerdem sowohl vom Absolutwerte der inneren Austrittsgeschwindigkeit als von der Größe der Austrittsarbeit, um welche sich V_0^a von V_0^i unterscheidet, abhängig. Auch die Abhängigkeit vom Winkel ist in beiden Fällen gänzlich verschieden. Während die im Einheitswinkel liegende Elektronenmenge $dy/d\alpha$ beim Eintritt in das Oberflächenfeld mit wachsendem α dauernd steigt, nimmt sie beim Austritt zunächst bis zu einem Maximum zu und fällt dann schließlich auf Null herab. Eine Veranschaulichung geben die Kurven i und a der Fig. 7 (letztere für den Spezialfall $V_0^i = 2$ Volt, $\Pi = 0{,}5$ Volt), deren Ordinaten die Werte von $dy/d\alpha$ bzw. $dy/d\alpha'$ darstellen, so daß die Elektronenzahl eines beliebigen

Winkelbereiches jeweils durch Integration (Flächenermittlung) zu erhalten wäre. Die als Abszissen aufgetragenen Winkel haben für i die Bedeutung des inneren Winkels α, für a des äußeren α'. Die Zusammengehörigkeit beider ergibt sich aus (7); sie ist also von den Geschwindigkeiten abhängig. Im Beispiel entspricht dem Winkel $\alpha = 60°$ der Wert $\alpha' = 90°$; es muß also die von der Kurve i begrenzte Fläche, genommen bis 60°, ebenso groß sein als die von der Kurve a begrenzte ganze Fläche bis 90°.

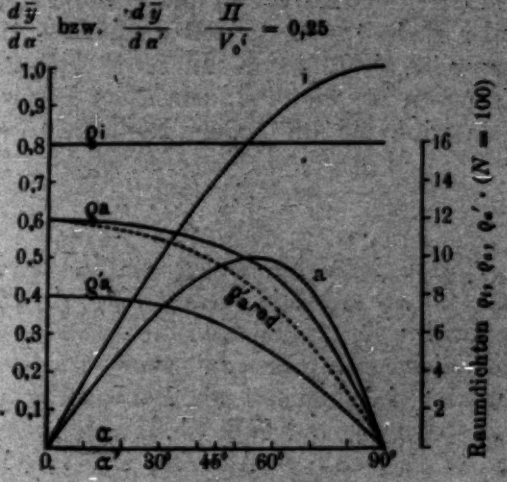


Fig. 7.

Da dem Winkelbereich α bis $\alpha + d\alpha$ bzw. α' bis $\alpha' + d\alpha'$ die Fläche der Einheitskugel $2\pi \sin\alpha \cdot d\alpha$ bzw. $2\pi \sin\alpha' d\alpha'$ zugehört, so findet sich für die *Raumdichte* der Elektronen in den beiden Fällen

$$\varrho_i = \frac{N_i}{2\pi}$$

$$\varrho_a = \frac{N_i}{2\pi} \frac{V_0^a}{V_0^i} \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^a}{V_0^i} \cdot \sin^2\alpha'}}, \tag{33}$$

oder es ist das Raumdichteverhältnis

$$\frac{\varrho_a}{\varrho_i} = \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha'\, d\alpha'} = \frac{V_0^a}{V_0^i} \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^a}{V_0^i} \sin^2\alpha'}},$$

was mit dem früheren Ausdrucke (7b) identisch ist.

Während die innere Raumdichte, der Voraussetzung entsprechend, eine Konstante ist, hängt die äußere sowohl vom Winkel als vom Verhältnis der beiden Voltgeschwindigkeiten ab. Das Auftreten dieses Quotienten hat zur wichtigen Folge, daß die Verteilungskurve der äußeren Geschwindigkeiten in allen Fällen durch den Koordinatennullpunkt gehen muß, wie auch immer die innere Verteilung beschaffen sein mag (vgl. hierzu im Späteren Kap. II, Austrittsarbeit, und Kap. III, A). Der dem oben gewählten Beispiel entsprechende Verlauf mit dem Winkel wird durch die Kurven ϱ_i und ϱ_a der Fig. 7 angezeigt. Bei vertikaler Emission, die gemäß der ganzen theoretischen Betrachtungsweise als Emission unter sehr kleinem Öffnungswinkel aufzufassen ist, wie dies auch in der Praxis tatsächlich der Fall sein wird, hat die äußere Raumdichte den größten Wert

$$\varrho_a = \frac{N_i}{2\pi} \frac{V_0^a}{V_0^i}.$$

Derselbe ist aber immerhin gegen die innere Raumdichte herabgesetzt, um so mehr, je kleiner V_0^a/V_0^i. Diese Reduktion würde nur für die unendlich kleine Anzahl streng vertikal austretender Elektronen nicht zu erwarten sein. Mit wachsendem Austrittswinkel nimmt die Raumdichte ϱ_a erst langsam, dann rascher bis auf Null ab. Auch in diesen Fällen würde nur streng paralleler Austritt, also das Fehlen eines Winkelbereiches, keine Reduktion erwarten lassen.

Die Abhängigkeit der äußeren Raumdichte vom Geschwindigkeitsverhältnis möge zunächst noch am Beispiel $V_0^i = 1$ Volt, $\Pi = 0{,}5$ Volt erkannt werden. Wie die entsprechende Kurve ϱ_a' (Fig. 7) zeigt, erreicht hier die Verringerung bereits sehr erhebliche Beträge. Reduziert man aber die Ordinaten auf gleichen Anfangspunkt mit ϱ_a zur Beurteilung des Relativverlaufes mit dem Austrittswinkel, so findet man zwar eine Verringerung der Kurvenkrümmung, doch sind die Abweichungen der beiden Kurven ϱ_a und ϱ_a' red. voneinander nicht allzu erheblich, obwohl die Austrittsarbeit bei der einen 50 Proz., bei der anderen nur 25 Proz. der inneren Geschwindigkeit beträgt.

In Fig. 8 sei endlich der Gang der äußeren Raumdichte mit der Größe der inneren Geschwindigkeit V_0^i bei konstant gehaltenem Werte $\Pi = 0{,}5$ Volt für die Austrittswinkel $\alpha' = 0$

und 45° angegeben. Im letzteren Falle ist die Raumdichte durchweg geringer. Reduziert man die Kurve auf gleichen Ordinatenwert mit der ersteren (etwa bei $V_0' = 1{,}5$ Volt, d. h. $V_0^a = 1$ Volt), so zeigt sich im Relativverlaufe bei 45° in geringem Maße eine Begünstigung der schnelleren, eine Benachteiligung der ursprünglich langsameren Elektronen.

Die vorstehenden Feststellungen gewinnen unmittelbare praktische Bedeutung für die Beurteilung der Ergebnisse solcher Versuche, welche die direkte Ermittlung der äußeren Raum-

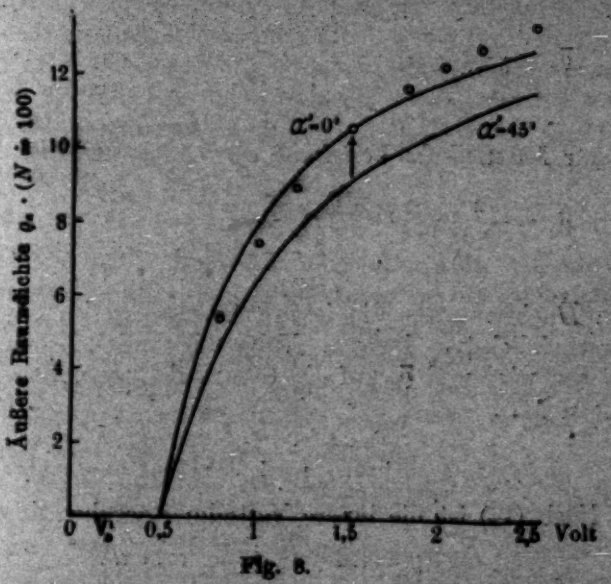


Fig. 8.

dichte — absolut oder relativ — zum Gegenstande haben. Hierher gehören vornehmlich die Untersuchungen äußerer Geschwindigkeitsverteilungen auf Grund magnetischer Ablenkungsbeobachtungen an ausgeblendeten Strahlbüscheln, wie sie von den Herren **Füchtbauer**[1]) und **Baerwald**[2]) auf die Elektronenemission von Kanalstrahlen und von Hrn. **Ramsauer**[3]) auf die lichtelektrischen Kathodenstrahlen bezogen worden sind, da die bei den betreffenden Anordnungen

1) Chr. Füchtbauer, Physik. Zeitschr. 7. p. 748. 1906; Ann. d. Phys. 28. p. 301. 1907.

2) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 42. p. 1287. 1913.

3) C. Ramsauer, l. c., 1914.

meßbaren Elektronenmengen jeweils der äußeren räumlichen Dichte des durch das Magnetfeld isolierten Strahles proportional sind (vgl. hierzu das unmittelbar Nachfolgende und Kap. III).

Der allgemeine Ausdruck (33) für die äußere Raumdichte nimmt in den früher (B, I, c und d) eingeführten speziellen Fällen der Elektronenverteilung die folgenden Formen an:

Für *Maxwellsche Verteilung der Lineargeschwindigkeiten* wird

$$(34) \qquad \bar{\varrho}_a = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\bar{V}_i}{2}} \cdot \frac{\bar{V}_i - \bar{\Pi}}{\sqrt{\bar{V}_i}} \cdot \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{\bar{V}_i - \bar{\Pi}}{\bar{V}_i} \sin^2\alpha'}} \cdot d\bar{V}_i$$

und für *Maxwellsche Verteilung der Voltgeschwindigkeiten*

$$(35) \qquad \bar{\varrho}_a = \frac{2}{\pi^{3/2}} \cdot \bar{V}_i \cdot e^{-\bar{V}_i^2} \cdot (\bar{V} - \bar{\Pi}) \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{\bar{V}_i - \bar{\Pi}}{\bar{V}_i} \sin^2\alpha'}} \cdot d\bar{V}_i,$$

wenn $\bar{\Pi}$ ebenso wie die innere Geschwindigkeit $\bar{V}_i$ mit der wahrscheinlichsten inneren Voltgeschwindigkeit als Einheit gemessen wird und $\bar{\varrho}_a$ auf die Gesamtelektronenmenge $N_i = 1$ bezogen ist.

β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz.

Nach (14) ist die innere Verteilung gegeben durch

$$dy = 2 N_i \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha .$$

Daraus findet sich nach dem oben benutzten Verfahren die äußere Verteilung

$$(36) \qquad dy = 2 N_i \frac{V_0^a}{V_0^i} \cdot \sin\alpha' \cdot \cos\alpha' \cdot d\alpha' .$$

Die Abhängigkeit vom Winkel ist also innen und außen die gleiche; nur erscheint die Elektronenmenge außen bei allen Winkeln im Verhältnis der Voltgeschwindigkeiten verringert, wie dies unter α) speziell für vertikalen Austritt der Fall war. Die Verteilungskurven (i bzw. a der Fig. 9), wieder für $V_0^i = 2$ Volt, $\Pi = 0{,}5$ Volt) steigen vom Nullwerte bis zu einem Maximum bei 45° an und fallen von hier symmetrisch wieder auf Null ab.

Die Raumdichten sind

$$\varrho_i = \frac{N_i}{\pi} \cdot \cos \alpha$$

und

$$\varrho_a = \frac{N_i}{\pi} \frac{V_0^a}{V_0^i} \cos \alpha' .$$

Der Gang mit dem Winkel ist also auch hier in beiden Fällen der gleiche; das Verhältnis der Absolutwerte ist

$$\frac{\varrho_a}{\varrho_i} = \frac{V_0^a}{V_0^i}$$

(Kurven ϱ_a und ϱ_i der Fig. 9).

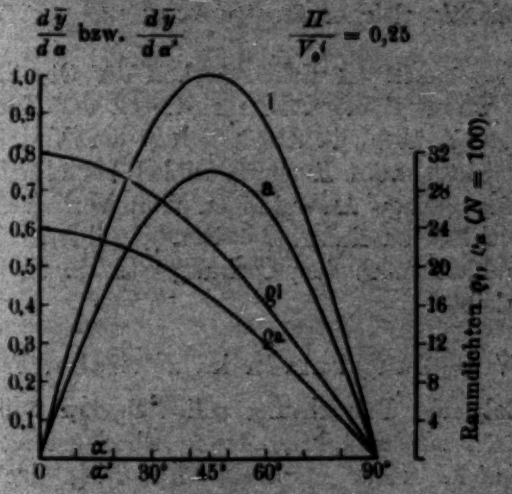


Fig. 9.

Für *Maxwellsche Verteilung der Lineargeschwindigkeiten* wird

$$(34a) \qquad \bar{\varrho}_a = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{\bar{V}_a + \bar{\Pi}}{2}} \cdot \frac{\bar{V}_a}{\sqrt{\bar{V}_a + \bar{\Pi}}} \cdot \cos \alpha' \cdot d\bar{V}_a$$

und für *Maxwellsche Verteilung der Voltgeschwindigkeiten*

$$(35a) \qquad \bar{\varrho}_a = \frac{4}{\pi^{1/2}} \cdot \bar{V}_a \cdot (\bar{V}_a + \bar{\Pi}) \cdot e^{-(\bar{V}_a + \bar{\Pi})^2} \cdot \cos \alpha' \cdot d\bar{V}_a ,$$

wenn die Austrittsarbeit $\bar{\Pi}$ ebenso wie die äußere Geschwindigkeit $\bar{V}_a$ mit der wahrscheinlichsten *inneren* Voltgeschwindigkeit V_{wi} als Einheit gemessen wird. Diese steht nur wahr-

scheinlichsten *äußeren Voltgeschwindigkeit* V_{ae} (für die $\bar{\varrho}_a$ ein Max. hat) in folgender Beziehung:

Im ersten Falle ist

$$\bar{V}_{ae} = \frac{V_{ae}}{V_{ai}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\bar{\Pi}^2 + 6\bar{\Pi} + 1} - (\bar{\Pi} - 1)\right\},$$

und im zweiten besteht die kubische Gleichung

$$2\bar{V}_{ae}^3 + 4\bar{\Pi}\bar{V}_{ae}^2 + 2(\bar{\Pi}^2 - 1)\cdot\bar{V}_{ae} - \bar{\Pi} = 0,$$

wo

$$\bar{V}_{ae} = \frac{V_{ae}}{V_{ai}} \quad \text{und} \quad \bar{\Pi} = \frac{\Pi}{V_{ai}}$$

ist.[1]) Diese Beziehungen gelten auch für vertikale Emission im Falle allseitig gleicher Ausstrahlung.

Zur Frage nach der Erkennbarkeit des Oberflächenfeldes liefern die vorausgehenden Betrachtungen das Ergebnis, daß Untersuchungen über die Abhängigkeit der Verteilungskurve der Raumdichten vom Emissionswinkel bei allseitig gleicher Ausstrahlung geringe Andeutungen vom Vorhandensein eines Oberflächenfeldes zu finden gestatten[2]), während sie im Falle der Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetze in dieser Hinsicht erfolglos bleiben.

2. Verteilungskurven im zentralen Felde.

Die folgende Betrachtung soll sich auf äußere Felder solcher Größe beschränken, deren Überlagerung über das Oberflächenfeld keine merkliche Änderung der Austrittsarbeit verursacht, so daß die Verteilungskurve im Beschleunigungsgebiete als Parallele zur Spannungsachse erscheint und daher nur der Verlauf im Verzögerungsgebiete näherer Untersuchung bedarf.

---

1) Als Lösungen der kubischen Gleichung ergeben sich, zu späterer Benutzung, die folgenden zusammengehörigen Werte:

$\bar{V}_{ae}$	$\bar{\Pi}$
1	0
0,9	0,138
0,8	0,285
0,7	0,45
0,6	0,637
0,5	0,866

2) Weiteres hierzu vgl. Kap. II und Kap. III, A.

Erfolgt die *Emission streng in Normalenrichtung*, Innenkugel von molekularer Größe, so erfahren alle das Oberflächenfeld durchsetzenden Elektronen einen Geschwindigkeitsverlust um Π Volt, und ihre Anzahl erleidet keine Veränderung. Die beobachtbare Verteilungskurve der austretenden Elektronen unterscheidet sich von der Kurve der inneren Verteilung bei konstantem Π lediglich durch das Fehlen aller Voltgeschwindigkeiten $V_0^i < \Pi$, kann also aus dieser durch einfache Parallelverschiebung (Abszissenreduktion) erhalten werden.

Erfolgt die *Emission von ebenen Flächenelementen*, deren Normale mit der Richtung des Oberflächenfeldes zusammenfällt, im einfachsten Falle von einer ausgedehnten Ebene, so ist mit der Verringerung aller Voltgeschwindigkeiten um Π eine Reduktion der austretenden Elektronenzahl verbunden, deren Größe von der inneren räumlichen Verteilung der emittierten Elektronen abhängt.

a) Allseitig gleiche innere Ausstrahlung.

Bei *einheitlicher innerer Austrittsgeschwindigkeit*

$$V_0^i = V_0^a + \Pi$$

ist die Gesamtmenge der mit der Geschwindigkeit V_0^a aus dem Oberflächenfeld austretenden Elektronen nach (9) und (32)

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} N &= N_i \cdot \int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{V_0^a}{V_0^i}}} \sin\alpha \cdot d\alpha = N_i \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha' \cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^a}{V_0^i}\sin^2\alpha'}} \cdot \frac{V_0^a}{V_0^i} \cdot d\alpha' \\ &= N_i \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\Pi}{V_0^a + \Pi}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Verteilungskurve setzt sich aus einer Parallelen zur Mengenachse am Abszissenorte $V = V_0^a$ und einer Parallelen zur Spannungsachse mit der Ordinate N zusammen. Mit einer Parallelverschiebung der Abszisse um Π nach kleineren Werten ist also — gegenüber der inneren Verteilungskurve — eine Verringerung der Ordinate im Verhältnis

$$\frac{N}{N_i} = 1 - \sqrt{\frac{\Pi}{V_0^i}}$$

verbunden.

Bei *nicht einheitlicher innerer Austrittsgeschwindigkeit* wird die Ordinate der Kurve der äußeren Verteilung am Orte V_a nach vorstehendem

$$z_a = z_i - \sqrt{\Pi} \cdot \sum_{V_i}^{V_{i\max}} \frac{(\text{grad } z_i)_{V_i}}{\sqrt{V_i}}, \tag{39}$$

oder bei kontinuierlichem Übergange der Geschwindigkeiten ineinander

$$z_a = z_i - N_i \sqrt{\Pi} \int_{V_i}^{\infty} \frac{P(V_i)}{\sqrt{V_i}} \, dV_i, \tag{39a}$$

falls $P(V_i)\, dV_i$ die Relativzahl der im Gebiete V_i bis $V_i + dV_i$ der Voltgeschwindigkeiten befindlichen inneren Elektronen, N_i die Gesamtzahl derselben bezeichnet und als obere Grenze der Geschwindigkeit wie früher der Extremfall $V_{i\max} = \infty$ angenommen wird. z_a ergibt sich also durch Subtraktion eines über die innere Geschwindigkeitsverteilung sich erstreckenden Integralausdruckes von den jeweils einer um Π nach höheren Werten verschobenen Abszisse zugehörigen Ordinatenwerten derjenigen Zentralfeldkurve, die bei fehlendem Oberflächenfelde zu beobachten wäre. Die Gesamtzahl aller austretenden Elektronen wird hiernach

$$N = (z_a)_{V_a = 0} = (z_i)_{\Pi} - N_i \sqrt{\Pi} \int_{\Pi}^{\infty} \frac{P(V_i)}{\sqrt{V_i}} \, dV_i. \tag{39b}$$

Die Verteilung der äußeren Geschwindigkeiten auf diese Gesamtzahl findet sich zu

$$P(V_a) = \left(\frac{dz_a}{dV}\right)_{V_a} = P(V_i) \cdot \left\{1 - \sqrt{\frac{\Pi}{V_i}}\right\}, \quad \text{wo } V_i = V_a + \Pi. \tag{39c}$$

Die Spezialfälle innerer Geschwindigkeitsverteilung erledigen sich nach vorstehendem ohne weiteres. Als von weiterem Interesse sei im einzelnen nur noch auf den Fall der *Maxwellschen Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten* eingegangen. Die Gleichung der Zentralfeldkurve wird

$$z_a = z_i - N_i \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\Pi} \cdot \int_{\bar{V}_i}^{\infty} \bar{V}^{1/2} \cdot e^{-\bar{V}} \cdot d\bar{V}, \tag{40}$$

wenn Π ebenso wie die vorkommenden Potentialdifferenzen mit der wahrscheinlichsten inneren Voltgeschwindigkeit als Einheit gemessen werden. Nach (28) ist auch

$$z_a = z_i - (z_i - y_i) \cdot \sqrt{\frac{\Pi}{V_i}}, \tag{40a}$$

wonach z_a besonders einfach aus den für fehlendes Oberflächenfeld konstruierten Zentral- und Homogenfeldkurven (Fig. 5) herleitbar wird. Dabei beziehen sich die mit dem Index a bzw. i bezeichneten Größen jeweils auf die Spannungen V_a bzw. V_i. Wird z_a relativ zur austretenden Gesamtelektronenmenge N angegeben, so findet sich hierfür nach (28) und (39b)

$$\frac{z_a}{N} = \frac{z_i - (z_i - y_i)\sqrt{\frac{\Pi}{V_i}}}{(y_i)_\Pi}, \tag{40b}$$

wenn y_i und z_i den Grundkurven entnommen sind.

Für die äußere Geschwindigkeitsverteilung gilt absolut

$$P(V_a)\,dV_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{V_{wi}^3} \cdot V_i^2 \cdot e^{-\frac{V_a^2}{V_{wi}^2}} \cdot \left\{1 - \sqrt{\frac{\Pi}{V_i}}\right\} dV_i. \tag{40c}$$

Während die erhaltenen Beziehungen eine unmittelbare Ableitung der äußeren Verhältnisse aus bestimmt angenommenen inneren ermöglichen, bedarf es für ihre direkte Anwendung auf die lediglich auf die äußeren Verhältnisse sich beziehende Beobachtung eines Ersatzes aller inneren Größen in ihnen durch die entsprechenden äußeren. Hierzu ist für $V_i = V_a + \Pi$ und an Stelle der wahrscheinlichsten inneren Geschwindigkeit V_{wi} die wahrscheinlichste äußere V_{wa} einzuführen. Werden die auftretenden Relativwerte V_a/V_{wa} und Π/V_{wa} mit $\overline{V}_a$ und $\overline{\Pi}$ bezeichnet, so wird die äußere Geschwindigkeitsverteilung durch

$$\left.\begin{aligned} P(\overline{V}_a)\,d\overline{V}_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{V_{wa}^3}{V_{wi}^3} \cdot (\overline{V}_a + \overline{\Pi})^2 \cdot \\ \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\overline{\Pi}}{\overline{V}_a + \overline{\Pi}}}\right) \cdot e^{-(\overline{V}_a + \overline{\Pi})^2 \cdot \frac{V_{wa}^2}{V_{wi}^2}} \cdot d\overline{V}_a \end{aligned}\right\} \tag{40d}$$

dargestellt, worin noch zu setzen wäre

$$\left(\frac{V_{wa}}{V_{wi}}\right)^2 = \frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{\overline{\Pi}} - \sqrt{1+\overline{\Pi}}}{(1+\overline{\Pi})^2 \cdot (\sqrt{\overline{\Pi}} - \sqrt{1+\overline{\Pi}})}. \tag{40e}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{V_{w\,a}}{V_{w\,i}} + \frac{\Pi}{V_{w\,i}} = \mathsf{V}$$

und

$$1 + \frac{\Pi}{V_{w\,a}} = \mathsf{P},$$

so bestehen außerdem zwischen den maßgebenden Bestimmungsstücken die folgenden Beziehungen

$$\sqrt{\frac{\Pi}{V_{w\,i}}} = \sqrt{\Pi} = \frac{\mathsf{V}^{1/2} - \sqrt{\mathsf{V}}}{\mathsf{V}^2 - {}^3/_4}$$

und

$$\sqrt{\frac{\Pi}{V_{w\,a}}} = \sqrt{\Pi} = \frac{\mathsf{P}^{1/2} - \sqrt{\mathsf{P}}}{\mathsf{P}^2 \cdot \frac{V_{w\,a}^2}{V_{w\,i}^2} - \frac{3}{4}},$$

deren Aussagen aus den numerischen Angaben der nachfolgenden Tab. 1 ersichtlich werden. Bevor hierauf näher eingegangen wird, sei der weitere Spezialfall der Emission betrachtet:

β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz.

Bei *einheitlicher innerer Austrittsgeschwindigkeit* V_0' ist die Gesamtmenge der mit der Geschwindigkeit $V_0^a = V_0' - \Pi$ aus dem Oberflächenfelde austretenden Elektronen nach (36)

$$(41) \qquad N = 2 N_i \frac{V_0^a}{V_0'} \int_0^{\pi/2} \sin\alpha' \cdot \cos\alpha' \, d\alpha' = N_i \frac{V_0^a}{V_0^a + \Pi};$$

es findet also eine Elektronenverminderung im Verhältnis V_0^a / V_0' statt.

Bei *nicht einheitlicher innerer Austrittsgeschwindigkeit* ergibt sich dementsprechend für die Zentralfeldkurve

$$(42) \qquad z_a = z_i - \Pi \sum \frac{(\operatorname{grad} z_i)_{V_i}}{V_i}$$

oder auch

$$(42a) \qquad z_a = z_i - N_i \, \Pi \int_{V_i}^{\infty} \frac{P(V_i)}{V_i} \cdot dV_i .$$

Die Ordinate der entsprechenden Differentialkurve ist

$$(42b) \qquad N_i \cdot P(V_a) = \left(\frac{dz_a}{dV}\right)_{V_a} = N_i \cdot P(V_i) \left\{1 - \frac{\Pi}{V_i}\right\}.$$

Bei *Maxwellscher Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten* erhalten diese Ausdrücke die folgende Form:

$$z_a = z_i - N_i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \overline{\Pi} \cdot e^{-\overline{V}_i^2} \tag{43}$$

oder nach (30)

$$z_a = z_i - (z_i - y_i) \cdot \frac{\overline{\Pi}}{\overline{V}_i}. \tag{43a}$$

Relativ zur austretenden Gesamtelektronenzahl (bei $V_a = 0$) findet sich die bei V_a meßbare Anzahl zu

$$\frac{z_a}{N} = \frac{z_i - (z_i - y_i) \cdot \frac{\overline{\Pi}}{\overline{V}_i}}{(y_i)_{\overline{\Pi}}}. \tag{43b}$$

Die äußere Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar ist durch

$$P(V_a)\, dV_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{V_{wi}^3} \cdot V_i (V_i - \Pi) \cdot e^{-\frac{V_i^2}{V_{wi}^2}} \cdot dV_i \tag{43c}$$

gegeben und nach Elimination der inneren Größen durch

$$\left\{ \begin{aligned} P(\overline{V}_a)\, d\overline{V}_a &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(\overline{V}_a + \overline{\Pi}) \cdot \overline{V}_a}{(1+\overline{\Pi})^3} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\overline{\Pi}}{2} \right\} \cdot e^{-\left(\frac{\overline{V}_a + \overline{\Pi}}{1+\overline{\Pi}}\right)^2 \cdot \frac{2+\overline{\Pi}}{2}} \cdot d\overline{V}_a. \end{aligned} \right. \tag{43d}$$

Hierzu gelten, bei Benutzung der eingeführten Abkürzungen, die Beziehungen

$$\frac{V_{wa}}{V_{wi}} = \frac{\vee}{2\vee^2 - 1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\overline{\Pi}}{2}}}{1 + \overline{\Pi}}, \tag{43e}$$

$$\frac{\Pi'}{V_{wi}} = \overline{\Pi} = \frac{2\vee(\vee^2 - 1)}{2\vee^2 - 1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\overline{\Pi}}{2}}}{1 + \overline{\Pi}} \cdot \Pi,$$

$$\frac{\Pi'}{V_{wa}} = \overline{\Pi} = 2(\vee^2 - 1),$$

welche die ausgezeichneten Werte der inneren und äußeren Größen miteinander verbinden. Eine numerische Zusammenstellung derselben für den gegenwärtigen und den vorbetrachteten Fall — die der Kürze halber als α- und β-Fall bezeichnet seien — enthält Tab. 1.

Tabelle 1.

$\frac{\Pi}{V_{\infty i}}$	α-Fall		β-Fall	
	$\Pi/V_{\infty a}$	$V_{\infty a}/V_{\infty i}$	$\Pi/V_{\infty a}$	$V_{\infty a}/V_{\infty i}$
0	0	1	0	1
0,1	0,105	0,954	0,108	0,927
0,2	0,225	0,890	0,233	0,857
0,3	0,363	0,826	0,379	0,791
0,4	0,524	0,764	0,549	0,729
0,5	0,709	0,705	0,744	0,672

Während die äußere Geschwindigkeit jedes einzelnen Elektrons gegen seine innere um den Wert der Austrittsarbeit verringert wird, erfährt die wahrscheinlichste Geschwindigkeit, wie man sieht, infolge der geänderten Mengenverteilung eine geringere Verminderung. Diese ist außerdem weniger erheblich bei allseitig gleicher Ausstrahlung (α-Fall) als bei Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetze (β-Fall). Es ist zu beachten, daß infolgedessen der einem bestimmten Π zugehörige Wert von $\frac{\Pi}{V_{\infty i}}$ in beiden Fällen etwas verschiedene Größe besitzt.

Nach diesen Feststellungen ist für die Beurteilung der Ergebnisse experimenteller Erfahrung die Beantwortung der folgenden beiden Fragen von Bedeutung:

1. Kann für die Verteilung der äußeren Geschwindigkeiten in analoger Weise wie für diejenige der inneren unabhängig von deren Absolutwert eine für den speziellen Emissionsvorgang charakteristische einheitliche Grundkurve erhalten werden dadurch, daß die einzelnen Geschwindigkeiten auf die wahrscheinlichste äußere Geschwindigkeit und die zugehörige Elektronenanzahl auf die austretende Gesamtzahl als Einheit bezogen werden?

2. Wie unterscheidet sich die so reduzierte Verteilungskurve (Grundkurve) der äußeren Geschwindigkeiten von derjenigen der inneren?

Die gemeinsame Erledigung beider Fragen soll am eingehend betrachteten Beispiele der Maxwellschen Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten erfolgen. Da in den zu betrachtenden Fällen die von der Verteilungskurve begrenzten, zu vergleichenden Flächen den entsprechenden Ordinaten-

werten proportional sind, so kann für die Untersuchung des Relativverlaufes, der jetzt ausschließlich in Frage steht, statt der Beziehung der jeweiligen Menge der Elektronen auf ihre Gesamtzahl auch die Beziehung der jeweiligen Ordinate der Verteilungskurve auf den Wert einer ausgezeichneten Ordinate, mit Vorteil der Ordinate des Maximums, benutzt werden. Dies möge der Einfachheit halber im folgenden geschehen.

Die Gleichung der Grundkurve der inneren Verteilung lautet dann

$$P(\bar{V}_i) = \bar{V}_i^2 \cdot e^{-\bar{V}_i^2+1}. \tag{44}$$

Die reduzierte Kurve der zugehörigen äußeren Verteilung ergibt sich aus (40d) bzw. (48d) durch Division durch den der jeweiligen wahrscheinlichsten äußeren Geschwindigkeit zugehörigen Ordinatenwert. Ihre Gleichung wird im *α-Falle*

$$P(\bar{V}_a) = \left(\frac{\bar{V}_a+\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}}\right)^2 \cdot \frac{1-\sqrt{\frac{\bar{\Pi}}{\bar{V}_a+\bar{\Pi}}}}{1-\sqrt{\frac{\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}}}} \cdot e^{-\left\{\left(\frac{\bar{V}_a+\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}}\right)^2-1\right\} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\bar{\Pi}}-\sqrt{1+\bar{\Pi}}}{\sqrt{\bar{\Pi}}-\sqrt{1+\bar{\Pi}}}}, \tag{45}$$

im *β-Falle*

$$P(\bar{V}_a) = \frac{V_a+\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}} \cdot \bar{V}_a \cdot e^{-\left\{\left(\frac{\bar{V}_a+\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}}\right)^2-1\right\} \frac{2+\bar{\Pi}}{3}}. \tag{46}$$

Beide Ausdrücke werden in der Tat, wie erforderlich, für $\bar{V}_a = 1$ zur Einheit, für $\bar{V}_a = 0$ und $= \infty$ zu Null.

Während $\bar{V}_a$ vom Absolutwerte von V_{ea} nicht abhängt, bleibt eine solche Abhängigkeit bei $\bar{\Pi}$ bestehen, solange Π als Konstante vorausgesetzt ist. Die erste Frage ist also auf Grund der erhaltenen Gleichungen zu verneinen. *Die Gestalt der reduzierten Kurve der äußeren Verteilung hängt vom Verhältnis der Austrittsarbeit zur wahrscheinlichsten äußeren Geschwindigkeit ab. Sie ist außerdem von der räumlichen Verteilung der Emission abhängig.*

Dem ähnlichen Baue der Gleichungen (44), (45) und (46) entsprechend, ist der Charakter der Kurven der inneren und äußeren Verteilung im wesentlichen der gleiche. Der Veranschaulichung diene Fig. 10. Sie zeigt zunächst die Differentialkurve — Grundkurve — für die inneren Geschwindig-

keiten [$P(\bar{V})$ ausgezogen] zusammen mit der Andeutung der zugehörigen Verteilung der äußeren Geschwindigkeiten für 4 verschiedene Werte des maßgebenden Verhältnisses $\bar{\bar{\Pi}}/V_{wi}$; von diesen beziehen sich 3 Werte auf den β-Fall und ein Wert auf den α-Fall. Man erkennt, daß die äußere und innere (relative) Verteilung bei kleinen Werten von $\bar{\bar{\Pi}}$ nahe identisch ist, und daß die mit wachsendem $\bar{\bar{\Pi}}$ zunehmenden Abweichungen einer relativen Steigerung der Anzahl kleiner und großer Geschwindigkeiten entsprechen. Bei gleichem $\bar{\bar{\Pi}}/V_{wi}$ sind die Abweichungen im α-Falle merklich kleiner als im β-Falle. Damit ist die zweite Frage beantwortet. (Über die gestrichelte Kurve vgl. Kapitel II.)

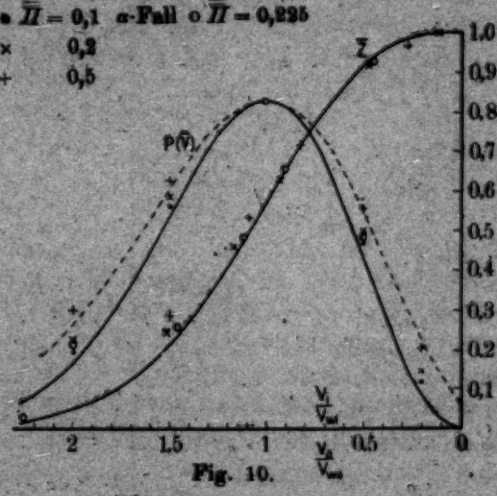


Fig. 10.

Bei der Integral-(Zentralfeld-)Kurve ($\bar{Z}$, für die inneren Geschwindigkeiten ausgezogen) macht sich der genannte Einfluß von $\bar{\bar{\Pi}}$, der bei größeren Werten des letzteren deutlich wird, im Auftreten eines flacheren Abfalles im Gebiete der großen Gegenspannungen, andererseits eines steileren Anstieges gegen die Ordinatenachse hin geltend. Ihre Gleichung mit $\bar{V}_a$ als unabhängig Variabler wäre durch Integration von (45) bzw. (46) zu erhalten.

3. Verteilungskurven im homogenen Felde.

Die Emission erfolge aus der ebenen Fläche der einen Platte eines Parallelplattenkondensators, dessen andere Platte

in ihrer ganzen praktisch unendlichen Ausdehnung als Auffänger wirke.

c) Allseitig gleiche innere Ausstrahlung.

Bei der verzögernden Potentialdifferenz V treffen alle Elektronen der äußeren Austrittsgeschwindigkeit V_0^a die Gegenplatte, deren Normalkomponente $V_0^a \cdot \cos^2\alpha' \geqq V$ ist, das sind alle diejenigen, die aus dem Oberflächenfeld im Winkelbereiche

$$0 \text{ bis } \alpha' = \arccos \sqrt{\frac{V}{V_0^a}}$$

austreten. Ihre Anzahl ist nach (32)

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} y_a &= N_i \int_0^{\alpha' = \arccos\sqrt{\frac{V}{V_0^a}}} \frac{\sin\alpha' \cdot \cos\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^a}{V_0^i}\sin^2\alpha'}} \cdot \frac{V_0^a}{V_0^i} \cdot d\alpha' \\ &= N_i \left\{ 1 - \sqrt{\frac{V+\Pi}{V_0^i}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Vergleich mit (11) zeigt, daß die y_a-Kurve aus der entsprechenden y_i-Kurve durch einfache Parallelverschiebung der letzteren zur Spannungsachse um die Größe Π hervorgeht. Der auftretende Maximalwert von y_a (bei $V = 0$) ist natürlich mit der auch im Zentralfeld (bei $V = 0$) erscheinenden Gesamtzahl N der austretenden Elektronen (38) identisch.

Im Falle *nicht einheitlicher Geschwindigkeit* ist die resultierende Kurve das Ergebnis der Summierung über alle um den gleichen Betrag Π verschobener innerer Einzelkurven. *Die y_a-Kurve geht also ganz allgemein aus der zugehörigen y_i-Kurve durch einfache Parallelverschiebung um Π hervor.* Dies folgt auch rein analytisch aus der Übertragung der früher (B, I, b) erwähnten Beziehungen auf die gegenwärtigen Verhältnisse. Hierbei ergibt sich nämlich

$$(48)\qquad (y_a)_V = (z_i)_{V+\Pi} - \sqrt{V+\Pi} \cdot \sum \frac{(\operatorname{grad} z_i)_{V_i}}{\sqrt{V_i}}$$

oder auch

$$(48a)\qquad y_a = z_i - N_i \sqrt{V+\Pi} \cdot \int_{V+\Pi}^{\infty} \frac{P(V_i)}{\sqrt{V_i}}\, dV_i,$$

wenn jetzt N_i die gesamte innere Elektronenzahl bezeichnet und die Größen y und z, wie bei (48) noch angedeutet ist, immer bei den durch ihre Indizes festgelegten Spannungen zu nehmen sind. Vergleicht man (48) und (48a) mit (18a) und (18b), so erkennt man ohne weiteres, daß y_a am Orte V den gleichen Wert besitzt wie y_i am Orte $V + \Pi$. Darnach ist auch die direkte Verteilungskurve der Normalkomponenten der äußeren Voltgeschwindigkeiten (dy_a/dV als Funktion von V) aus derjenigen der inneren Geschwindigkeiten durch Parallelverschiebung zu erhalten.

Den Zusammenhang zwischen der Homogen- und Zentralfeldkurve zeigt der Vergleich der vorstehenden Formeln mit (39) bzw. (39a), nämlich

$$(48b) \qquad z_a - y_a = N_i \{\sqrt{V+\Pi} - \sqrt{\Pi}\} \cdot \int_{V+\Pi_i}^{\infty} \frac{P(V_i)}{\sqrt{V_i}}\, dV_i,$$

was für $\Pi = 0$ notwendigerweise in die früher angegebene Gleichung (18b) der inneren Verteilung übergeht. An die Stelle der Gleichung (19), welche der Herleitung der z-Kurve aus der y-Kurve im Falle $\Pi = 0$ zugrunde lag, tritt jetzt

$$(49) \qquad z_a = y_a - 2\sqrt{V+\Pi}\{\sqrt{V+\Pi} - \sqrt{\Pi}\} \cdot \frac{dy_a}{dV}.$$

Bei *Maxwellscher Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten* wird, notwendigerweise ebenfalls einer Parallelverschiebung entsprechend,

$$(50) \qquad y_a = z_i - N_i \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\bar{V}+\bar{\Pi}} \int_{\bar{V}+\bar{\Pi}}^{\infty} \bar{V}_i^{3/2} \cdot e^{-\bar{V}_i^2} \cdot d\bar{V}_i,$$

wo durch Überstrich wie früher die auf die wahrscheinlichste innere Geschwindigkeit bezogenen Relativwerte der betreffenden Größen bezeichnet sind. Die spezielle Form der übrigen Ausdrücke würde sich ohne weiteres aus obigem ergeben.

Von besonderem Interesse sind die Beziehungen zwischen den reduzierten inneren und äußeren Kurven, da es für die Auswertung der beobachtbaren y_a-Kurve am nächsten liegt, ihre Ordinaten auf die Maximalhöhe, ihre Abszissen auf den wahrscheinlichsten Wert V_{wa} der äußeren Geschwindigkeiten als Einheit zu beziehen. Es ist hierzu oben V_{wi} mit Hilfe von (40e) durch V_{wa} zu ersetzen und der ganze Ausdruck durch $(y_i)_{\Pi}$

zu dividieren. Das Ergebnis möge aus Fig. 11 ersichtlich werden, die für $\overline{\Pi} = 0{,}225$, d. i. $\Pi = 0{,}2$, durch o anzeigt, wie weit die innere Kurve a durch den Einfluß des Oberflächenfeldes verändert wird. Man erkennt schon bei dieser relativ kleinen Austrittsarbeit eine sehr erhebliche Verschiedenheit der inneren und äußeren Kurve.

β) Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz.

Die Anzahl der im Winkelbereiche

$$0 \text{ bis } \alpha' = \arccos\sqrt{\frac{V}{V_0^a}}$$

mit der Geschwindigkeit V_0^a das Oberflächenfeld verlassenden Elektronen ist nach (36)

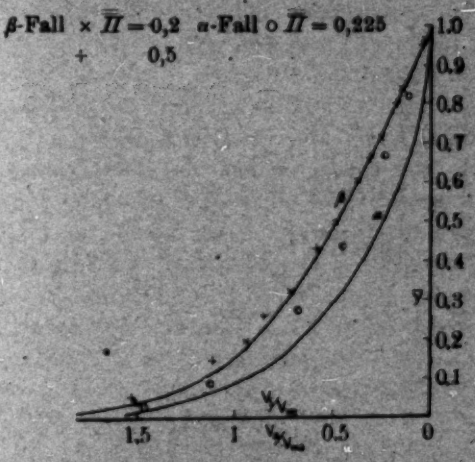


Fig. 11.

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} y_a &= 2N_i\frac{V_0^a}{V_0^i}\int_0^{\alpha' = \arccos\sqrt{\frac{V}{V_0^a}}} \sin\alpha' \cdot \cos\alpha' \cdot d\alpha' \\ &= N_i\frac{V_0^a}{V_0^i}\left\{1 - \frac{V}{V_0^a}\right\} \\ &= N_i\left\{1 - \frac{V+\Pi}{V_0^i}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dieser Zusammenhang zwischen meßbarer Menge und angelegter verzögernder Potentialdifferenz V ist also wieder die Folge einer Parallelverschiebung der y_i-Kurve um Π.

Der analytische Ausdruck nimmt bei *nicht einheitlicher Geschwindigkeit* die Form an

$$(52) \qquad (y_a)_V = (z_i)_{V+\Pi} - (V+\Pi) \cdot \sum \frac{(\text{grad } z_i)_{V_i}}{V_i}$$

oder auch

$$(52a) \qquad y_a = z_i - N_i(V+\Pi) \cdot \int_{V+\Pi}^{\infty} \frac{P(V_i)}{V_i}\, dV_i .$$

Der Vergleich mit (42a) liefert

$$(52b) \qquad y_a = z_a - N_i \cdot V \cdot \int_{V+\Pi}^{\infty} \frac{P(V_i)}{V_i}\, dV_i ,$$

was formal mit dem für die inneren Geschwindigkeiten geltenden entsprechenden Ausdrucke (20a) übereinstimmt.

Im Falle der *Maxwellschen Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten* wird

$$(53) \qquad \begin{cases} y_a = z_i - N_i \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\bar{V}+\bar{\Pi}) \cdot e^{-(\bar{V}+\bar{\Pi})^2} \\ \quad = N_i\{1 - \Phi(\bar{V}+\bar{\Pi})\}, \end{cases}$$

dessen Vergleich mit (30a) wieder die einfache Parallelverschiebung erkennen läßt. Bezieht man die Angaben auf maximale austretende Menge und wahrscheinlichste äußere Geschwindigkeit als Einheit, so findet sich die Gleichung der Kurve der äußeren Verteilung der Normalkomponenten

$$(53a) \qquad \bar{\bar{y}}_a = \frac{1 - \Phi\left\{(\bar{V}+\bar{\bar{\Pi}}) \frac{\sqrt{1+\bar{\bar{\Pi}}/2}}{1+\bar{\bar{\Pi}}}\right\}}{1 - \Phi\left\{\frac{\bar{\bar{\Pi}}\sqrt{1+\bar{\bar{\Pi}}/2}}{1+\bar{\bar{\Pi}}}\right\}} .$$

Zur Veranschaulichung findet sich in der vorstehenden Fig. 11 die Kurve β der inneren Verteilung ($\bar{\bar{\Pi}} = 0$) zusammen mit einigen durch $\times$ bzw. $+$ markierten Punkten für die äußere Verteilung bei $\bar{\bar{\Pi}} = 0{,}2$ bzw. $0{,}5$.

Man erkennt, daß selbst im Falle der zuletzt angenommenen relativ großen Austrittsarbeit eine wesentliche Beeinflussung des relativen Kurvenverlaufes nicht vorhanden ist. Während bei kleinen Gegenspannungen Abweichungen überhaupt kaum erkennbar werden, macht sich nur bei größeren eine langsam

zunehmende relative Begünstigung der größeren Geschwindigkeiten durch das Oberflächenfeld geltend. Da die Wirkung des letzteren wesentlich in der Ausschaltung der kleineren Normalkomponenten der Geschwindigkeit besteht, ist sein stärkerer Einfluß im α-Falle infolge des hier überwiegenden Vorhandenseins kleiner Normalkomponenten ohne weiteres verständlich.

Kapitel II.

Praktische Folgerungen.

Die einwandfreie Auswertung der Ergebnisse des Experimentes auf der im vorstehenden entwickelten theoretischen Grundlage ist zunächst davon abhängig, wieweit die Voraussetzungen der Theorie durch das Experiment realisiert bzw. überhaupt realisierbar sind oder wieweit bei Nichterfüllung dieser Voraussetzungen die dadurch bedingten Abweichungen quantitativ faßbar werden.

Die erste Voraussetzung ist die, daß das Elektron nach seiner Emission keinen Einwirkungen anderer Art als den im vorausgehenden angenommenen unterworfen ist. Es müssen also insbesondere magnetische Kräfte und materielle Hindernisse, die eine völlige Hemmung oder Richtungsänderung der Elektronenbewegung verursachen könnten, beseitigt sein. Die letztere Forderung verlangt höchste Evakuation und Abwesenheit jeglicher Begrenzung des Versuchsraumes zwischen Elektronenquelle und Auffänger. Sie stellt weiterhin speziell an die Konstruktion des Auffängers die Bedingung, daß Elektronenrückdiffusion bzw. Reflexion[1]) vermieden werde.

Die zweite Voraussetzung ist die, daß die für die Elektronenbahn maßgebende Feldwirkung sowohl in geometrischer als physikalischer Hinsicht richtig erkannt wird. Es handelt sich dabei um die sichere Feststellung, wieweit die Versuchsanordnung der Forderung eines streng homogenen oder streng zentralen Feldes genügt, wieweit der Auffänger hierbei als praktisch unendlich ausgedehnt anzusehen ist oder in welcher Weise seine Begrenzung eine Modifikation der Schlußfolge-

1) Bezüglich dieser beiden Erscheinungen vgl. namentlich P. Lenard, Ann. d. Phys. 40. p. 393 und 41. p. 53. 1913; P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1918, insbesondere VII.

rungen notwendig macht; es bedarf außerdem der Sicherstellung, welche Potentialdifferenz in jedem Falle die tatsächlich wirksame ist und wieweit in dieser Hinsicht etwa die direkt angelegte Potentialdifferenz einer Korrektur zu unterwerfen ist (Berücksichtigung von Kontaktpotentialdifferenzen).

Ist diesen an das Experiment zu stellenden Anforderungen entsprochen, so bedarf es weiterhin der Entscheidung, auf welcher theoretischen Grundlage eine Auswertung seiner Ergebnisse zulässig ist. Es kommt hier vornehmlich die Berücksichtigung des Einflusses in Betracht, den, wie gezeigt, in vielen Fällen die räumliche Verteilung der Emission auf das Ergebnis besitzt.

Dieser Einfluß ist besonders erheblich im unbegrenzten homogenen Felde, und seine Berücksichtigung kann ohne weiteres nur auf Grund bestimmter Annahmen über die Abhängigkeit der (inneren) Geschwindigkeitsverteilung vom Emissionswinkel erfolgen. Daß eine solche Abhängigkeit nicht vorhanden sei, wie dies in den vorhergehenden theoretischen Betrachtungen vorausgesetzt worden ist, erscheint nicht von vornherein notwendig. Die Beobachtungen im unbegrenzten homogenen Felde lassen infolgedessen aus der durch sie unmittelbar gegebenen Kenntnis der Verteilung der Normalkomponenten nur dann einen bindenden Schluß auf die Verteilung der Absolutwerte der Geschwindigkeit selbst zu, wenn sie durch weitere direkte oder indirekte Untersuchungen der oben genannten Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung vom Emissionswinkel ergänzt werden.

Auch im zentralen Felde mit unbegrenztem Auffänger würde das Vorhandensein einer solchen Abhängigkeit die Deutung des anderenfalls von der räumlichen Verteilung der Emission unabhängigen Beobachtungsergebnisses wesentlich beeinflussen.

Diese Beschränkung der Auswertbarkeit tritt um so mehr zurück, je mehr sich die Beobachtung eng begrenzter Elektronenbündel bedienen kann. Vorteile bietet in dieser Hinsicht indes nur die Anwendung des zentralen Feldes, da die Verhältnisse des begrenzten homogenen Feldes im allgemeinen, wie gezeigt, wenig einfacher Art sind. Beide Feldanordnungen werden indes für die unmittelbare Bestimmung der absoluten Geschwindigkeiten äquivalent, wenn der Öff-

nungswinkel des benutzten Bündels nahe den Wert Null annimmt, d. h. ein praktisch paralleler Strahl der Beobachtung unterliegt. Der begrenzte Auffänger besitzt andererseits den Vorzug, daß die Feldverteilung hier im wesentlichen nur innerhalb des durch die Begrenzung festgelegten geometrischen Bereiches streng der Bedingung der Zentralität bzw. Homogenität genügen muß. Der Nachteil aber, der in vielen Fällen in der erheblichen Verringerung der der Messung zugänglichen Intensität liegt, setzt der Begrenzung meist gewisse Schranken.

Die ersten Messungen von Elektronenaustrittsgeschwindigkeiten überhaupt verdanken wir Hrn. Lenard[1]), der hierbei die Methode des homogenen Feldes eingeführt und in allen Einzelheiten aufs sorgfältigste durchgearbeitet hat. Hervorzuheben ist insbesondere die eingehende Berücksichtigung des Einflusses etwaiger Feldbegrenzung, der Oberflächenverhältnisse von Elektronenquelle und Auffänger, der im Meßraume wirksamen Kontaktpotentialdifferenzen und der scharfe Hinweis auf die für die Auswertung grundlegende Tatsache, daß diese spezielle Methode direkt nur Aussagen über die Normalkomponenten der Austrittsgeschwindigkeit zuläßt.

Seither ist diese Methode vielfach, meist allerdings ohne ausreichende Kritik der zu ihrer Durchführung benutzten Versuchsanordnung, in Anwendung gekommen. Auf die Herstellung strenger Homogenität des Feldes wurde häufig keine Rücksicht genommen und die Begrenzung des Auffängers selten in Betracht gezogen. Bevorzugte Beobachtung erfuhr überwiegend der Einfluß von Elektronenreflexion am Auffänger; doch sind die zu ihrer Elimination benutzten Mittel meist nicht als einwandfrei zu bezeichnen.[2]) Auch bei der Deutung der Beobachtungsergebnisse finden sich häufig prinzipielle Irrtümer, sofern die erhaltenen Verteilungskurven als solche der Geschwindigkeiten selbst aufgefaßt werden.

Der Versuch, aus einwandfreien Homogenfeldmessungen

---

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149. 1902.

2) Die gegenwärtige Betrachtung kann sich mit diesen allgemeinen Bemerkungen begnügen, ohne im einzelnen auf die Literatur einzugehen. Hierüber vgl. z. B. W. Hallwachs, Die Lichtelektrizität, im Handbuch der Radiologie, Leipzig 1916, insbesondere § 15.

die Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten in Strenge herzuleiten, fehlt bisher noch gänzlich. Der Erfolg setzt nicht nur die im vorhergehenden gezeigte theoretische Einsicht, sondern auch die experimentelle Lösung gewisser maßgebender Einzelfragen voraus, die im vorstehenden berührt worden sind und weiterhin noch nähere Beachtung finden sollen.

Die Anwendung des rein zentralen Feldes findet sich, allerdings in seinem besonderen Charakter noch nicht genügend erkannt, zuerst bei Ladenburg und Markau.[1]) Seiner Eigenschaften voll bewußt haben es dann vor allem die Herren Richardson und Compton[2]) zu eingehenden Messungen von Austrittsgeschwindigkeiten benutzt. Da sie aber ausschließlich im unbegrenzten Felde beobachten, d. h. die Elektronen aller Emissionsrichtungen summarisch verzeichnen[3]), ist die Auswertung ihres Befundes ohne weiteres nur mit Vorbehalt möglich.

Sobald Elektronen eines ausgedehnten Winkelbereiches vorliegen, treten von vornherein zwei wichtige Fragen auf, nämlich: wie hängt die emittierte *Menge* und wie die *Geschwindigkeitsverteilung* vom Emissionswinkel ab? Die Lösung der ersten Frage steht noch völlig aus[4]), die der zweiten ist in einem wichtigen Spezialfalle neuerdings von Hrn. Ramsauer[5]) durch direkte Messungen in Angriff genommen worden. Die Kenntnis dieser Verhältnisse ist für die zutreffende Deutung der Meßdaten des ausgedehnten homogenen Feldes in allen Fällen unerläßlich. Für die Messungen im ausgedehnten Zentralfelde ist die zweite Frage immer bedeutungsvoll, während die erste nur im Falle des Vorhandenseins eines normal gerichteten Oberflächenfeldes von Belang ist.

Auf Grund der gegenwärtigen Untersuchung erscheint folgende experimentelle Lösung vorteilhaft.

1) E. Ladenburg u. K. Markau, Verh. d. D. Physik. Ges. 10. p. 562. 1908; Physik. Zeitschr. 9. p. 821. 1908.

2) O. W. Richardson u. K. T. Compton, Phil. Mag. 24. p. 575. 1912.

3) Diesen prinzipiell wichtigen Hinweis hat zuerst Hr. Ramsauer (Ann. d. Phys. 45. p. 970. 1914) gemacht.

4) Die u. a. mit dem Gegenstand sich befassende Untersuchung von Hrn. J. Robinson, Ann. d. Phys. 31. p. 769. 1910, kann in fraglicher Hinsicht nicht als gelungen betrachtet werden.

5) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. p. 1121. 1914.

I. Direkte Messung.

a) Die als eben vorausgesetzte kleine emittierende Fläche Q befinde sich im Zentrum eines zentralen Feldes (Fig. 12a), dessen Außenelektrode A in mehrere voneinander isolierte Zonen eingeteilt ist, die einzeln mit einem Meßinstrumente verbunden oder geerdet werden können, während Q auf beliebige Potentialdifferenzen gegen A gebracht wird.[1]) Aus den mit den einzelnen Zonen zu erhaltenden Ergebnissen kann die Lösung beider Fragen und damit des Problems der Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten überhaupt entnommen werden. Voraussetzung ist, daß das Material der einzelnen Zonen zur Vermeidung von Potentialdifferenzen derselben gegeneinander streng aus einheitlicher Substanz ist, daß etwa

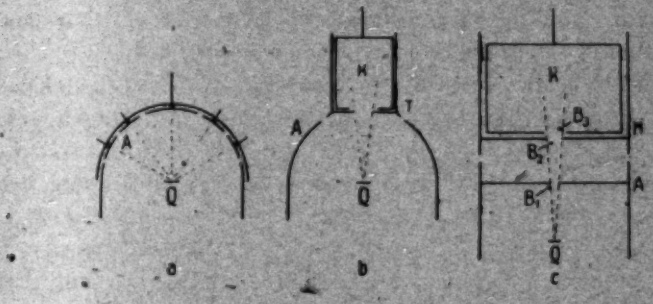


Fig. 12.

vorhandene Kontaktpotentialdifferenzen zwischen Q und A exakt ermittelbar sind und daß Elektronenreflexion an A entweder völlig ausgeschaltet oder in Berechnung gezogen werden kann. Ein besonders sicherer Weg zur Bestimmung der etwa vorhandenen Kontaktpotentiale besteht darin, daß man in einem Vorversuche das Feld durch Annäherung von Q gegen die Mittelzone oder umgekehrt dieser gegen Q zu einem annähernd homogenen macht und durch Ausführung einiger Stromspannungsmessungen den Lenardschen Knickpunkt aufsucht, dessen Lage exakt der Feldfreiheit entspricht. Elektronenreflexion kann bei unterteilter Außenelektrode eher störend in Betracht kommen als bei ungeteilter; ihr Betrag ist im allgemeinen aus dem Kurvenverlauf im Gebiete kleiner,

[1]) Auf die einwandfreie praktische Ausführung im einzelnen soll hier nicht eingegangen werden.

beschleunigender Potentialdifferenzen zu entnehmen. Sie kann aber auch praktisch in folgender Weise ausgeschaltet werden:

b) Die Mittelzone der nicht zu kleinen Außenelektrode werde durch eine Käfiganordnung ersetzt (Fig. 12b), deren Schutzhülle ebenso wie der gesamte übrige Teil von A geerdet sei, während der Auffangekäfig zum Meßinstrumente geleitet wird. Kontaktpotentiale wären in gleicher Weise wie oben zu ermitteln. Diese Anordnung läßt ohne weiteres die Elektronenmenge und Geschwindigkeitsverteilung in einem durch die Käfigblende begrenzten Strahlbündel festlegen. Variation der Blendenöffnung würde in gewissen Grenzen auch die Frage nach dem Einflusse der Emissionsrichtung zu beantworten gestatten. In Betracht käme für diese Frage auch eine Verdrehung der emittierenden Fläche gegen die Achse der Anordnung oder eine isolierte Abtrennung der Außenelektrode A vom Käfig, etwa bei T, und Vergleichung der mit K und der mit A getrennt zu erhaltenden Meßergebnisse.

c) Zur direkten Messung der Verteilung der absoluten Geschwindigkeiten in engen Bündeln kann auch, wie bereits hervorgehoben, das homogene Feld dienen. Die Teile Q und A (Fig. 12c) seien beide auf gewissem gleichen Potential, während H ebenso wie der zum Meßinstrumente führende Käfig K das Potential Null besitzen. Das von Q emittierte, durch B_1 und B_2 begrenzte enge Elektronenbündel durchsetzt dann zwischen A und H ein homogenes Feld in der Strahlrichtung.[1]) Eine Verdrehung der emittierenden Fläche würde auch hier den Einfluß der Emissionsrichtung erkennen lassen. Beachtenswert ist noch, daß bei der hier skizzierten Anordnung die Emission dauernd in einem von äußeren Feldern freien Raume stattfindet, daß also die zur Geschwindigkeitsmessung be-

1) Bei der praktischen Ausführung ist zu berücksichtigen, daß der Kraftlinienverlauf am Orte der Blende B_1 nicht ohne weiteres der Bedingung einer scharfen Abgrenzung des Feldes gegen den Vorraum genügen wird, so daß bereits die durch B_1 in den Meßraum eintretende Elektronenmenge in gewissem Betrage Funktion der benutzten Potentialdifferenz werden kann, was zu einer Fälschung der Messung führt. Von der Anbringung eines Netzes allein würde keine vollständige Elimination der Fehlerquelle zu erwarten sein, vielmehr muß, etwa durch Steigerung der Blendenzahl, eine Begrenzung des Elektronenbündels schon vor B_1 stattfinden.

nutzten Felder die Emission selbst in keiner Weise beeinflussen. Für die Kenntnis der Oberflächenverhältnisse sind derartige Beobachtungen jedenfalls bedeutungsvoll. Als Untersuchungsobjekt besonders wertvoll sind flüssige, von grob materiellen Unebenheiten freie Oberflächen.

II. Indirekte Messung.

Da die Art der räumlichen Verteilung der emittierten Elektronen auf die Messungen im unbegrenzten homogenen Felde von besonders erheblichem Einflusse ist, so kann der auf der Grundlage der theoretischen Entwicklungen vorzunehmende Vergleich der unter konstant gehaltenen Verhältnissen im zentralen und im homogenen Felde erhaltenen Resultate untereinander zu bindenden Schlüssen bezüglich der in Frage stehenden räumlichen Verteilung führen. Versuchsweise wird zur Transformation in erster Annäherung das für allseitig gleiche oder nach dem Cosinusgesetze erfolgende Ausstrahlung maßgebende Verfahren meist genügen.

Da die Elektronenemission als Volumenvorgang aufzufassen ist, erscheint die Annahme der Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetze besonders wahrscheinlich. Auch das Vorhandensein eines Oberflächenfeldes wirkt, wie gezeigt (Fig. 7), in der Weise, daß der nahe vertikale Austritt begünstigt, der nahe streifende Austritt verhindert wird. In gleichem Sinne wirkt schließlich eine Unebenheit der Oberfläche, auf die im nachfolgenden noch weiter einzugehen ist.

Austrittsarbeit.[1]) — Die gesamte vorstehende Betrachtung bezieht sich zunächst ebenso wie die Beobachtung selbst ausschließlich auf die Ermittlung der Verteilung der *äußeren* Austrittsgeschwindigkeiten, d. h. derjenigen Geschwindigkeiten, mit denen die Elektronen die Grenze des emittierenden Materiales überschreiten. Bedarf es zur Überschreitung dieser Grenze einer gewissen Arbeit (Austrittsarbeit als Folge der Bildkraft), so setzt die Kenntnis der Verteilung der *inneren* Geschwindigkeiten eine Schlußfolgerung auf Grund der im theoretischen Teile angegebenen Zusammenhänge voraus. Diese

1) Vgl. hierzu P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149. 1902; Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, p. 172, Anm. 491a. — P. Debye, Ann. d. Phys. 33. p. 441. 1910. — C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. p. 1145. 1914.

Folgerung bedarf der Annahme, daß die zu leistende Austrittsarbeit tatsächlich durch den beim Durchschreiten des angenommenen Oberflächenfeldes auftretenden Energieverlust darstellbar ist. Zweifelhaft kann in dieser Hinsicht nur die Richtung sein, in welcher die Austrittsarbeit zu leisten ist, in welcher also die dem Austritte entgegenwirkende Oberflächenkraft am Elektron angreift.

Bei *vollkommen ebener emittierender Oberfläche* würde die meist übliche Annahme einer zur Fläche normal wirkenden Kraft die größte Wahrscheinlichkeit besitzen. Auf diesen Fall wäre demnach die im ersten Kapitel durchgeführte, auf die Austrittsarbeit bezügliche Entwicklung ohne weiteres anwendbar.

Bei der molekularen Konstitution der emittierenden Substanz ist aber — ganz abgesehen von grob mechanischer Unebenheit — eine *molekulare Unebenheit* ihrer Oberfläche anzunehmen, in welchem Falle eine zur Fläche im makroskopischen Sinne streng normale Kraftwirkung kaum annehmbar erscheint. Es wird vielmehr in Annäherung anzunehmen sein, daß deren Richtung mit derjenigen der Elektronenbahn im Augenblicke des Austrittes zusammenfällt, so daß das Elektron infolge der Austrittsarbeit nur eine Verringerung seiner Voltgeschwindigkeit um deren Betrag, nicht aber — wie bei rein normalem Oberflächenfelde — eine Richtungsänderung seiner Bahn erleidet. Ob eine solche weiterhin, etwa durch nachfolgende Reflexion oder Ablenkung des Elektrons an Molekülen der Oberfläche stattfindet, bleibt für die quantitative Beschreibung des neuen Falles belanglos.

Wieweit bei derart geänderten Verhältnissen die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen über die Beziehungen zwischen innerer und äußerer Geschwindigkeitsverteilung zu modifizieren wären, ist im Prinzip ohne weiteres ersichtlich. Da alle inneren Elektronen, deren innere Austrittsgeschwindigkeit mindestens dem Betrage der Austrittsarbeit äquivalent ist, jetzt aus dem Oberflächenfelde auszutreten vermögen, so folgt die Verteilungskurve der äußeren Geschwindigkeiten aus derjenigen der inneren durch einfache Parallelverschiebung um Π. Dies führt zu dem prinzipiellen Unterschiede gegen früher, daß der äußeren Geschwindigkeit Null jetzt nicht mehr notwendig die Menge Null zugehören muß, wenn dies

nicht für die innere Geschwindigkeit der Fall ist (vgl. Kap. I, B, II, 1 im vorhergehenden und Kap. III, A im folgenden). Im übrigen kann der Kurvencharakter nur durch verschiedene Wahl der Maßeinheiten eine Änderung erfahren.

Bezieht man beispielsweise im Falle der Maxwellschen Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten die Angabe der äußeren Geschwindigkeiten wie früher auf die wahrscheinlichste äußere (Lage des beobachtbaren Inflexionspunktes der Zentralfeldkurve) als Einheit, so entspricht der Gleichung (44) der inneren Verteilung (die Maximalordinate als Ordinateneinheit gewählt) der folgende Ausdruck für die äußere

$$P(\overline{V}_a) = \left(\frac{\overline{V}_a + \overline{\Pi}}{1 + \overline{\Pi}}\right)^3 \cdot e^{-\left\{\left(\frac{\overline{V}_a + \overline{\Pi}}{1 + \overline{\Pi}}\right)^2 - 1\right\}} \tag{54}$$

unabhängig von der räumlichen Verteilung der Elektronenmenge.

Wie der Vergleich dieses Ausdruckes mit den früheren entsprechenden Ausdrücken (45) und (46) oder der Vergleich des durch ihn dargestellten relativen Verlaufes der gestrichelten Kurve der Fig. 10 (für $\overline{\Pi} = 0{,}2$) mit der Lage der eingetragenen Punkte bzw. der ausgezogenen Kurve $P(\overline{V})$ zeigt, macht sich jetzt der Einfluß der Oberflächenkraft stärker geltend. Der relative Kurvenverlauf ist aber, abgesehen vom Kurvenanfang, gegen früher kaum verändert. Dementsprechend sind auch die relativen Abweichungen in der beobachtbaren Integralkurve in beiden Fällen von nahe gleicher Art. Die Beobachtungen im verzögernden zentralen Felde allein sind also kaum geeignet, zwischen den beiden verzeichneten Möglichkeiten bezüglich der Richtung der Oberflächenkraft zu entscheiden. Eine Entscheidung dürfte durch Hinzunahme einer Homogenfeldmessung bei besonders sorgfältiger Ausführung im α-Falle möglich werden, während eine solche im β-Falle auch dann nicht zu erwarten ist.

Dies führt erneut zur Untersuchung der früher bereits in Angriff genommenen allgemeinen Frage, ob durch den Versuch das Auftreten einer Austrittsarbeit überhaupt festgestellt werden kann. Durch Geschwindigkeitsverteilungsmessungen in verzögernden Feldern dürfte dies mit Sicherheit nur auf dem Wege möglich sein, daß es gelingt, nach Reduktion der bei geänderten Absolutwerten aller vorliegenden Geschwindig-

keiten beobachtbaren Kurven eine im zu erwartenden Sinne liegende systematische Abweichung der erhaltenen reduzierten Kurven voneinander festzustellen (vgl. Kap. I, B, II, 2). Die Kombination von Zentral- und Homogenfeldmessungen verspricht nur im a-Falle einen gewissen Erfolg. Ebenso vermag die Untersuchung der Abhängigkeit der äußeren Geschwindigkeitsverteilung vom Emissionswinkel bei normal gerichteter Oberflächenkraft, wie früher (Kap. I, B, II, 1) gezeigt worden ist, nur im a-Falle Andeutungen vom Vorhandensein einer Austrittsarbeit zu machen. Sie setzt dabei, wie noch zu bemerken ist, Unabhängigkeit der Verteilung vom Emissionswinkel für die inneren Geschwindigkeiten voraus. Fällt die Kraftrichtung mit der Austrittsrichtung des Elektrons zusammen, so versagt diese Untersuchungsweise in allen Fällen.

Als besonders bedeutungsvoll erscheinen demgegenüber Beobachtungen in beschleunigenden Feldern von solcher Größe, daß deren Überlagerung über das angenommene Oberflächenfeld einen wesentlichen Einfluß auf die Höhe der Austrittsarbeit zu gewinnen vermöchte.[1]) Hierzu möge an dieser Stelle der Hinweis auf die ersten Untersuchungen dieses Falles von Hrn. Lenard[2]) und die späteren Betrachtungen und Versuche von Hrn. Schottky[3]) genügen.

In diesem Zusammenhange ist die Frage zu betrachten, wieweit der theoretische Einblick in den Vorgang der Elektronenemission zur Annahme einer Austrittsarbeit nötigt.

Wie zuerst von Hrn. Lenard im einzelnen ausgeführt worden ist[4]), bedarf es zur Abtrennung eines Elektrons aus seinem Atomverbande einer Arbeit (Abtrennungsarbeit), die dem Unterschiede der potentiellen Energien im gebundenen und völlig freien Zustande desselben entspricht. Ihr weit überwiegender Betrag wird unmittelbar beim Austritte aus dem Mutteratom zu leisten sein, während kleinere Teilbeträge auf seinem weiteren Wege nur so weit in Betracht kommen, als die Kraft zwischen positiv zurückbleibendem Mutteratom

1) Unvollkommenheiten des Vakuums würden derartige Beobachtungen allerdings erheblich fälschen können.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149, 1902.

3) W. Schottky, Physik. Zeitschr. 15. p. 625. 1914.

4) P. Lenard, l. c. Vgl. auch die hierhergehörigen Erwägungen von Hrn. C. Ramsauer, l. c. p. 1145 u. ff.

und Elektron noch merkliche Größe besitzt. Erfolgt die Abtrennung in so großer Tiefe des emittierenden Materials, daß diese Kraft an der Materialgrenze schon verschwindend geworden ist, so erfordert der Austritt über diese Grenze keine nachweisbare Arbeitsleistung mehr. Für die Größe der Austrittsarbeit ist also einerseits das Kraftgesetz, andererseits die Tiefenlage des Mutteratoms maßgebend. Da letztere im allgemeinen variabel sein wird, so muß offenbar auch die Austrittsarbeit für die einzelnen Elektronen als verschieden aufgefaßt werden (zwischen Null und dem Werte der Abtrennungsarbeit). Diese Annahme fällt nur dann weg, wenn das Kraftgesetz solche Beschaffenheit hätte, daß die Kraft bereits in Abständen eines einzelnen Atoms von der Oberfläche des Mutteratoms unmerklich würde. Dann würde die Austrittsarbeit für die unmittelbar aus den Atomen der Oberfläche kommenden Elektronen gleich der ganzen Abtrennungsarbeit, diejenige aller übrigen, wohl weit überwiegenden Elektronen aber Null. Wollte man schließlich die Reichweite der Kraft sich im wesentlichen nur bis zur Oberfläche des Mutteratoms selbst erstrecken lassen, so würde die Austrittsarbeit aller Elektronen unmerklich werden.

Das Zusammenwirken eines von seinem Mutteratom abgetrennten Elektrons mit anderen Atomen — beim Durchgang durch diese, bei gegenseitiger Annäherung oder Reflexion — wird jedenfalls, Elektronengeschwindigkeiten von nur einigen Volt vorausgesetzt, die Energieverhältnisse im ganzen nicht wesentlich beeinflussen[1]), falls nicht völlige Absorption stattfindet, falls ein gegenseitiger Energieaustausch im ganzen also ausgeschlossen bleibt. Bei größeren Geschwindigkeiten, bei denen letzteres nicht mehr streng der Fall ist, müssen kompliziertere Verhältnisse auftreten, sofern einerseits der mit der auftretenden Sekundärstrahlung verbundene Geschwindigkeitsverlust im Sinne einer gesteigerten Austrittsarbeit wirkt, andererseits das Hinzukommen der Sekundärelektronen nicht ohne weiteres aus der beobachtbaren äußeren Verteilung auf den primären Emissionsvorgang schließen läßt.

Die vorstehend kurz skizzierten Gesichtspunkte lassen die Bedeutung erkennen, welche der experimentellen Unter-

1) Über den Energieverlust der Elektronen bei Zusammenstößen mit Molekülen vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 40. p. 433. 1913.

suchung der Frage nach der Austrittsarbeit für das Verständnis des ganzen Mechanismus der Elektronenemission zukommt.[1]) Den Aussagen des Experimentes und ihrer theoretischen Deutung sei der folgende Abschnitt gewidmet.

Kapitel III.

Spezielle Anwendungen.

A. Der lichtelektrische Effekt.

Die ältesten und die weitaus umfassendsten Untersuchungen von Elektronenaustrittsgeschwindigkeiten beziehen sich auf den lichtelektrischen Effekt und hier speziell auf den sogen. normalen Effekt. Nachdem durch die grundlegenden Untersuchungen Hrn. Lenards[2]) alle wesentlichen geometrischen und physikalischen Verhältnisse bereits erkannt worden waren, blieb für die Folgezeit das Problem der strengen quantitativen Festlegung der einzelnen physikalischen Zusammenhänge. Seiner erfolgreichen Bearbeitung stand zunächst vielfach der Mangel an genügender theoretischer Einsicht entgegen.[3]) Für die Lösung der fundamentalen Frage nach der Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten der Elektronen bei einheitlicher erregender Wellenlänge kommen im wesentlichen nur die beiden ausgedehnten Untersuchungen der Herren Richardson und Compton[4]) und von Hrn. Ramsauer[5]) in Betracht.[6])

1) Ein indirekter Beweis für ihr Vorhandensein dürfte durch den von Hrn. Rother, Inaug.-Diss. Leipzig 1914, gegebenen Nachweis von Elektronenatmosphären der Metalle erbracht sein.

2) P. Lenard, Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien IIa, 108. p. 1649. 1899; Ann. d. Phys. 2. p. 359. 1900 und 8. p. 149. 1902.

3) Bezüglich der Literatur, die im einzelnen anzuführen hier nicht beabsichtigt sein kann, sei auf die Zusammenstellungen: R. Pohl u. P. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen, Braunschweig 1914; W. Hallwachs, Die Lichtelektrizität, Leipzig 1916 und die nachgenannten Veröffentlichungen von Hrn. Ramsauer verwiesen.

4) O. W. Richardson u. K. T. Compton, l. c. 1912.

5) C. Ramsauer, l. c. 1914.

6) Den unmittelbaren wertvollen Ergebnissen dieser Untersuchungen gegenüber würde der Versuch, andere mit mehr oder weniger erheblichen Fehlerquellen behaftete Arbeiten durch Anbringung von Korrekturen auf der Grundlage der gegenwärtigen theoretischen Entwicklungen auszuwerten, kaum lohnend sein. Andererseits kommen mehrere an sich sorgfältige ältere Untersuchungen, da sie noch mit unzerlegtem Lichte durchgeführt sind, nicht in Betracht.

Da die letztere in ihren Ergebnissen besonders anschaulich ist, werde mit deren näherer Betrachtung begonnen.

C. Ramsauer. — Die Methode der Untersuchung beruht auf der direkten Ermittlung der Verteilung der äußeren Raumdichte der in bestimmter Richtung (im Versuche vertikal bzw. unter 45°) emittierten Elektronen auf die vorkommenden Einzelgeschwindigkeiten, die durch Anwendung eines Magnetfeldes voneinander getrennt und gemessen werden. Sie liefert also die gesuchte Lösung des Problems unmittelbar und bei der vorgenommenen kritischen Durchführung soweit zu sehen fehlerfrei.

Das zunächst wichtige Ergebnis ist die Feststellung einer bestimmten Verteilungskurve, die, auf Voltgeschwindigkeiten und die Abszisse der Maximalhöhe als Einheit bezogen, ihrer Form nach innerhalb der Versuchsgenauigkeit sowohl von der Schwingungszahl des erregenden Lichtes als der Natur des emittierenden Materiales (benutzt wurden Zink, Messing und Gold) unabhängig, für den Photoeffekt also eine charakteristische Funktion ist. Hr. Ramsauer hat dieselbe mit fünf verschiedenen wahrscheinlichkeitstheoretisch oder physikalisch in Betracht kommenden Funktionen ähnlichen Charakters verglichen, ohne eine Übereinstimmung mit einer von ihnen finden zu können.

Zu einer erneuten, durch die Wichtigkeit des Gegenstandes und eine etwas abweichende Auffassung gerechtfertigten Betrachtung der vorliegenden Verteilung werde von den direkt gemessenen 6 Verteilungskurven der linearen Geschwindigkeiten für Zink ausgegangen, die Hr. Ramsauer in Fig. 1 seiner zweiten Veröffentlichung verzeichnet hat. Werden dieselben, wie oben angegeben, auf die Abszisse der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit als Einheit reduziert, so erhält man die in Fig. 13 einzeln verzeichneten Punkte, die sich innerhalb der Versuchsgenauigkeit durch die gemeinsame Grundkurve 1 zusammenfassen lassen. Systematische Abweichungen der Einzelkurven sind nicht mit Sicherheit zu erkennen. Während zwar die Punkte für die kurze Welle $\lambda_3 = 202\ \mu\mu$ namentlich am aufsteigenden Kurventeil etwas hoch, diejenigen für die längste benutzte Welle $\lambda_6 = 285\ \mu\mu$ etwas nieder liegen, passen sich die Punkte für die kürzeste und für die zweitlängste Welle der ausgezogenen Kurve mit großer Übereinstimmung an. Dieselbe stellt also allgemein die

charakteristische Verteilung der relativen linearen Austrittsgeschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektronen dar. Zur Sicherstellung ihres Verlaufes wurde noch die von Hrn. Ramsauer gegebene Kurve der Fig. 2 seiner Arbeit durch Reduzierung der Abszissen auf sie übertragen; die Übereinstimmung zeigt die Lage der entsprechenden Punkte v.

Der Versuch, die Kurve durch einen naheliegenden analytischen Ausdruck darzustellen, führt zu keinem brauchbaren Ergebnis. Insbesondere überzeugt man sich leicht, daß auch

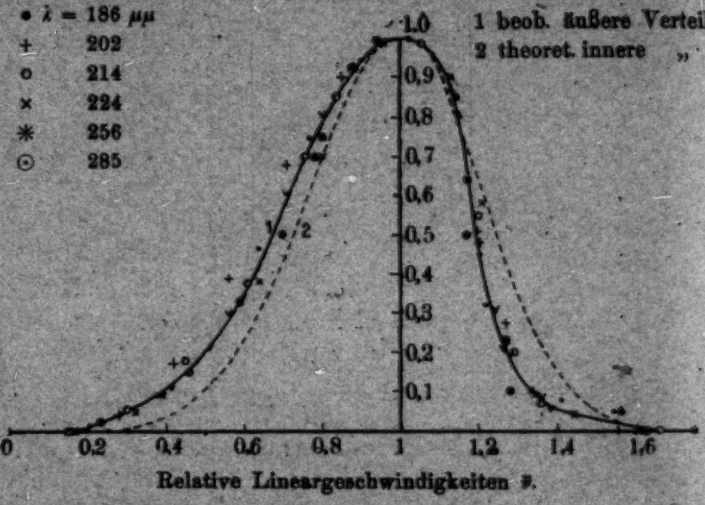


Fig. 13.

die Annahme einer Maxwellschen Verteilung der Lineargeschwindigkeiten nicht entfernt den Kurvenverlauf anzugeben vermag.

Um aus der relativen Verteilung der Lineargeschwindigkeiten diejenige der Voltgeschwindigkeiten, d. h. der Energie, herzuleiten, sind zunächst die Ordinaten der vorliegenden Kurve durch den Wert der zugehörigen Lineargeschwindigkeit zu dividieren und die so erhaltenen Quotienten dann als Funktion des Quadrates der letzteren aufzutragen. Da weder die Höhe noch die Lage des Maximums der neuen Kurve mit den entsprechenden Werten der alten übereinstimmen, so bedarf es darnach einer Reduktion sowohl der Ordinaten als der Abszissen. Die auf diese Weise gewonnene *relative Ver-*

teilung der Voltgeschwindigkeiten gibt die Kurve 1 der Fig. 14 wieder. Sie hat ebenso wie die Ausgangskurve 1 der Fig. 13 die Bedeutung einer Grundkurve. Die einem beliebigen relativen Energieintervalle zugehörige Elektronenzahl wird jeweils durch das von der Kurve begrenzte zugehörige Flächenstück bestimmt.

Um nun zu untersuchen, wieweit der neue Kurvenverlauf analytisch ausdrückbar ist, soll durch die gestrichelte

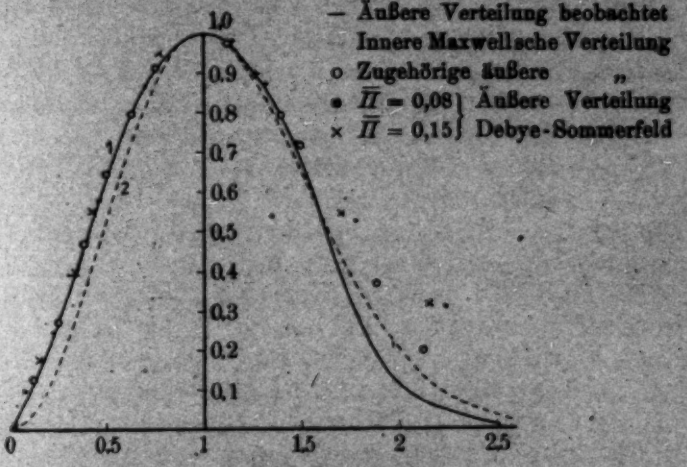


Fig. 14.

Kurve 2 der Fig. 14 derjenige Zusammenhang angezeigt werden, der bei der schon von Hrn. Lienhop[1]) in Betracht gezogenen und von Hrn. Ramsauer (nicht ganz zutreffend) geprüften Annahme der Maxwellschen Verteilung der Voltgeschwindigkeiten zu erwarten wäre. Wie man erkennt, ist der Verlauf beider Kurven ein nahe übereinstimmender; doch liegt noch eine systematische Abweichung darin, daß die kleineren Energiewerte durch die Beobachtung etwas häufiger, die größeren etwas weniger häufig gefunden werden als der theoretischen Verteilung entspräche. Die von beiden Kurven im ganzen eingeschlossenen Flächen müssen natürlich gleich groß sein.

Da nun aber die für die Beobachtung maßgebende Kurve nach Art ihrer konstruktiven Herleitung von gewisser Un-

1) A. Lienhop, Inaug.-Diss. Kiel 1907, p. 87.

sicherheiten nicht ohne weiteres freizusprechen ist (da die Größe der erforderlichen Reduktionen sehr wesentlich von der Schärfe des Maximums beeinflußt ist), so kommt dem Vergleiche der immerhin viel direkter aus der Beobachtung hervorgehenden Verteilungskurve der Lineargeschwindigkeiten mit der auf Grund der gemachten Annahme zu erwartenden theoretischen Verteilung, die durch die Gleichung (26) und die ihr entsprechende gestrichelte Kurve 2 der Fig. 18 gegeben wird, größere Genauigkeit zu. Die zuvor erkannten systematischen Abweichungen treten auch hier unzweifelhaft hervor. Es ist zu schließen, daß *die Annahme der Maxwellschen Verteilung der Voltgeschwindigkeiten den tatsächlichen Verhältnissen zwar mit Annäherung gerecht zu werden vermag, daß aber noch eine zu suchende Ursache für eine systematische Abweichung zu bestehen scheint.*

Es ist in dieser Hinsicht zu beachten, daß sich die Beobachtung auf die *äußeren* Geschwindigkeiten bezieht, und daß die erwartete Übereinstimmung nicht zu bestehen braucht, falls eine gewisse Austrittsarbeit zu leisten ist und die theoretische Annahme auf die *inneren* Geschwindigkeiten zutrifft. Bezieht man also die theoretische Kurve auf die innere Verteilung, so kann erst die ihr entsprechende Kurve der zugehörigen äußeren Verteilung zum Vergleiche mit der Beobachtung herangezogen werden. Diese ist unter der Voraussetzung einer in Normalenrichtung wirkenden Oberflächenkraft auf Grund der früheren Betrachtungen (Kap. I, B, II, 1 α und β) leicht herleitbar, und zwar hängt das Ergebnis bei vertikaler Emission von deren räumlicher Verteilung nicht ab. Im Falle anders gerichteter Oberflächenkraft würde ein qualitativer Unterschied, wie hervorgehoben, nicht auftreten. Es sei daher der Verlauf der unter obiger Voraussetzung für $\Pi = 0{,}25$ resultierenden äußeren Verteilung durch die Punkte ○ in Fig. 14 eingetragen. Man erkennt jetzt im aufsteigenden Teile und der folgenden Hälfte des absteigenden Teiles der Kurven eine völlige Deckung, während der Unterschied im letzten Stücke des absteigenden Teiles allerdings etwas größer geworden ist.

Daß die letztere Erscheinung an sich entscheidend gegen die Einführung der Austrittsarbeit zu sprechen vermöchte, kann im Hinblick auf den überwiegenden Gewinn auf der

anderen Seite bezweifelt werden.[1]) Allerdings ist auch aus der Möglichkeit der Vereinigung aller bei verschiedenen Wellenlängen (verschiedenen Absolutwerten der Geschwindigkeiten) beobachteten Einzelkurven in einer gemeinsamen Grundkurve auf Grund früherer Betrachtungen zu schließen, daß die Austrittsarbeit, wenn überhaupt vorhanden, nur so kleinen Betrag wird besitzen können, daß die Verschiedenheit ihres Einflusses bei den einzelnen Wellenlängen innerhalb der Versuchsungenauigkeit bleibt.

Daß das von Hrn. Ramsauer bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung vom Emissionswinkel erhaltene negative Resultat für die Größe der Austrittsarbeit nicht entscheidend sein muß, ist bereits früher bemerkt worden. Aber auch die vorhergehende Begründung der Notwendigkeit sehr kleiner Arbeitsbeträge würde in zwei naheliegenden Fällen unwirksam werden: 1. Falls man annehmen wollte, daß die Größe der Austrittsarbeit mit der Geschwindigkeit veränderlich wäre, etwa in der Weise, daß der schnelleren wahrscheinlichsten Geschwindigkeit — Mutteratome allgemein vielleicht der Oberfläche näherliegend (geringere Eindringtiefe kürzerer Wellen) — die größere Austrittsarbeit entspräche (vgl. auch Kap. II). 2. Falls die angenommene Verteilung der inneren Geschwindigkeiten nicht streng zuträfe, sondern durch eine andere zu ersetzen wäre, bei welcher der Variation des Relativwertes $\overline{\Pi}$ kein oder kein so erheblicher Gang in der äußeren Verteilungskurve zukäme.

Zur näheren Betrachtung dieses zweiten Punktes ist es von Bedeutung, die bisher betrachtete zunächst lediglich aus Wahrscheinlichkeitsgründen als brauchbar erachtete Verteilungsfunktion mit den Aussagen der speziellen Theorie zu vergleichen, welche die Herren Debye und Sommerfeld[2]) für den selektiven lichtelektrischen Effekt entwickelt haben. Es werde also versuchsweise angenommen, daß auch beim normalen Effekte die Verteilung der inneren Geschwindigkeiten durch die Theorie richtig dargestellt sei, und nach den Konsequenzen für die äußere Verteilung gefragt.

Der Verteilungsfunktion dieser Theorie eigentümlich ist das Auftreten eines relativ hohen Mengenwertes beim Null-

1) Vgl. hierzu auch unter Richardson u. Compton im folgenden.
2) P. Debye u. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 41. p. 873. 1913.

punkte der Energie. Die Auffassung, daß die beobachtbare Verteilungskurve durch sie ohne weiteres dargestellt werden könne, wird dadurch allein schon ausgeschlossen.[1]) Versucht man also auch hier, die Abweichungen durch das Vorhandensein einer Oberflächenkraft zu erklären, so erkennt man zunächst, daß die Annahme einer in die Austrittsrichtung des Elektrons fallenden Kraft die Abweichungen noch erheblich steigern würde, da die hierbei ausschließlich erforderliche Parallelverschiebung der Kurve mit dem Auftreten eines gesteigerten Ordinatenwertes beim Nullpunkte der Energie verbunden wäre. Diese Schwierigkeit fällt, wie früher (Kap. I, B, II, 1 und Kap. II) allgemein bemerkt, fort bei der Annahme einer flächennormalen Kraftrichtung.[2]) Hierbei führt nun der besondere Verlauf der Debye-Sommerfeldschen Kurve zu dem eigenartigen Ergebnisse, daß die aus ihr für die äußere Verteilung folgende Kurve innerhalb bestimmter, relativ weiter Grenzen von einer Variation des benutzten $\bar{\Pi}$-Wertes nahe völlig unabhängig bleibt. Man erreicht außerdem schon bei merklich kleineren $\bar{\Pi}$-Werten als früher eine etwa ebenso günstige Annäherung an die beobachtete Kurve. Die in Fig. 14 eingetragenen, für $\bar{\Pi} = 0{,}08$ und $0{,}15$ berechneten Punkte zeigen, daß durch sie der beobachtete Kurvenverlauf von 0 bis ca. 1,4 der relativen Energie nahezu ebensogut dargestellt wird wie im früheren Falle. Es genügt also hierbei schon die Annahme einer Austrittsarbeit von der geringen Größe $\bar{\Pi} = 0{,}1$ vollständig, um der Beobachtung gerecht zu werden, und ein Einfluß der verschiedenen Wellenlängen bleibt durch die Beobachtungsfehler hier um so mehr verdeckt. Im letzten Teile der Kurve werden die schon früher uneliminierten Abweichungen allerdings durch die neue Verteilungsfunktion nicht unwesentlich vermehrt. Wie weit ihre Vorteile durch diesen Nachteil aufgehoben werden, muß unentschieden bleiben. Ebensowenig ist zu beurteilen, wie weit der von Hrn. Gehrcke[3])

1) Ein solch unmittelbarer Vergleich findet sich schon bei Hrn. Ramsauer (l. c.).

2) Daß dieser Fall im Früheren als unwahrscheinlich bezeichnet werden mußte, läßt die Gültigkeit dieser neuen Verteilungsfunktion als zweifelhaft erscheinen.

3) E. Gehrcke, Verh. d. D. Physik. Ges. 15. p. 669. 1913; 16. p. 910. 1914. Der am letzteren Ort gemachte Vergleich mit Hrn. Ramsauers Fig. 2 ist nach Lage der Sache irrelevant.

gemachte Versuch einer Modifikation des Maxwellschen Verteilungsgesetzes als zutreffende Lösung der gebliebenen Schwierigkeit erscheinen könnte.

O. W. Richardson und R. T. Compton. — Die Verff. bedienen sich des streng zentralen Feldes mit unendlich ausgedehntem Auffänger zur Ermittlung der Integralkurven der Verteilung der absoluten Geschwindigkeiten. Ihre Beobachtungen beziehen sich auf einheitliche Wellenlängen und die große Zahl von 8 verschiedenen Metallen. Durch möglichste Reduktion des Einflusses von Elektronenreflexion und durch Berücksichtigung der Kontaktpotentialdifferenzen sind die hauptsächlichsten Fehlerquellen solcher Messungen möglichst ausgeschaltet worden. Ein Bedenken gegen die übliche Auswertung ihrer Ergebnisse könnte nur infolge ihrer gleichzeitigen Benutzung aller Emissionsrichtungen entstehen. Wieweit es berechtigt ist, sich versuchsweise über dasselbe hinwegzusetzen, kann der Erfolg entscheiden. Die Verff. erkennen in allen Fällen ähnlichen Charakter der Geschwindigkeitsverteilung[1]), gehen aber im einzelnen hierauf nicht näher ein.

Da es nicht vorteilhaft wäre, die von ihnen gefundene Geschwindigkeitsverteilung durch Differentiation aus den unmittelbar beobachteten Kurven zu entnehmen, sollen die möglichen Folgerungen unmittelbar aus dem Verlaufe der Integralkurven gezogen werden.

Es frägt sich zunächst, wieweit sich die bei verschiedenen erregenden Wellenlängen und verschiedenen Stoffen beobachteten Einzelkurven zu einer gemeinsamen Grundkurve vereinigen lassen. Die ersteren sind zu dem Zwecke nach früher angegebenem Verfahren durch Umrechnung der Abszissen auf die Abszisse des beobachtbaren Inflexionspunktes als Einheit zu reduzieren, während die Verff. die Reduktion der Menge auf die Maximalmenge als Einheit bereits in den Einzelkurven durchgeführt haben. Da sie außerdem den durch graphische Integration über ihre Kurven mit guter Genauigkeit feststellbaren arithmetischen Mittelwert der jeweiligen Energien angeben, so kann auch die Lage des Inflexionspunktes, d. h. der Wert der wahrscheinlichsten Energie, mit großer Sicherheit angegeben werden. Es kann hierzu, wie der Erfolg

1) Vgl. auch K. T. Compton, Phil. Mag. **23**. p. 579. 1912.

bestätigt, die früher (Kap. I, B, I, d, 1) gegebene Beziehung zwischen beiden benutzt werden.

Das Ergebnis einer derartigen Reduktion von 22 Einzelkurven[1]) ist in Fig. 15 in folgender Weise verzeichnet: Die angegebenen Strecken —— bezeichnen die relativen Spannungsbereiche, in denen bei den zugehörigen Ordinaten die einzelnen reduzierten Punkte in den Extremfällen zu liegen kommen. Die Häufung der Punkte findet im allgemeinen in der Nähe der Mitten der einzelnen Strecken statt, deren relativ große Länge durch größere Abweichungen einzelner weniger

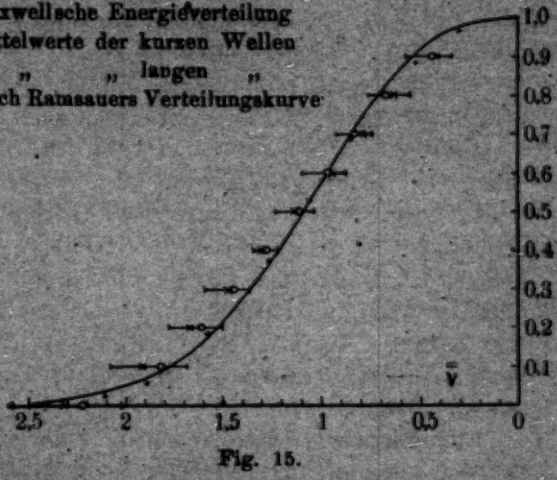


Fig. 15.

Punkte bedingt ist. Daß die Unsicherheit gegen die kleinen Ordinaten hin wächst, ist an sich verständlich. Daß sie am Orte der Abszisse 1 nicht verschwindet, erklärt sich daraus, daß, wie oben vermerkt, zur Kurvenreduktion einfach die von den Verff. angegebenen Energiewerte als Grundlage dienten, während es andererseits leicht möglich gewesen wäre, durch geringfügige Korrekturen derselben eine vollständige Koinzidenz aller Punkte am genannten Orte herbeizuführen. Die Länge der Strecken würde sich in diesem Falle sehr erheblich verkürzt haben. Die Abweichungen der einzelnen Punkte

1) Unberücksichtigt sind nur einige wenige Kurven geblieben, denen infolge einer besonders geringen Zahl von Bestimmungsstücken keine erhebliche Genauigkeit zugeschrieben werden konnte.

insbesondere bei Variation des Metalles, sind im allgemeinen völlig regellos, also im wesentlichen durch Unsicherheiten des Versuches oder der Kurvenübertragung verursacht. Ein kleiner systematischer Gang ist nur mit der Wellenlänge zu bemerken. Mit × sind die Mittelwerte aller Beobachtungen bei den beiden kürzesten, mit o diejenigen bei den beiden längsten benutzten Wellenlängen angemerkt. Bei großen Spannungen sind die ersteren gegen die letzteren nach links, bei kleineren Spannungen nach rechts verschoben.

Im wesentlichen ist die aufgeworfene Frage nach der Möglichkeit der Zusammenfassung aller Einzelbeobachtungen in einer gemeinsamen Grundkurve zu bejahen. Darin stimmen diese Untersuchungen mit denen von Hrn. Ramsauer überein.

Fragen wir jetzt nach dem Charakter der Verteilungskurve, so liegt es nach den vorhergehenden Feststellungen nahe, auch hier zunächst das Gesetz der Maxwellschen Verteilung der Voltgeschwindigkeiten zu prüfen. Seine bereits früher betrachtete Zentralfeldkurve (Fig. 5) ist durch die in Fig. 15 eingetragene Kurve reproduziert. Die Beobachtungen schließen sich in der Tat dem Kurvenverlaufe mit guter Annäherung an. Eine systematische Abweichung ist aber unverkennbar. Die Beobachtung liefert bei kleinen Potentialdifferenzen etwas zu tief, bei großen dagegen etwas zu hoch liegende Werte. Vergleicht man damit das in Fig. 10 veranschaulichte frühere Ergebnis über den Einfluß eines Oberflächenfeldes auf den Kurvenverlauf, so erkennt man in beiden Fällen eine Abweichung im gleichen Sinne. Die beobachtete Kurve folgt also als Kurve der äußeren Verteilung exakt aus einer Maxwellschen Verteilung der inneren Geschwindigkeiten, wenn — wie die Berechnung zeigt — eine Austrittsarbeit Π von etwa 0,2 angenommen wird.

Der allgemeine Charakter des Kurvenlaufes führt hier also zu genau denselben Folgerungen, auch quantitativ, wie bei der Untersuchung von Hrn. Ramsauer. Dies wird auch unmittelbar ersichtlich, wenn man dessen Ergebnisse durch Integration der Verteilungskurve 1 der Fig. 14 auf den gegenwärtigen Fall überträgt. Die dadurch erhaltenen Punkte (in Fig. 15 mit • bezeichnet) zeigen bis etwa zur Abszisse 1,5 den oben genannten ganz analoge Abweichungen von der theoretischen Kurve. Darüber hinaus macht sich ein ver-

schiedenes Verhalten geltend. Die von Hrn. Ramsauer beobachteten Punkte bleiben unterhalb der theoretischen Kurve (wie schon Fig. 14 anzeigte), während die von den Herren Richardson und Compton beobachteten merklich über der Kurve liegen, wie es das zuvor angewendete theoretische Verfahren auch verlangen würde. Die letzteren Beobachtungen decken sich also mit den auf der Annahme Maxwellscher Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten und des Auftretens einer nicht sehr erheblichen Austrittsarbeit beruhenden theoretischen Folgerungen in ihrer ganzen Ausdehnung.

Wenn diese weitgehende Übereinstimmung, insbesondere auch in den wesentlichsten Resultaten zweier so verschiedenartiger Fälle der experimentellen Untersuchung, auch den Glauben an die Richtigkeit der theoretischen Deutungsweise zu stärken geeignet ist, so kann doch nicht unbeachtet bleiben, daß auch hier aus den speziellen Verhältnissen ein Einwand gegen dieselbe entnommen werden kann. Wie früher gezeigt, fordert das Auftreten einer konstanten Austrittsarbeit bei der speziellen inneren Verteilung einen Gang der äußeren Verteilung mit dem Werte des Verhältnisses H/V_{ww}, d. h. mit dem Absolutwerte der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit und demnach auch mit der Länge der erregenden Welle. Der tatsächlich festgestellte Gang hat nur bei Aluminium die geforderte Richtung, während er im Durchschnitt gerade den umgekehrten Verlauf nimmt. Die Heranziehung der Debye-Sommerfeldschen Theorie würde hier nicht weiterführen, abgesehen davon, daß sie gegen das Ende der Verteilungskurve eine neue Abweichung hereinbrächte (die entsprechenden Werte aus dieser Theorie liegen höher als die beobachteten). Es liegt eher nahe, den Grund der Verschiedenheit in geringen Unsicherheiten in der experimentellen Durchführung zu vermuten. Solche würden insbesondere mit der Festlegung der Kontaktpotentiale verknüpft sein können und gegebenenfalls zu systematischen Gängen führen können.[1])

1) Wie die graphischen Darstellungen zeigen, verläuft die z-Kurve bei kleinen Spannungen so nahe horizontal, daß die Feststellung des Nullpunktes der Abszisse mit Hilfe des maximalen Wertes von z keiner großen Genauigkeit fähig ist. Da die Verff. nicht angeben, wie weit sie sich bei der Ermittlung der Kontaktpotentialdifferenzen gleichzeitig auf dieses Nullpunktskriterium stützen, so bleibt es allerdings unbestimmt,

Anzunehmen, daß die gleichzeitige Mitwirkung aller Emissionsrichtungen im zentralen Felde eine merkliche Störung des Kurvenbildes hätte verursachen können, ist kein Anhalt vorhanden. Die höheren Werte im Gebiete der größeren Geschwindigkeiten würden auf diese Weise jedenfalls nicht erklärbar sein; eher könnte die gegenüber Hrn. Ramsauers Versuchen stärkere Rechtsverschiebung im Gebiete der kleinen Geschwindigkeiten einen solchen Einfluß andeuten. Daß dies indes sehr unwahrscheinlich ist, folgt zunächst aus der experimentellen Feststellung Hrn. Ramsauers, daß die Geschwindigkeitsverteilung jedenfalls bis zu Winkeln von 45° von der Emissionsrichtung unabhängig ist. Für sehr schiefen Austritt ist dies indes namentlich im Hinblick auf die Oberflächenrauhigkeit jedes festen Körpers kaum zu erwarten. Die völlige Übereinstimmung des Verhaltens der verschiedensten Körper ist dann nur erklärlich, wenn man eine Abnahme der emittierten Menge überhaupt mit wachsendem Emissionswinkel annimmt und die Wirklichkeit also eher durch den β-Fall als durch den α-Fall realisiert ansieht, wie dies auch früher schon wahrscheinlich gemacht war.

Aus der Gesamtheit der vorstehenden Betrachtungen folgt, daß die äußere Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektronen mit großer Annäherung als Folge Maxwellscher Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten und des Vorhandenseins einer relativ geringen Austrittsarbeit aufgefaßt werden kann.[1]) Die gegen die Einführung

wie weit seine Ungenauigkeit ihre Angaben beeinflußt. Man erkennt jedenfalls, daß dieser Einfluß bei längeren Wellen — infolge der kleineren Absolutwerte aller auftretenden Geschwindigkeiten — ein größerer sein muß. Die Kurven der langen Wellen würden dann durchgehends gestreckter ausfallen, und der vorgenannte Widerspruch würde fortfallen. Die gesamte Abweichung der beobachteten Punkte von der theoretischen Kurve in dieser Weise erklären und die Austrittsarbeit ausschalten zu wollen, würde ebenso wie der Erklärungsversuch durch Restbeträge von Elektronenreflexion zu neuen unlösbaren Widersprüchen führen.

1) Dabei nehmen wir nicht an, daß die Elektronen mit dieser Geschwindigkeitsverteilung schon vor Einwirkung der äußeren Erregung in der Substanz frei beweglich gewesen seien, sondern daß sie erst durch die Erregung von ihrem Mutteratom befreit und dabei mit der betreffenden Geschwindigkeit begabt werden.

der Austrittsarbeit sprechenden Erscheinungen dürften durch geringfügige Unsicherheiten der Beobachtung zu erklären sein.[1]) Mit gewisser Beschränkung vermag auch die Debye-Sommerfeldsche Theorie des selektiven Photoeffektes zusammen mit der Annahme einer nur sehr kleinen Austrittsarbeit den Hauptverlauf der Erscheinung beim normalen Effekte zutreffend darzustellen. Bei der Behandlung aller auf die äußeren Verhältnisse gerichteten Fragen wird man im allgemeinen der ersteren Verteilungsfunktion ihrer größeren formalen Einfachheit halber den Vorzug geben.

Bei der im wesentlichen nachgewiesenen Übereinstimmung beider Formulierungen scheint es berechtigt, die Ursache der eigenartigen Gesetzmäßigkeit der Geschwindigkeitsverteilung in dem speziellen Emissionsvorgange, etwa in der besonderen Form der erregenden Energie, zu suchen. Andererseits ließe die Bedeutung der rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Auffassung den Schluß zu, daß diese Gesetzmäßigkeit unabhängig sein könne von der besonderen Erregungsweise und vielleicht allgemein ihre Ursache in den Beziehungen des Elektrons zu seinem Mutteratom und den Einflüssen der Nachbaratome habe. Diese für die Fortführung der Theorie wichtige Frage wird durch das Experiment zu entscheiden sein. Wertvoll sind in dieser Hinsicht namentlich die experimentellen Versuche, die Verteilung von Elektronenaustrittsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Erregungsarten festzustellen. Für die lichtelektrische Wirkung selbst käme die Ausdehnung der Untersuchungen auf den selektiven Effekt in Betracht. Wieweit die bisherige Beobachtung in einigen anderen Fällen zu der Frage einen Beitrag zu liefern vermag, soll im folgenden untersucht werden.

B. Die Elektronenemission der Röntgenstrahlen.

Die Feststellung, wieweit die in den Gesetzmäßigkeiten der Elektronenemission allgemein deutlich zutage tretende Analogie zwischen Röntgenstrahlen und Licht sich etwa auch in der Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten geltend machen könnte, ist von besonderem Interesse. Während einerseits die

1) In diesen Unsicherheiten werden wohl auch die geringen Verschiedenheiten verborgen bleiben, welche man für die Austrittsarbeit verschiedener Stoffe erwarten sollte.

erregende Energie in beiden Fällen von ähnlicher Art ist, besteht andererseits im allgemeinen ein erheblicher Unterschied in den Absolutwerten der Geschwindigkeit. Deren beträchtliche Größe im gegenwärtigen Falle hat für die Deutung der Beobachtungsergebnisse den Vorteil, daß der Einfluß einer Austrittsarbeit praktisch verschwindet, und den Nachteil, daß das Hinzukommen tertiärer Strahlung das Erkennen der primären Verteilung erschwert oder gar verhindert.

Während zunächst ebenso wie beim lichtelektrischen Effekte die Auffassung vom Auftreten einer nahe homogenen Austrittsgeschwindigkeit oder eines beiderseits begrenzten engen Geschwindigkeitsbereiches bestand, ist zuerst von Hrn. Bestelmeyer[1]) durch photographische Fixierung im Magnetfelde eine ausgedehnte Geschwindigkeitsverteilung vom Charakter der beim lichtelektrischen Effekte erkannten gelegentlich nachgewiesen worden. Da die auch hierbei sich zeigende scheinbare beiderseitige Begrenzung durch Absorption und Plattenempfindlichkeit zu erklären ist, so kann durch diese Versuche eine qualitative Übereinstimmung der beiden Erscheinungsgebiete als festgestellt gelten.

Eine erste quantitative Untersuchung hat Hr. Laub[2]) durchzuführen versucht. Er bedient sich zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung eines begrenzten, nahe homogenen elektrischen Feldes und mißt die Emission von Platin und Aluminium bei zwei verschiedenen Röntgenstrahlhärten. Die von ihm gegebenen Verteilungskurven steigen von der Geschwindigkeit Null an zu einem Maximum und fallen von hier angenähert symmetrisch zu einem bestimmten von der Härte der erregenden Strahlen abhängigen oberen Grenzwerte. Leider entspricht die Durchführung der Methode, wie es scheint, weder in praktischer noch in theoretischer Hinsicht allen Anforderungen, und da keinerlei unmittelbare Beobachtungsdaten angegeben werden, ist die Beurteilung des Genauigkeitsgrades der graphisch verzeichneten Resultate nicht möglich. Man wird daher von einer quantitativen Verwertung derselben Abstand nehmen müssen.

---

1) A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. **22**. p. 429. 1907.
2) J. Laub, Ann. d. Phys. **26**. p. 712. 1908.

Für relativ weiche Röntgenstrahlen hat Hr. Seitz[1]) mit Benutzung einer gänz ähnlichen Anordnung Verteilungskurven der von Platin austretenden Elektronen festgestellt. Dieselben sind, der Anordnung entsprechend, vom Charakter der in Kap. I untersuchten Homogenfeldkurven, sind aber, wie Hr. Seitz selbst richtig erkennt, infolge einer von ihm angewendeten Netzanordnung so stark verzerrt, daß auch sie weiterer quantitativer Verwertung unzugänglich bleiben.[2])

Da sonstige unmittelbar auswertbare Untersuchungen zur gegenwärtigen Frage nicht vorzuliegen scheinen[3]), so muß auf deren endgültige Beantwortung vorerst leider verzichtet werden. Es ist zu hoffen, daß die Vorteile, welche die Benutzung der streng homogenen charakteristischen Röntgenstrahlung bietet, diese Beantwortung in Bälde ermöglichen werden.

C. Die Elektronenemission von Kanalstrahlen.

Der Untersuchung dieser Erscheinung erwächst in allen Fällen der Nachteil, daß die Evakuation des Versuchsraumes hier niemals bis zu der Höhe getrieben werden kann wie bei den zuvor besprochenen Erscheinungen. Im Hinblick auf die gänzliche Verschiedenartigkeit der Erregung kommt aber dem Studium dieses Falles besondere Bedeutung zu.

Die erste Untersuchung der von Kanalstrahlen ausgelösten Elektronen hat Hr. Füchtbauer[4]) ausgeführt. Für die Abhängigkeit der emittierten Menge von der Emissionsrichtung fand er, ohne ein Gesetz aufstellen zu können, langsame Ab-

1) W. Seitz, Physik. Zeitschr. 11. p. 705. 1910.

2) Netzanordnungen zur Verhinderung von Elektronenreflexion sind in der Literatur vielfach benutzt worden. Meist wurden dadurch mehr Störungen verursacht als beseitigt. Ebenso wie bei Hrn. Seitz ist das Netz bei Hrn. Laub als Fehlerquelle zu betrachten. Die Verwendung eines Faradaykäfigs als Auffänger verhindert an sich die Elektronenverluste in so weitgehendem Maße, daß ein zugefügtes Netz um so eher entbehrlich erscheint. Wo dasselbe zur exakteren Abgrenzung eines bestimmten elektrischen Feldes dienen soll, wird es mit Vorteil mit dem Käfigauffänger direkt leitend zu verbinden sein, so daß eine Abschirmung von Elektronen ausgeschlossen bleibt.

3) Bezüglich der älteren Literatur vgl. z. B. R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen, Braunschweig 1912.

4) Chr. Füchtbauer, Physik. Zeitschr. 7. p. 153 und p. 748. 1906; Ann. d. Phys. 23. p. 301. 1907.

nahme der Intensität von der Normalen aus nach beiden Seiten, d. h. eine unzweifelhafte Annäherung an den von uns theoretisch untersuchten Fall der Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetze, der bereits aus verschiedenen Gründen als wahrscheinlichster Fall bezeichnet worden ist.

Zur Geschwindigkeitsmessung benutzt Hr. Füchtbauer die Methode der magnetischen Ablenkung. Wieweit dieselbe namentlich in ihren geometrischen Einzelheiten ausgearbeitet worden ist, und wieweit daher die Ergebnisse unabhängig von der Versuchsanordnung als Ausdruck der Wirklichkeit bezeichnet werden können, ist aus der Veröffentlichung leider nicht zu ersehen. Da Hr. Füchtbauer selbst die von ihm gefundene Geschwindigkeitsverteilung nicht ernst zu nehmen, sondern auf Einflüsse der Versuchsanordnung zurückzuführen scheint[1]), da er offenbar das Vorhandensein einer einheitlichen Sekundärstrahlgeschwindigkeit glaubt annehmen zu müssen, so wird die Bedeutung seiner Messungen jedenfalls einzuschränken sein. Immerhin werde versucht, ihre Aussagen einheitlich zu überblicken. Es möge hierzu nur der relative Verlauf der Geschwindigkeiten betrachtet werden und die Größe der Absolutwerte, die im Hinblick auf entsprechende wenig zutreffende Angaben bezüglich der Sekundärstrahlen der Kathodenstrahlen kaum als gesichert gelten dürften, unberücksichtigt bleiben.

Die graphische Darstellung in Fig. 16 gibt sämtliche von Hrn. Füchtbauer für 3 Fälle einzeln verzeichneten Ergebnisse seiner Messungen nach vorgenommener Reduktion auf die Abszisse des Maximums als Einheit durch die Punkte (× • ○) wieder. Die Abszisse gibt die relativen Lineargeschwindigkeiten, die Ordinate die zu einem jeweils gleich großen Bereiche[2]) derselben gehörige Elektronenmenge, ebenfalls auf die Menge des Maximums als Einheit bezogen, an. Man erkennt, daß der Verlauf in allen 3 Fällen im großen und ganzen ein analoger ist, was allerdings nichts besagen würde, falls die Versuchsanordnung für ihn verantwortlich zu machen wäre. Die Hinzufügung der ausgezogenen Kurve

1) Chr. Füchtbauer, Ann. d. Phys. 23. p. 304. Anm. 2. 1907.

2) Die Forderung, daß bei der Messung der Bereich gleich bleibe, ist unerläßlich; ob Verf. dies berücksichtigt hat, ist nicht zu ersehen.

gestattet den Vergleich mit der für Maxwellsche Verteilung der Energie geltenden Verteilung der Lineargeschwindigkeiten. Der Verlauf ist in beiden Fällen ein ähnlicher.

Hr. Baerwald[1]) hat die magnetischen Messungen in einer kritischen Untersuchung mit verbesserten Hilfsmitteln wiederholt. Er weist insbesondere auf den störenden Einfluß der Diffusion und Absorption der Elektronen und die Mitwirkung von Elektrizitätsträgern hin und sucht selbst durch Benutzung wesentlich höherer Gasverdünnungen reinere Bedingungen zu erhalten. Sein Ergebnis für Aluminium als emittierender Sub-

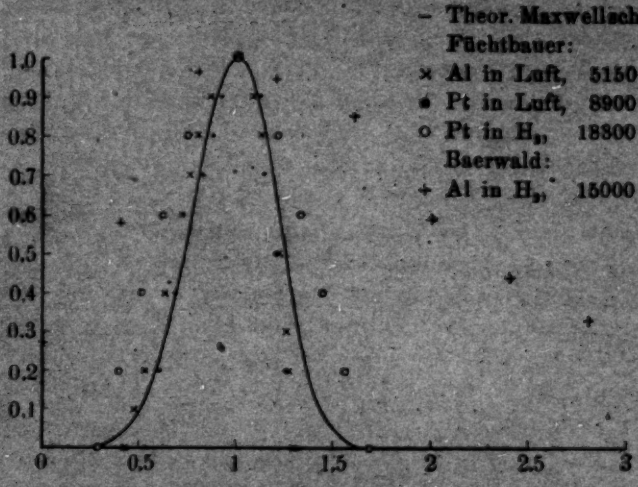


Fig. 16.

stanz und Wasserstoffkanalstrahlen von ca. 15000 Volt (4 mm Parallelfunken) als erregender Strahlung wird durch + in Fig. 16 verzeichnet. Es ist dies das Resultat der Subtraktion der von ihm angegebenen Kurven a) und e) der Fig. 3 seiner Arbeit voneinander nach Reduktion auf die Maximalordinate und deren Abszissenwert als Einheit und sollte ein Maß für die reine Elektronenemission sein. Die vollkommene Verschiedenheit des neuen Verlaufes, der dem früheren nicht nur kleinere, sondern auch in besonders erheblichem Betrage größere Geschwindigkeiten hinzufügt, läßt erkennen, in welch

1) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 42. p. 1287. 1913.

hohem Maße bei derartigen Untersuchungen das Ergebnis durch die äußeren Verhältnisse beeinflußt zu werden vermag.

In einer älteren Arbeit sucht Hr. Baerwald[1]) die Frage nach den Austrittsgeschwindigkeiten auf elektrischem Wege zu lösen. Er benutzt die Methode des homogenen Feldes mit begrenztem Auffänger und sucht aus dem im Gebiete verzögernder Potentialdifferenzen beobachtbaren Kurvenverlaufe auf die Geschwindigkeitsverteilung zu schließen. Wichtig ist die Feststellung der Proportionalität der emittierten Menge mit der Intensität des Primärstrahles, der Unabhängigkeit der Austrittsgeschwindigkeiten von der letzteren und von der Natur der Substanz und der Zunahme der Geschwindigkeit mit der Primärstrahlgeschwindigkeit, die aber einer Grenze zustreben solle. Aus den Verteilungskurven schließt Hr. Baerwald auf weit überwiegendes Vorhandensein sehr kleiner Austrittsgeschwindigkeiten von einigen Volt mit rascher Abnahme der Anzahl beim Übergange zu größeren Geschwindigkeiten. Wenn dieser Schluß im einzelnen auch auf ungenügender Beachtung der Eigenschaften des homogenen Feldes und der aus seiner Begrenzung für die theoretische Deutungsweise der Beobachtung folgenden Konsequenzen beruht (vgl. Kap. I, A I u. B I a 8), so bleibt er im allgemeinen doch auch bei strengerer Behandlung bestehen.

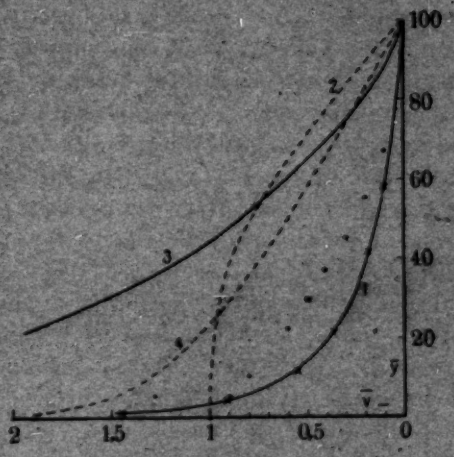


Fig. 17.

Kurve 1 der Fig. 17 zeigt zur Veranschaulichung den für einen bestimmten Fall (Aluminium, Wasserstoffkanalstrahlen, Parallelfunkenstrecke 4,6 mm) direkt beobachteten Gang (die Spannung von 11 Volt als Einheit der Abszissen-

1) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 41. p. 643. 1913; vgl. auch Verh. d. D. Physik. Ges. 14. p. 675 u. 867. 1912.

werte gewählt), Kurve 2 den Gang, wie er nach den früheren Entwicklungen in der benutzten Anordnung (mit der bereits in Fig. 2 angenommenen Begrenzung) zu erwarten wäre, falls alle bei Feldfreiheit meßbaren Elektronen (100) die gewählte Einheit der Geschwindigkeit hätten. Der dem letzteren Falle bei unbegrenztem Auffänger entsprechende Gang wird durch die Punkte • angemerkt. Man erkennt hieraus den außerordentlichen Einfluß der relativ erheblichen Begrenzung auf den Kurvenverlauf und kann aus dem Vergleiche von 1 und 2 schließen, daß im Falle der Beobachtung — Störungsfreiheit der Kurve vorausgesetzt — weit überwiegend allerkleinste Geschwindigkeiten angezeigt erscheinen, wobei natürlich das Vorhandensein einer Verteilung vom Charakter der auf magnetischem Wege gefundenen nicht ausgeschlossen wäre. Einen quantitativen Vergleich mit dem Ergebnis der magnetischen Messungen ermöglicht die Hinzunahme der Kurve 3. Sie gibt denjenigen Verlauf, welcher von Hrn. Baerwald nach seinem elektrischen Verfahren hätte beobachtet werden müssen, wenn die von ihm mit der magnetischen Methode ermittelte Verteilung zuträfe. Kurve 4 zeigt endlich den Gang, der im Falle der Maxwellschen Verteilung der Voltgeschwindigkeiten und damit auch angenähert dann zu erwarten wäre, wenn die von Hrn. Füchtbauer angegebene Verteilung den Tatsachen entspräche.

Diese Vergleiche zeigen, daß die großen Differenzen, die nicht nur zwischen analogen Messungen der verschiedenen Beobachter, sondern auch zwischen dem Ergebnis verschiedener Methoden ein und desselben Beobachters bestehen, die zum Teil bereits Hrn. Baerwald beschäftigten und zum Versuche eines Ausgleiches anregten, jede Sicherheit ausschließen. Besonders auffallend ist der dem begrenzten homogenen Felde im allgemeinen fremde außerordentlich starke Anstieg der beobachteten Kurve im Gebiete kleiner Potentialdifferenzen. Da die Variation der Kanalstrahlgeschwindigkeit den Verlauf nur geringfügig beeinflußt, ist er jedenfalls nicht als Folge einer inhomogenen Strahlung anzusehen. Wieweit die Nichtberücksichtigung von Kontaktpotentialdifferenzen, die Hr. Baerwald zwar erkannt, aber nicht eliminiert hat, die Kurve zu fälschen vermochte, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Die Potentialdifferenz zwischen dem bestrahlten Aluminium

und gegenüberstehendem Platin bzw. Messing wirkt jedenfalls nicht beschleunigend auf die emittierten Elektronen, was, wie früher gezeigt, einen Anstieg der Kurve zur Folge hätte. Beschleunigungen infolge des Kontakteffektes können bei der getroffenen Wahl der Metalle nur zwischen Platinnetz und Auffangekäfig wirksam werden. Das erstere ist aus diesem und anderen Gründen jedenfalls unvorteilhaft.

Wie man sieht, bedarf es zur Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung der von Kanalstrahlen ausgelösten Elektronen und damit zur Gewinnung eines Beitrages zu der oben aufgeworfenen allgemeinen Frage nach der Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung von der Art der erregenden Ursache von dieser Seite her neuer, durch die vorstehenden Feststellungen geleiteter Untersuchungen.

Heidelberg, Radiolog. Institut u. Theoretisch-Physikal. Apparat, 22. September 1918.

(Eingegangen 25. September 1918.)

2. Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie; von R. J. Humm.

In einer früheren Arbeit[1]) wurde ich auf die Vermutung geführt, daß die Einsteinschen Energiegleichungen als Bewegungsgleichungen anzusehen sind. Die Bestätigung dieser Vermutung gelang mir dadurch, daß ich von den einfachen Verhältnissen der gewöhnlichen Mechanik ausging und darin diejenige Formulierung und Interpretation des Energiesatzes suchte, die sich auf das allgemein-relativistische Problem übertragen läßt. Abgesehen von der Anzahl der unabhängigen Variablen herrscht zwischen beiden Problemen völlige Analogie; die Verallgemeinerung, die das zweite dem ersten gegenüber nachweist, ist kaum mehr als bloß formal, jedenfalls nicht derart, daß alle Überlegungen, die z. B. auf die Hamilton-Jacobischen oder den kanonischen Gleichungen führen, sich nicht direkt übertragen ließen. Auch die Frage nach den Energiegleichungen wird beim allgemeineren Problem dieselbe Behandlung erfahren, wie wir sie in der Mechanik vornehmen wollen.

Der Energiesatz der Mechanik wird für uns zu einem regulativen Prinzipe hinsichtlich des zeitlichen Ablaufes des Weltgeschehens, sowohl im einzelnen wie im ganzen, wie wir jetzt in einer etwas schwerfälligen, aber der Verallgemeinerung fähigen Weise begründen wollen.

1.

Bedeutet ϑ die absolute Zeit und ξ_i, im einfachsten Falle, die Lageparameter eines bewegten Massenpunktes, so erhält man die Werte dieser ξ_i, ausgedrückt als Funktionen der Zeit, dadurch, daß man sie innerhalb eines Zeitabschnittes

1) R. J. Humm, Ann. d. Phys. 57. p. 68, als l. c. erwähnt.

um $\delta \xi_i$ variiert und dann die so entstehende Variation einer Funktion H

$$H = \int L\left(\frac{d\xi_i}{d\Theta}, \xi_i\right) d\Theta \tag{1}$$

gleich Null setzt:

$$\delta H = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_i} - \frac{d}{d\Theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\right) \delta \xi_i \, d\Theta = 0; \quad \dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{d\Theta}. \tag{2}$$

Die so gewonnenen Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{d\Theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0 \tag{3}$$

stellen uns dann den gewünschten Zusammenhang zwischen ξ_i und Θ dar.

Das Energieprinzip wird gewöhnlich aus diesen Gleichungen abgeleitet; bei dieser Ableitung kommt aber seine regulative Bedeutung nicht ganz zur Geltung wie bei einer Ableitung aus den Gleichungen (2) selbst, die mehr enthalten als die (3), da wir darin noch die Möglichkeit haben, über die $\delta \xi_i$ ein Näheres auszusagen. Die Ableitung aus dem Variationsprinzipe ist auch deshalb vorzuziehen, weil man bei solchen Prinzipien das Resultat viel genauer versteht, sofern man sich vorher klargemacht, wie man variieren soll; die Art des Variierens ist für die Bedeutung des Resultates charakteristisch.

Um unseren Gedanken in einem einfachen Falle durchzuführen, setzen wir $n = 1$ und denken uns in der (ξ, Θ)-Ebene eine Kurve C gegeben, die uns die Abhängigkeit der Funktion ξ von Θ angibt. Unter ξ können wir auch die Gesamtheit der Funktionen ξ_i verstehen. Dann denken wir uns im Raume ξ die Bahnkurve festgelegt — etwa durch das Jacobische Prinzip — und stellen durch ein Gesetz, das in unserem Falle beliebig sein darf, eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Bahnkurve und den Punkten längs der Zeitachse her. Dieses Gesetz sei z. B. dadurch festgelegt, daß wir längs der Bahnkurve gleiche Abstände a abtragen, dadurch Parallelen zur Θ-Achse ziehen und durch deren Schnittpunkte mit der Kurve C neue Parallelen zur ξ-Achse. Dadurch wird auf der Θ-Achse eine Folge von Punkten $P_1, P_2, \ldots$ ausgeschnitten, die kontinuierlich wird, wenn man $a \to 0$ konvergieren läßt. Die Tatsache nun, daß

der infinitesimale Abstand zweier Punkte P vom Parameter Θ abhängt, drücken wir einfach durch den Satz aus: Die Punktfolge P ist eine Funktion $\bar{\Theta}$ von Θ.

In der Zeit Θ liegt also eine gewisse Schar von Zeitpunkten, denen nach einem bestimmten Gesetze bestimmte Punkte der Bahnkurve zugeordnet sind. Die Funktion $\bar{\Theta}(\Theta)$ nennen wir die *Ablaufsfunktion*, denn jede Punktfolge ist ein Abbild des zeitlichen Ablaufes der Bewegung längs der Bahnkurve; sie zeigt uns an, wie die Bahnkurve durchlaufen wird.

Nun wollen wir diese Punktfolge variieren im Einklang mit dem Zuordnungsgesetz; wir sprechen dann von einer virtuellen Verrückung der Punkte P. Kommt nämlich *demselben* Punkte P eine neue Lage zu, die durch einen anderen Wert der Koördinate Θ festgelegt ist, so soll diesem Punkte immer noch *derselbe* Wert der ξ, also derselbe Punkt der Bahnkurve zugeordnet sein, d. h. er soll den Wert von ξ mitgenommen haben; die Werte der Funktionen ξ_i sollen an den Punkten P_i gewissermaßen *haften*. Dies hat eine Verrückung der Kurve C zur Folge, die durch eine Verschiebung parallel zur Zeitachse zustande kommt. Die Bahnkurve im ξ-Raume bleibt dieselbe, so daß wir auch sagen können, wir hätten einfach ihren zeitlichen Durchlauf oder den zeitlichen Verlauf der Bewegungen variiert.

In einem ins Auge gefaßten Zeitpunkte Θ besitzt die Funktion ξ_i infolge dieser Verrückung den neuen Wert $\bar{\xi}_i$, der sich um $\delta_{\bar{\Theta}} \xi_i$ von den früheren unterscheidet. Der Index $\bar{\Theta}$ an δ soll bedeuten, daß die Variation induziert ist, und zwar durch eine Variation $\delta\bar{\Theta}$ der Funktion $\bar{\Theta}(\Theta)$. Es liegt nun im Variationsprinzip (2) enthalten, daß man unter dem dort vorkommenden $\delta\xi_i$ die Variation von ξ_i an der Stelle Θ verstehen soll; die $\delta\xi_i$ selbst sind aber vollkommen beliebig und brauchen nicht voneinander unabhängig zu sein. Indem wir darunter unsere induzierte Variation $\delta_{\bar{\Theta}}\xi_i$ verstehen, lassen wir alle $\delta\xi_i$ von der einen Variation $\delta\bar{\Theta}$ abhängen und werden infolgedessen auch eine einzige Variationsableitung bekommen, deren Verschwinden uns eine Gleichung für jene Funktion, die wir variiert hatten, also für die Ablaufsfunktion $\bar{\Theta}(\Theta)$ liefern wird. Diese Bestimmung von $\bar{\Theta}(\Theta)$ wird jedoch nur in gewissem Sinne eindeutig sein. Bevor man das Zuordnungs-

gesetz festgelegt hat, hängen nämlich die $\bar{\xi}_i$ und $\bar{\Theta}$ noch willkürlich zusammen; bei jeder Festlegung dieses Gesetzes hat man die ξ_i als bestimmte Funktionen von $\bar{\Theta}$ einzuführen und wird dann aus dem Variationsprinzip das zum betreffenden Gesetze zugehörige $\bar{\Theta}(\Theta)$ erhalten. Die Zuordnung, die wir als Beispiel wählten, ist allerdings die naheliegendste und natürlichste, da sie sich auf gleichentfernte Bahnkurvenpunkte bezieht.

Man darf diese virtuelle Verrückung der Punktfolge P nicht mit einer infinitesimalen Transformation der Zeitkoordinate verwechseln; denn erstens würden wir mit einer solchen Transformation aus dem Rahmen der mechanischen Invarianzverhältnisse herausfallen, und dann, auch abgesehen davon, wollen wir eben unter $\delta_{\bar{\Theta}} H$ nicht den Unterschied von H verstehen, wenn man einmal diese und einmal jene Zeitkoordinate verwendet, sondern wir wollen darin den Unterschied erblicken, der unter Beibehaltung derselben Zeitmessung sich ergibt, wenn wir die Durchlaufsgeschwindigkeit innerhalb der etwa als Röhre aufgefaßten Bahnkurve variieren.

Unsere Aufgabe ist jetzt, die Abhängigkeit der Variation $\delta_{\bar{\Theta}} \bar{\xi}_i$ von $\delta \bar{\Theta}$ zu finden, und dies geschieht in der einfachsten Weise. *Nach* der Variation nämlich kommt demselben Zeitpunkt Θ ein anderer Wert $\bar{\xi}_i$ von ξ_i zu. Der Wert ξ_i kommt einem Zeitpunkte Θ' zu, der um

$$\varepsilon = \frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta} \tag{4}$$

von Θ entfernt ist. Von Θ' ausgerechnet ist demnach die Entfernung von Θ gleich $-\varepsilon$, und in dieser Entfernung hat ξ_i nach der Variation gemäß der abgebrochenen Taylorentwicklung den Wert

$$\bar{\xi}_i = \xi_i - \frac{d\xi_i}{d\Theta} \varepsilon = \xi_i - \frac{d\xi_i}{d\Theta} \frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta}.$$

Somit bekommen wir

$$\delta_{\bar{\Theta}} \bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i - \xi_i = -\frac{d\bar{\xi}_i}{d\Theta} \frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta}. \tag{5}$$

Diesen Wert führen wir an Stelle von $\delta \xi_i$ in (2) ein und erhalten

$$\delta_2 H = -\int\left[\frac{\partial L}{\partial \xi_i}\cdot\frac{d\xi_i}{d\Theta} - \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\right)\frac{d\xi_i}{d\Theta}\right]\frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}}\delta\bar{\Theta}\,d\Theta = 0.$$

Wir addieren und subtrahieren

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\cdot\dot{\xi}_i$$

innerhalb der Klammer; dann kommt, da L von Θ explicite nicht abhängt:

$$\int\left[\frac{\partial L}{d\Theta} - \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\dot{\xi}_i\right)\right]\frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}}\delta\bar{\Theta}\,d\Theta = 0.$$

Daraus folgt, wegen der Willkür von $\delta\bar{\Theta}$, sofern

$$\frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \neq 0:$$

$$\frac{dE}{d\Theta} = 0, \qquad E = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\dot{\xi}_i. \tag{6}$$

Der Fall

$$\frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} = 0$$

findet durch eine Transformation der ξ_i seine Erledigung. Gleichung (6) ist aber der Energiesatz, und die Funktion E ist die durch Legendresche Transformation der Lagrangeschen Funktion L entstandene Energiefunktion. Das Energieprinzip ist für uns eine Gleichung zur Bestimmung von $\bar{\Theta}$, und da diese Funktion ein Abbild des zeitlichen Verlaufes der Bewegung ist, können wir sagen: Nachdem wir die Gestalt der Bahnkurve gegeben haben, z. B. durch das Jacobische Prinzip, tritt noch das Energieprinzip hinzu und regelt deren zeitlichen Durchlauf in der Weise, daß dieser weder rascher noch langsamer stattfinden darf, als es eben geschehen soll. Für unsere Zwecke werden wir die Bedeutung einer Gleichung für $\bar{\Theta}(\Theta)$ in den Vordergrund halten, weil sich diese Auffassung auf das relativistische Problem verallgemeinern läßt.

2.

Bevor wir das eigentlich relativistische Gebiet betreten, wollen wir einen allgemeineren, einfachen Fall erledigen. Wir denken uns in einem vierdimensionalen Raume x_1, x_2, x_3, x_4 n Funktionen a_i gegeben, deren Gesamtheit wir

als a_i-Feld bezeichnen wollen, und zur Bestimmung dieser Funktionen ein Variationsproblem von der folgenden Form:

$$\delta H = \int A(a_{i\,\varkappa}, a_i)\, d\omega = 0, \tag{7}$$

wo

$$a_{i\,\varkappa} = \frac{\partial a_i}{\partial x_\varkappa}; \quad d\omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

ist. Aus (7) folgt:

$$\int \left(\frac{\partial A}{\partial a_i} - \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial A}{\partial a_{i\,\varkappa}} \right) \delta a_i\, d\omega = 0. \tag{8}$$

Genau so wie wir im mechanischen Falle vorgegangen sind, stellen wir zwischen den a_i — die wir auch die Lageparameter des Feldes nennen wollen und deren Wert wir uns im a_i-Raume durch eine gewisse Fläche (das Analogon zur Bahnkurve) festgelegt denken — und den Punkten des R_4 eine Beziehung her, indem wir den a_i eine n-parametrige Schar von F_{4-n} zuordnen, in der Weise, daß die a_i bei einer Verrückung der ganzen Schar daran *haften* bleiben.[1]) Solche Zuordnung können wir uns beliebig viel ausdenken und können sie ebenso wie früher geometrisch deuten in einem $(n+4)$-dimensionalen Raume; es würden dann die Kurven F_1 der Schar etwa als Schnittlinie des R_4 und einer Schar von n dimensionalen Flächen aufzufassen sein. Die Gleichungen der Kurvenschar seien $x_i = x_i(\xi_\varkappa)$; variieren wir $\xi_\varkappa$ innerhalb eines begrenzten Gebietes des R_4 um $\delta\xi_\varkappa$, und lassen wir die n Variationen δa_i virtuell von den vier Variationen $\delta\xi_\varkappa$ abhängen, so werden sich aus (8) vier Gleichungen ergeben, welche uns die Kurvenschar bestimmen, und zwar werden wir verschiedene Kurvenscharen erhalten, je nach dem Zuordnungsgesetze, das zwischen den a_i und den $\xi_\varkappa$ besteht. Die Variation $\delta_\xi a_i$ hat den Wert

$$\delta_\xi a_i = -\frac{\partial a_i}{\partial a_h} \varepsilon_h, \tag{9}$$

wo ε_h der Abstand zwischen einem Punkte $x_\varkappa$ und dem Punkte $\bar{x}_\varkappa$ für den nach der Variation die Funktionen $\bar{a}_i$ denselben Wert haben wie vor der Variation in $x_\varkappa$. Es hängt $\varepsilon_\varkappa$ mit $\delta\xi_i$ gemäß der Gleichung

$$\varepsilon_\varkappa = \frac{\partial x_\varkappa}{\partial \xi_i} \delta\xi_i \tag{10}$$

---

1) Wir haben hier $n = 3$.

zusammen; wir können aber ε_μ selbst als beliebig kleine und vollkommen willkürliche Größe auffassen. Aus (9) und (8) folgt

$$\delta_i H = -\int\left[\frac{\partial A}{\partial a_{i\mu}}\frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial a_{i\mu}}\right)\frac{\partial a_i}{\partial x_\lambda}\right]\varepsilon_\lambda\, d\omega = 0$$

und nach Addition und Subtraktion von

$$\frac{\partial A}{\partial a_{i\mu}}\alpha_{i\lambda\lambda}$$

unter der Klammer kommt, sofern A die x_μ explicite nicht enthält:

$$\int\left[\frac{\partial A}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial a_{i\mu}}a_{i\lambda}\right)\right]\varepsilon_\lambda\, d\omega = 0\,, \tag{11}$$

d. h. wegen der Willkür von ε_μ:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(A\,\delta^\mu_\lambda - \frac{\partial A}{\partial a_{i\mu}}a_{i\lambda}\right) = 0\,. \tag{12}$$

Diese Gleichungen von Divergenzcharakter stellen uns das zu der Lagrangeschen Funktion A gehörige *Energieprinzip* dar, und die 16 Funktionen:

$$E^\mu_\lambda = \frac{1}{\varkappa}\left(A\,\delta^\mu_\lambda - \frac{\partial A}{\partial a_{i\mu}}a_{i\lambda}\right), \tag{13}$$

die zu A gehörigen *Energiekomponenten* des Feldes a_i, die, wie wir sehen, durch eine verallgemeinerte Legendresche Transformation aus A entstehen.

3.

Und nun gehen wir zur Relativitätstheorie über und untersuchen, wie sich darin die Verhältnisse gemäß der speziellen Besonderheiten des Problems ändern. Wir setzen $n = 14$ und verstehen unter den a_i die 10 Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ und die 4 elektrodynamischen Potentiale q_ν. Als Lagrangesche Funktion A nehmen wir:

$$\mathfrak{L}(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_\lambda, q_\nu, q_{\nu\lambda}) = \mathfrak{L}^*(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_\lambda) + \mathfrak{M}(g^{\mu\nu}, q_\nu, q_{\nu\lambda}). \tag{14}$$

Wir stellen uns vor, daß deren Feld von dem Verlaufe einer dreiparametrigen Linienschar $x_i = x_i(\xi_\mu)$ abhängt, die wir die Weltlinien der Materie oder die *materiellen Weltlinien* bezeichnen wollen. Die Gesetze, die diese Weltlinien mit den Potentialen verbinden, kennen wir nicht, und wir brauchen

sie auch nicht zu kennen für unsere Zwecke[1]); es genügt uns bloß zu wissen, daß sie nicht wie unter 2. willkürliche, sondern eindeutige Zuordnungen der Feldkomponenten zu diesen Weltlinien sind, in der Weise, daß sich diese Linienschar von jeder anderen, die man sich in der Welt x_1, x_2, x_3, x_4 denken kann, auszeichnen, und daß bei einer virtuellen Verrückung der Schar die Feldkomponenten in einer der Zuordnung gemäßen Weise daran *haften*.

Wir stellen also zwischen der im Raume der $g_{\mu\nu}\, q_s$ (etwa vermöge eines Analogons zum Jacobischen Prinzip) als gegeben betrachteten Konstellation der Funktionen $g_{\mu\nu}\, q_s$ und den Punkten des Raumes x_i vier intermediäre Funktionen $\xi_\varkappa = \xi_\varkappa(x_i)$ auf, so daß ξ_i und $g_{\mu\nu}\, q_s$ in eindeutiger und allerdings nicht näher bekannter Weise abhängen. Wir denken uns im Variationsproblem alles als Funktion dieser ξ_i ausgedrückt, variieren diese dann als Funktionen der $x_\varkappa$, in der Weise, daß die Abhängigkeit von den Feldparametern nicht gestört bleibt, und bekommen vier Gleichungen zu ihrer Bestimmung. Wir suchen also die Gleichungen der materiellen Weltlinien ohne deren Abhängigkeit vom Felde explicite anzugeben, und werden sonach Gleichungen bekommen, die diesen Verlauf nur implicite enthalten, genau wie das mechanische Energieprinzip nur implicite die Ablaufsfunktionen enthält. Näheres werden wir nicht angeben können, solange wir das Zuordnungsgesetz, das uns auf den aus den Feldern konstruierten Begriff der Materie[2]) führen wird, nicht haben.

Dadurch, daß wir früher[3]) in der Zuordnung des Feldes zu den Weltlinien einen Schritt weitergingen, indem wir nämlich der Weltlinienschar eine ebensoviel parametrische Schar von *inneren* Feldern zuordneten (anstatt jener Feldwerte, die sich auf deren Verlauf befinden und die erst durch Superposition der inneren Felder entstehen), sind wir auf den Begriff der gravitoelektromagnetischen Masse gekommen, in dem sich vielleicht derjenige der ponderablen Materie erschöpft. In unserem Zusammenhange müssen wir mehr an der Oberfläche bleiben und eine Variation vornehmen, die derjenigen gleich-

1) Man kann sie bloß näherungsweise in ganz einfachen Fällen angeben.

2) l. c. p. 79.

3) l. c. p. 75 und 78.

kommt, die wir unter 4. (l. c. p. 74) an erster Stelle erledigten.[1])

Eine virtuelle Verrückung der Weltlinien ist jedoch wohl zu unterscheiden von einer infinitesimalen Koordinatentransformation; denn diese ändert an den Invarianzverhältnissen nicht das geringste, wohl aber eine virtuelle Verrückung. Nehmen wir in der Tat eine solche um die Entfernung ε vor, dann haben die Weltlinien in der verrückten Lage die Werte $g_{\mu\nu}$ mitgeführt: Durch eine die Invarianz nicht beeinträchtigende Koordinatentransformation $x' = x - \varepsilon$ bekommt die verrückte Weltlinienschar ihre ursprünglichen Koordinatenwerte wieder; aber die $g_{\mu\nu}$ haben sich geändert in $g'_{\mu\nu}$; die daraus gebildeten Invarianten sind also nicht dieselben. Die Weltlinienscharen haben verschiedene Maßverhältnisse.[2])

Nehmen wir die Verrückung vor, so führt uns die spezielle Gestalt des relativistischen Problems auf eine Schwierigkeit. Wir haben unter 2. alle α_i gleichmäßig behandelt; hier aber zerfallen sie in zwei scharf geschiedene Gruppen in den 10 $g_{\mu\nu}$ und in 4 q_α, von denen die $g_{\mu\nu}$ die metrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit bestimmen, während die q_α gewissermaßen darin eingebettet sind. Um die richtige Einsteinsche Energie zu bekommen, müssen wir unter dem Mitgenommensein des Vektors q_α durch die Weltlinie bei der Verrückung eine etwas andere Annahme machen.

Die Variation der $g^{\mu\nu}$ setzen wir genau so an, wie jene der α_i, nämlich

$$\delta_1 g^{\mu\nu} = -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\varepsilon_\lambda, \qquad \varepsilon_\lambda = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu. \tag{15}$$

Daraus folgt nach (11) für den Anteil $\mathfrak{L}^*$ der Lagrangeschen Funktion:

---

1) Wir sagten dort, daß das elektromagnetische Feld unverändert bleibt; in Wirklichkeit wird es mitgenommen. Wir durften aber so sagen, weil wir eine entsprechende Variationsauffassung hatten. Dort bedeutet δ den Unterschied der Werte zwischen verrücktem und unverrücktem Kurvenpunkt — hier verstehen wir aber darunter den Unterschied vor und nach der Variation in demselben Weltpunkte. Die Integration schafft das gleiche Resultat (vgl. etwa K. Schwarzschild, Gött. Nachr. 1903, p. 129).

2) Darin unterscheidet sich diese Verrückung auch von derjenigen von H. Weyl (Ann. d. Phys. 54. p. 121).

$$\delta \int \mathfrak{R}^* d\omega = \int \frac{\partial t_h^\varkappa}{\partial x_\varkappa} \varepsilon_h d\omega, \tag{16}$$

wo

$$t_h^\varkappa = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{R}^* \delta_h^\varkappa - \frac{\partial \mathfrak{R}^*}{\partial g_{\varkappa\nu}^{\varkappa\nu}} g_h^{\varkappa\nu}\right) \tag{17}$$

ist. Das ist aber der bekannte Energiepseudotensor des Gravitationsfeldes.

Nehmen wir auch für die q_s eine Variation von der Art (9) vor, so bekommen wir für den elektromagnetischen Energieanteil einen Ausdruck, der nur innerhalb der projektiven Gruppe mit dem von Einstein gegebenen übereinstimmt. Um die richtige Energie zu bekommen, müssen wir die Varation des Vektors q so vornehmen, daß q *in bezug auf die Weltlinie* derselbe bleibt, d. h., daß das skalare Produkt $q \,.\, dx$ bei der Verrückung erhalten bleibt.[1]) Dies bedeutet: Ist q_s der Wert der s-ten Komponente von q im Punkte $x_\varkappa(\xi_i)$ *vor* der Verrückung, und $\bar{q}_s$ der Wert im Punkte $x_\varkappa(\xi_i) = x_\varkappa + \varepsilon_\varkappa$ *nach* der Verrückung, so soll

$$q_\varkappa dx_\varkappa = \bar{q}_\varkappa d\bar{x}_\varkappa \tag{18}$$

sein. Setzen wir

$$\bar{q}_s = q_s + \delta_1 q_s,$$

so bekommen wir für $\delta_1 q_s$ den Wert

$$\delta_1 q_s = -q_\varkappa \frac{\partial \varepsilon_\varkappa}{\partial x_s}.$$

Nach der Verrückung ist der Wert von q_s im Punkte x gegeben durch

$$\bar{\bar{q}}_s = \bar{q}_s - \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x_h} \varepsilon_h$$

und somit ist

$$\bar{\bar{q}}_s - q_s = \delta_2 q_s = -\frac{\partial q_s}{\partial x_h} \varepsilon_h - q_h \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial x_s}.^2) \tag{19}$$

Dabei haben wir alle Glieder höherer Ordnung in ε_h weggelassen, da uns später nur der Koeffizient von ε_h interessieren wird.

---

1) Das ist nicht selbstverständlich, da wir es nicht mit Koordinatentransformation zu tun haben.

2) Diese Variation von q_s finde ich auch bei F. Klein, Gött. Nachr. 1917. p. 469. Formel (13).

Für den Teil $\mathfrak{M}$ der Lagrangeschen Funktion ergibt sich

$$(20)\qquad \delta\int \mathfrak{M}\,d\omega = \int \delta\,\mathfrak{M}\,d\omega = \int\Big[\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,g^{\mu\nu}}\,\delta\,g^{\mu\nu} + \Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_i} - \frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\,\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\Big)\,\delta\,q_i\Big]\,d\omega\,.$$

Wir rechnen jetzt die eckige Klammer um, dabei alle Glieder von Divergenzcharakter, denen wir begegnen werden, einfach weglassend, da sie ausintegriert Null geben, wegen des Verschwindens der Variationen am Rande. Wir erhalten

$$\underbrace{\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,g^{\mu\nu}}\,g^{\mu\nu}_\sigma\,\varepsilon_\sigma}_{1.} + \underbrace{\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_i}\,q_{i\sigma}\,\varepsilon_\sigma}_{2.} + \underbrace{\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_i}\,q_\sigma\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i}}_{3.} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\Big)\,M_{\sigma i}\,\varepsilon_\sigma}_{4.} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\Big)\,\frac{\partial\,(q_\sigma\,\varepsilon_\sigma)}{\partial\,x_i}}_{5.}$$

$$3. = -\frac{\partial}{\partial\,x_i}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_i}\,q_\sigma\Big)\,\varepsilon_\sigma\,.$$

$$4. + 5. = -\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,M_{\sigma i}}\Big)\,M_{\sigma i}\,\varepsilon_\sigma - \frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\Big)\,\frac{\partial\,(q_\sigma\,\varepsilon_\sigma)}{\partial\,x_i}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,M_{\sigma i}}\,M_{\sigma i}\Big)\,\varepsilon_\sigma + \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,M_{\sigma i}}\,\frac{\partial\,M_{\sigma i}}{\partial\,x_\varkappa}\,\varepsilon_\sigma + \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\,\frac{\partial^2\,(q_\sigma\,\varepsilon_\sigma)}{\partial\,x_i\,\partial\,x_\varkappa}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,M_{\sigma i}}\,M_{\sigma i}\Big)\,\varepsilon_\sigma + \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\Big[\frac{\partial\,M_{\sigma i}}{\partial\,x_\varkappa}\,\varepsilon_\sigma + \frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(q_{\sigma i}\,\varepsilon_\sigma + q_\sigma\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i}\Big)\Big]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,M_{\sigma i}}\,M_{\sigma i}\Big)\,\varepsilon_\sigma + \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\Big(\frac{\partial\,q_{i\sigma}}{\partial\,x_\varkappa}\,\varepsilon_\sigma - \frac{\partial\,q_{\sigma i}}{\partial\,x_\varkappa}\,\varepsilon_\sigma + \frac{\partial\,q_{\sigma i}}{\partial\,x_\varkappa}\,\varepsilon_\sigma + q_{\sigma i}\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_\varkappa} + q_{\sigma\varkappa}\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i} + q_\sigma\,\frac{\partial^2\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i\,\partial\,x_\varkappa}\Big)\,.$$

Nun ist

$$\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\,q_{\sigma i}\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_\varkappa} + \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\,q_{\sigma\varkappa}\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i} = \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\,q_{\sigma i}\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_\varkappa} - \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{\varkappa i}}\,q_{\sigma\varkappa}\,\frac{\partial\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i} = 0\,.$$

Somit

$$4. + 5. = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial\,x_\varkappa}\Big(\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,M_{\sigma i}}\,M_{\sigma i}\Big)\,\varepsilon_\sigma}_{A.} + \underbrace{\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\,\frac{\partial\,q_{i\varkappa}}{\partial\,x_\sigma}\,\varepsilon_\sigma}_{B.} + \underbrace{\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,q_{i\varkappa}}\,q_\sigma\,\frac{\partial^2\,\varepsilon_\sigma}{\partial\,x_i\,\partial\,x_\varkappa}}_{C.}\,.$$

Nun aber ist

$$1. + 2. + \mathrm{B.} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_\sigma} \varepsilon_\sigma .$$

Also ist, sofern wir in einem bestimmten Koordinatensystem

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\sigma}{\partial x_i \partial x_m} = 0 \tag{21}$$

setzen (eine linear-invariante Beziehung die sich mit den anderen Bedingungen für ε_σ verträgt):

$$\delta \int \mathfrak{M}\, d\omega = - \int \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathfrak{M}\, \delta^k_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{ik}} q_{i\sigma} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ik}} M_{i\sigma} \right) \varepsilon_\sigma \, d\omega . \tag{22}$$

Diese Beziehung gibt uns also den elektromagnetischen Energieanteil zu

$$\mathfrak{T}^k_\lambda = \tfrac{1}{2} \left(\mathfrak{M}\, \delta^k_\lambda - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{ik}} q_{i\lambda} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ik}} M_{i\lambda} \right) . \tag{23}$$

Nach einer von Hilbert[1]) angegebenen Formel läßt sich dafür der Ausdruck

$$\mathfrak{T}^k_\lambda = - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu k}} g^{\mu \lambda} \tag{24}$$

finden, der mit dem bekannten übereinstimmt.

Wir sind somit auf die Gleichung

$$\int \frac{\partial \left(\mathfrak{T}^k_\nu + \mathfrak{t}^k_\nu \right)}{\partial x_k} \varepsilon_\lambda \, d\omega = 0 \tag{25}$$

geführt worden, welche die erste von einer unendlichen Reihe von Gleichungen ist, die sich ergeben würden, wenn in (15) und (19) die vollständigen Taylorentwicklungen stehen würden. Aus (25) folgen die Einsteinschen Energiegleichungen:

$$\frac{\partial \left(\mathfrak{T}^k_\lambda + \mathfrak{t}^k_\lambda \right)}{\partial x_k} = 0 . \tag{26}$$

Die virtuelle Verrückung, die wir vorgenommen haben, entspricht derjenigen, die l. c. unter 4. an erster Stelle behandelt wurde, und die uns zum d'Alembertschen Prinzipe der Elektrodynamik, wonach die virtuelle „Arbeit" der Gesamtkräfte verschwindet, führte. Dasselbe bedeutet auch Gleichung (25), während (26) bedeutet, daß die Gesamtkräfte

1) Gleichungen (18) und (19) in „Die Grundlagen der Physik, 1. Mitteilung". Göttinger Nachr. 1915.

selbst verschwinden, daß also die Kräfte des Gravitations- und des elektromagnetischen Feldes sich an jeder Stelle vernichten.

Beim elektromagnetischen Felde sind wir gezwungen worden, die virtuellen Bedingungen durch die Forderung (18) in einer Hinsicht zu präzisieren und durch (21) einzuschränken; der Unterschied zwischen mechanischem und allgemein relativistischem Problem liegt also nur in den Bedingungen für die virtuelle Verrückung. Warum wir so verrücken müssen, können wir a posteriori begründen: es muß nämlich die von Einstein angegebene Energie herauskommen. A priori aber müssen wir offen zugeben, es noch nicht zu verstehen; denn wir wissen noch nicht, was wir uns unter dem elektromagnetischen Felde vorstellen sollen. Während durch den Gedanken der allgemeinen Invarianz die Parameter des Gravitationsfeldes festgelegt sind und eine anschauliche Bedeutung erhalten haben, besitzen wir für die elektrischen Parameter keinen ähnlichen Gedanken. Wir sagen, es seien Vektoren; aber deren innere geometrische Bedeutung, deren geometrische Fixierung geht uns noch ab. A priori können wir die Bedingungen, wie sie von den Weltlinien mitgenommen werden, nicht angeben. Die Tatsache, die in der Formel (18) ihren Ausdruck findet, läßt uns auf einen sehr innigen Zusammenhang zwischen materieller Weltlinie und elektromagnetischem Felde schließen, da er durch die Verrückung nicht gestört werden darf.

Es ist interessant, zu sehen, daß, wenn wir den historischen Weg Mechanik—Elektrodynamik—Gravitation mitmachen, wir Schwierigkeiten haben, die Gravitationsenergie zu verstehen, da uns diese *experimentell* ferner liegt, während der aus Prinzipien in umgekehrtem Sinne verlaufende Weg uns sofort die richtige Gravitationsenergie liefert und uns bei der elektromagnetischen Energie Schwierigkeiten bereitet, weil diese den *Prinzipien* ferner steht. Wir wollen auf diese Dinge nicht näher eingehen; uns genügt es hier, den Zusammenhang zwischen Energiegleichungen und materiellen Weltlinien hervorgehoben zu haben.

Göttingen, den 24. August 1914.

(Eingegangen 1. September 1918.)

3. *Über den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents;*

von W. Jaeger und H. von Steinwehr.

[Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.]

In einer unter dem gleichen Titel erschienenen Mitteilung von Carlton Sutton[1]) ist eine Zusammenstellung der bisher ermittelten Werte des mechanischen Wärmeäquivalents enthalten, in der als Wert der Reichsanstalt (Jaeger und v. Steinwehr) 4,188 bei 15° C. angegeben ist. Der Verfasser kommt zu dem Schluß, daß dieser Wert unrichtig sei und daß der richtige Wert des Wärmeäquivalents 4,185 betrage. Demnach scheint dem Verfasser unsere Veröffentlichung in den Berliner Berichten[2]) entgangen zu sein, in der wir als Resultat einer ausgedehnten Untersuchung über das Wärmeäquivalent zwischen 0 und 50° angegeben haben:

$$1 \text{ g-Kalorie } (15°) = 4{,}184_3 \text{ Joule}$$

und zwar unter Zugrundelegung des internationalen Ohms und des internationalen Wertes des Westonelements (bei 20°) gleich 1,0183 Volt. Hierdurch ist die von dem Verfasser gefundene Unstimmigkeit in erfreulicher Weise beseitigt. Wenn man im übrigen die dort gegebene Zusammenstellung der Werte beibehält, so ergibt sich somit folgende Tabelle:

1843	Joule	4,178
1878	Rowland	4,184
1893	Griffiths	4,188
1894	Schuster und Gannon .	4,185
1897	Reynolds und Moorby .	4,184
1899	Callendar und Barnes .	4,184
1900	Griffiths (redus.) . . .	4,184
1908	Cremieu und Rispail .	4,189
1909	Barnes (redus.) . . .	4,185
1911	Bousfield	4,179
1915	Jaeger und v. Steinwehr	4,184
1915	Sutton-Henning . . .	4,185

1) Carlton Sutton, Phil. Mag. 35. p. 27. 1918.
2) W. Jaeger u. H. v. Steinwehr, Berl. Ber. 1915. p. 424.

Zu dieser Zusammenstellung ist noch folgendes zu bemerken: Der letzte Wert der Tabelle ist von dem Verfasser abgeleitet aus Messungen von ihm und von Henning[1]) über die Verdampfungswärme des Wassers, die von Sutton in Kalorien, von Henning in elektrischen Einheiten gemessen worden ist. Zur Umrechnung der elektrischen Einheiten in Kalorien benutzte Henning nun den von Sutton angegebenen oben erwähnten Wert 4,188 und bemerkt hinsichtlich der Messungen in der Reichsanstalt auf p. 853, Anm. 3: „Diese Messungen sind noch nicht veröffentlicht und werden fortgesetzt. Es ist möglich, daß die Zahl 4,188 noch kleine Änderungen erleidet, die indessen ein Promille nicht überschreiten werden." — In der Tat beträgt der Unterschied gegen die von uns veröffentlichte Zahl nicht ganz ein Promille. Die Zahl 4,188 stammte aus Vorversuchen, die wir später wegen der Fehler der damals benutzten Widerstandsthermometer völlig verworfen haben.

Was die übrigen Werte der obigen Zusammenstellung[2]) anbetrifft, so ist zu bemerken, daß bei den meisten der auf elektrischen Einheiten zurückgeführten Zahlen die elektrischen Einheiten unsicher sind, so daß eine etwaige Übereinstimmung mehr oder weniger ein Zufallsergebnis ist; nur bei Bousfield scheinen diese Grundlagen in Ordnung zu sein. Dieser Beobachter erhält aber einen auffallend niedrigen Wert (4,179).

Um einer Weiterverbreitung des von Sutton angegebenen unrichtigen Wertes 4,188 zu begegnen, schien es notwendig, die vorstehenden Ausführungen zu machen. Eine ausführliche Mitteilung über unsere Messungen ist durch den Krieg verzögert worden, soll aber demnächst erscheinen.

---

1) Carlton Sutton, Proc. Royl Soc. April 1917; F. Henning, Ann. d. Phys. 21. p. 849. 1906 u. 29. p. 441. 1909.

2) Vgl. dagegen die Zusammenstellung in den Tabellen von Landolt-Börnstein.

(Eingegangen 30. Januar 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Eigene Spezial-

Eingetragene

Fabrik-Marke

1918

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 56.

1. Zur Elektronentheorie des Magnetismus und des Halleffektes; von C. Borelius.

1. Wegen den großen Schwierigkeiten, die der Annahme einer gleichen Energieverteilung zwischen Leitungselektronen und Metallatomen auf fast allen Gebieten der Metallphysik entgegenstehen, hat der Verfasser versucht, ohne diese Annahme auszukommen. In zwei früheren Untersuchungen[1]), die kürzlich in diesen Annalen veröffentlicht worden sind, wurde in der ersten die Thermoelektrizität, in der zweiten die Erscheinungen der Elektrizitäts- und Wärmeleitung behandelt. Besonders wichtig war es, nachzusehen, ob das Gesetz von Wiedemann und Franz, das die hauptsächlichste Stütze für die Äquipartitionsannahme gewesen ist, auch ohne diese verständlich werden konnte. Die Ableitung dieses Gesetzes gelang nun auch unter der Voraussetzung, daß das Metallatomgitter an sich eine große Wärmeleitfähigkeit, somit kleinen thermischen Widerstand hat, und daß die beweglichen Elektronen nicht, wie bisher angenommen wurde, die große Wärmeleitfähigkeit der Metalle bedingen, sondern, im Gegensatze dazu, der überwiegende Teil des thermischen Widerstandes verantwortlich ist. Wir wollen jetzt die Elektrizitätsleitung von einem neuen Gesichtspunkte aus nochmals besprechen und dann bei der Behandlung des Magnetismus und des Halleffektes die innere Wahrscheinlichkeit und die Brauchbarkeit unserer Auffassung hervorheben.

Die Hypothese von dem metallischen Zustande, aus der die Resultate der beiden früheren Arbeiten abgeleitet worden sind, wollen wir folgendermaßen präzisieren: Die Struktur und die Schwingungen des Atomgitters werden hauptsächlich durch die gegenseitigen Kräfte der Atome bestimmt und werden von den Leitungselektronen nicht wesentlich beeinflußt. Jedes Atom spaltet wahrscheinlich ein Elektron ab

1) C. Borelius, Ann. d. Phys. 55. p. 201 u. 376. 1918.

Die abgespaltenen Elektronen werden im intermolekularen Raume überall von den benachbarten Atomen abgestoßen und bewegen sich überwiegend in den größtmöglichen Abständen von diesen. Der Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit wurde früher in einer Weise abgeleitet, die wir hier in etwas geänderter Form kurz andeuten wollen. Wenn ein Atom im Kristallgitter von seiner Ruhelage aus schwingt, verdrängt es das in dieser Richtung ihm benachbarte Elektron. Dieses entweicht z. B. in einer gebogenen Bahn um das Atom herum in den hinter dem Atom frei werdenden Raum. Wenn dann das Atom im nächsten Augenblicke nach der anderen Seite schwingt, geht wieder ein Elektron in entgegengesetzter Richtung fort. Ist die Zahl der ganzen Schwingungen des Atoms in der Sekunde ν und der mittlere Atomabstand $2r$, so bekommen die Elektronen in dieser Weise eine mittlere Beweglichkeit gleich $2\nu . 2r$, und es geht durch die Flächen eines Zentimeterwürfels in der Sekunde ein, sowie aus die Elektrizitätsmenge

$$i_m = 4 n \varepsilon \nu r , \tag{1}$$

wo ε die Ladung der Elektronen, n ihre Zahl pro Kubikzentimeter ist.

Ein elektrisches Feld (X) sucht die Elektronen entgegengesetzt seiner eigenen Richtung zu verschieben, und wenn nichts dieser Polarisation entgegenwirkte, würde die Volumeneinheit das maximale elektrische Moment

$$P_m = n \varepsilon R \tag{2}$$

bekommen, wenn R der Abstand zwischen einem Elektron und dem benachbarten Atom ist. Die kinetische Energie des Elektrons bewirkt aber, daß das Moment in Wirklichkeit die viel kleinere Größe P erhält, die wir in formaler Übereinstimmung mit der Berechnung des paramagnetischen Momentes eines Gases von Langevin[1]) bestimmen können. Bildet die Linie, die das Elektron mit dem benachbarten Atom verbindet, mit der Feldrichtung den Winkel Θ, so hat das Elektron in bezug auf das Feld die potentielle Energie $w = X \varepsilon R \cos \Theta$. Nach einem bekannten Satze der statistischen Mechanik ist nun die Zahl der Elektronen, die die potentielle Energie w besitzen, proportional mit

$$e^{-\frac{w}{W}},$$

1) P. Langevin, Journ. de Phys. 4. p. 6 78. 1905.

wo W zwei Drittel der kinetischen Energie eines Elektrons ist, und wir bekommen daher für die Zahl der Duplette pro Kubikzentimeter, deren Achsen einen Winkel zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ mit der Feldrichtung bilden, den Ausdruck

$$dn = A e^{-\frac{X \varepsilon R}{W} \cos\Theta} \cdot 2\pi \sin\Theta d\Theta. \tag{3}$$

Wir setzen der Kürze halber

$$\frac{X \varepsilon R}{W} = a.$$

Die Konstante A erhalten wir dann aus

$$n = \int_0^\pi dn \quad \text{zu} \quad A = \frac{n}{4\pi} \frac{a}{\sinh a}. \tag{4}$$

Das resultierende elektrische Moment des Kubikzentimeters finden wir nach (3) und (4) zu

$$P = \int \varepsilon R \cos\Theta \, dn = n \varepsilon R \left(\frac{\cosh a}{\sinh a} - \frac{1}{a} \right). \tag{5}$$

Da a sehr klein ist, wird

$$P = n \varepsilon R \frac{a}{3} = \frac{n (\varepsilon R)^2 X}{3 W}. \tag{6}$$

Die Zusammenwirkung der Polarisation und die Wärmebewegungen der Elektronen geben einen Strom von der Dichte i, die sich aus dem Ansatze

$$\frac{i}{i_\infty} = \frac{P}{P_\infty} \tag{7}$$

mit Hilfe der Gleichungen (1), (2) und (6) berechnet. Die Leitfähigkeit wird

$$\varkappa = \frac{i}{X} = \frac{P i_\infty}{P_\infty X} = \frac{4 \varepsilon^2 n \nu r R}{3 W}. \tag{8}$$

Den für das Wärmeleitvermögen früher erhaltenen Ausdruck können wir mit unseren jetzigen Bezeichnungen schreiben

$$\lambda = \frac{\alpha^2 T n \nu r^2}{8 \cdot 3 W} \tag{9}$$

(αT kinetische Energie des Gasmoleküls bei T^0), und das Leitverhältnis ergibt sich zu

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = 2 \frac{r}{R} \frac{\alpha^2 T}{\varepsilon^2}, \tag{10}$$

welcher Ausdruck sich von dem früher erhaltenen um den Faktor r/R unterscheidet. Nun ist zu erwarten, daß der Abstand R der Elektronen von den benachbarten Atomen etwas größer sein soll als der halbe Abstand r benachbarter Atome; wir berechnen z. B. das Verhältnis R/r aus

$$\frac{1}{n} = \frac{4\pi R^3}{3} = (\varepsilon r)^3 \tag{11}$$

zu $R/r = 1{,}24$. Setzen wir diesen Wert in (10) ein, so finden wir bei 18°

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = 7{,}8 \cdot 10^{10} \text{ E.M.E.}$$

während Jaeger und Diesselhorst[1]) als Mittel für zwölf Metalle $7{,}11 \cdot 10^{10}$ fanden.

2. Für unsere Vorstellungen über die Elektronenbewegungen sehr aufklärend ist es nun, die Größe W mit der für den Transport (1) nötigen Energie zu vergleichen. In der Tat werden wir finden, daß diese beiden Energiegrößen miteinander eng verknüpft sind.

Die mittlere Transportgeschwindigkeit der Elektronen längs ihren gekrümmten Bahnen setzen wir zu $2\nu l$, wo also l der während einer halben Schwingung eines Atoms zurückgelegte Weg eines Elektrons ist. Die entsprechende Energie wird somit

$$\frac{m}{2}(2\nu l)^2. \tag{12}$$

Diese Energie ist wahrscheinlich nur zwei Drittel der gesamten kinetischen Energie des Elektrons, weil das Elektron wohl auch Schwingungen senkrecht zu ihrer, durch die Lagen der benachbarten Atome bestimmten, Bewegungsrichtung ausführt, und also nur zwei der drei kinetischen Freiheitsgrade für die Transportbewegung in Frage kommen. Der obige Ausdruck ist daher dem aus (8) berechneten Werte von W gleichzusetzen. Wenn wir weiter gemäß unserem Ansatze, daß die Zahl der Elektronen der der Atome gleich sein soll, in (8)

$$n = N\frac{\varrho}{A} \tag{13}$$

(N Avogadrosche Zahl, A Atomgewicht, ϱ Dichte) setzen,

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Abh. Physik.-Techn. Reichsanstalt 3. p. 269. 1900.

finden wir

$$\frac{m}{2}(2\pi l)^2 = \frac{4\pi^2 N \varrho \pi R r}{3 \varkappa A}, \tag{14}$$

Wir berechnen hieraus das Verhältnis des Bogens l zur Länge des Halbkreises πr mit Radius r für eine Reihe Metalle. Um diese Zahlen miteinander gut vergleichbar zu bekommen, führen wir die Berechnung für dieselbe charakteristische Temperatur aus, die wir, da unsere Ausführungen nur für hohe Temperaturen gelten, recht hoch oder zu 2Θ ($\Theta = \beta\nu$) setzen. Mit $R = 1{,}24\, r$ (11), $\varepsilon = 1{,}59 \cdot 10^{-20}$, $m = 0{,}902 \cdot 10^{-27}$, $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ und $\beta = 4{,}87 \cdot 10^{-11}$ ergibt sich aus (14)

$$\frac{l}{\pi r} = 0{,}835 \sqrt{\frac{\varrho}{A \Theta \varkappa_{2\Theta}}}. \tag{15}$$

Diese Größe ist in Tab. 1 berechnet. Θ ist nach der Formel von Lindemann berechnet und einer Tabelle von St. Allen[1]) entnommen.

Tabelle 1.

		Θ	$\frac{1}{\varkappa_{2\Theta}} \cdot 10^{-3}$	$\frac{A}{\varrho}$	$\frac{l}{\pi r}$
1.	Na	210	100	23,4	1,2
	K	121	53	45,4	0,8
	Mg	384	137	14,0	1,4
	Al	406	99	10,2	1,3
2.	Fe	435	710	9,1	3,6
	Co	423	510	6,8	3,5
	Ni	423	880	6,7	4,7
3.	Rh	335	140	8,3	1,9
	Ir	261	120	8,6	1,9
	Pd	294	210	8,9	2,4
	Pt	227	180	9.1	2,5
4.	Cu	360	44	7,1	1,1
	Ag	233	26	10,3	0,9
	Au	180	30	10,2	1,1
	Zn	233	100	9,2	1,8
	Cd	146	76	13,1	1,7
	Sn	122	115	20,5	1,8
	Pb	97	123	18,2	2,2
5.	Sb	154	400	18,9	3,1
	Bi	86	710	21,2	5,2

1) H. St. Allen, Phil. Mag. 34. p. 478. 1917.

Die Bedingung dafür, daß die Rotationsenergie W mit der Transportenergie identisch sein soll, ist nun, daß l ungefähr einer halben Umdrehung entspricht, und wirklich finden wir meistens das Verhältnis $l/\pi r$ von der Größenordnung Eins. Es ist jedoch zu beachten, daß dieses Verhältnis eine Temperaturfunktion ist und angenähert proportional mit der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur ist. Daß besonders bei tiefen Temperaturen das Verhältnis kleiner als Eins ist, ist wohl mit unseren mathematischen Ausführungen schwer vereinbar, hängt aber augenscheinlich damit zusammen, daß unsere Formeln nur für hohe Temperaturen gelten. Die Vergleichstemperatur 2Θ ist auch mit Absicht so hoch gewählt, daß $l/\pi r$ mindestens etwa Eins beträgt. Daß andererseits bei hinreichend hohen Temperaturen l immer größer als πr wird, muß wohl so gedeutet werden, daß hier pendelnde Zurückschwingungen der Elektronen vorkommen. Bemerkenswert groß ist $l/\pi r$ teils für die ferromagnetischen Metalle, teils für Sb und Bi. Überhaupt ist die Theorie links im periodischen Systeme am besten erfüllt.

8. Da wir uns vorgestellt haben, daß die Leitungselektronen sich auf gekrümmten Bahnen bewegen, liegt es nahe, zu untersuchen, ob nicht die Einwirkung eines Magnetfeldes auf diese Bewegungen die Erscheinungen des Dia- und Paramagnetismus erklären kann. Eine Anregung zu einer solchen Untersuchung finden wir schon in dem Umstande, daß diese Erscheinungen so vom Zustande der Metalle abhängig sind, daß sie augenscheinlich eine Wirkung an der Oberfläche der Atome ist.

Der Einfachheit halber stellen wir uns vor, daß sich alle Elektronen auf gleichen Bahnen vom Radius R mit derselben Winkelgeschwindigkeit w bewegen. Wir betrachten die statistische Verteilung der n Elektronen des Kubikzentimeters auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R, durch dessen Mittelpunkt wir ein Rechtskoordinatensystem xyz legen. Um die Einwirkung eines Magnetfeldes von der Stärke H in der Richtung der positiven z-Achse zu berechnen, ist es gestattet, die n Elektronenbahnen so zu zerlegen, daß wir $n/3$ Elektronen in jeder der xy-, xz- und yz-Ebenen kreisend denken, $n/6$ in jeder Richtung.

Eine Diamagnetismus erregende Einwirkung tritt nur in

der xy-Ebene, senkrecht zur magnetischen Kraft auf. Trotzdem die Sache in Wirklichkeit komplizierter sein dürfte, behandeln wir sie einfach so, als ob die Elektronen, wenn kein Feld vorhanden ist, sich unter Einwirkung einer zentralen Kraft K bewegen. Es ist also

$$m R w^2 = K .$$

Auf das in positiver Richtung kreisende Elektron übt das Feld eine nach innen gerichtete Kraft von der Stärke $\varepsilon R w H$ aus und es wird

$$(16) \quad d(m R w^2) = m w^2 d R + 2 m R w d w = \frac{d K}{d R} d R + \varepsilon R w H .$$

Das magnetische Moment des Elektrons in der Richtung des Feldes

$$(17) \quad M = - \frac{\varepsilon w R^2}{2}$$

bekommt die Zunahme

$$(18) \quad d M = - \varepsilon R w d R - \frac{\varepsilon R^2}{2} d w .$$

Bei einem um das Atom frei kreisenden Elektron läßt sich nun zeigen, daß im allgemeinen $d R = 0$ ist, und diese Annahme wird der Langevinschen[1]) Berechnung zugrunde gelegt. Hier kann dagegen dieser Ansatz nicht begründet werden, und wir müssen alle Möglichkeiten offen lassen. Wir betrachten daher die beiden extremen Fälle: $d w = 0$ und $d R = 0$.

Für $d w = 0$ bekommen wir aus (16) und (18) die Zunahme des Momentes für jedes der $n/3$ Elektronen in der xy-Ebene gleich

$$(19) \quad d M = - \frac{\varepsilon^2 R^2 H}{m \left(1 - \frac{d K}{d R} \cdot \frac{1}{m w^2}\right)}$$

und die magnetische Suszeptibilität wird, falls $\frac{d K}{d R}$ klein ist,

$$(20) \quad k_r = - \frac{n \varepsilon^2 R^2}{3 m} .$$

Wir wollen diese Magnetisierung radialer Diamagnetismus nennen.

1) P. Langevin, l. c.

Ist dagegen $dR = 0$, so haben wir

$$dM = -\frac{\varepsilon^2 R^2 H}{4m} \tag{21}$$

und die diamagnetische Suszeptibilität, die wir jetzt zirkular nennen, wird

$$k_z = -\frac{n\varepsilon^2 R^2}{12m}, \tag{22}$$

also viermal kleiner als die radiale.

4. Eine paramagnetische Wirkung kommt durch den Einfluß des Feldes auf die in den xz- und yz-Ebenen kreisenden Elektronen zustande. Die paramagnetische Suszeptibilität k_p erhalten wir im Anschluß an die Gleichung (6), wenn wir das elektrische Feld X durch das magnetische H, und das elektrische Moment εR durch das magnetische M ersetzen. Für $H = 1$ wird

$$k_p = +\frac{nM^2}{3W}. \tag{23}$$

Das Moment M ist durch (17) gegeben. Für W setzen wir

$$W = \frac{mR^2\omega^2}{2}, \tag{24}$$

was nur eine andere Schreibweise für (12) ist, und finden

$$k_p = +\frac{n\varepsilon^2 R^2}{6m}. \tag{25}$$

Der Paramagnetismus würde somit bei hohen Temperaturen konstant sein, was erfahrungsgemäß eher vorkommt als die von Langevin abgeleitete umgekehrte Proportionalität mit der Temperatur.

5. Wir müssen nach dem Angeführten voraussetzen, daß jedes Metall sowohl paramagnetische als diamagnetische Eigenschaften hat. Wir sehen aber, daß der Wert der paramagnetischen Suszeptibilität (25) zwischen denen des radialen (20) und zirkularen (22) Diamagnetismus liegt. Ein Metall erscheint daher diamagnetisch, wenn es überwiegend radial diamagnetisch ist, paramagnetisch, wenn es überwiegend zirkular diamagnetisch ist. Die von unserer Theorie geforderten Grenzen der Suszeptibilität können, wenn für n der Wert (13) eingesetzt wird, folgendermaßen angegeben werden:

$$\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\frac{N\varrho\varepsilon^2 R^2}{Am} < k < \left(+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)\frac{N\varrho\varepsilon^2 R^2}{Am}, \tag{26}$$

oder in absoluten elektromagnetischen Einheiten:

$$(26') \qquad -2{,}84 < \frac{k\,A}{\varrho\,R^2} \cdot 10^{-10} < +1{,}42\,.$$

$\frac{k\,A}{\varrho\,R^2}$ wollen wir reduzierte Suszeptibilität nennen und mit k' bezeichnen.

Im allgemeinen ist es nicht möglich, aus der Größe der Suszeptibilität zu unterscheiden, wieviel vom radialen oder zirkularen Diamagnetismus herrührt. Unter der, jedoch höchstens formal gültigen Annahme, daß der Bruchteil q der Elektronen radialen, $1-q$ zirkularen Diamagnetismus gäbe, würde

$$(27) \qquad k' = 1{,}42\,(1 - \tfrac{4}{3}\,q)$$

sein.

Um unsere Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, sind einige reduzierte Suszeptibilitäten in Tab. 2 berechnet

Tabelle 2.

		$\frac{k}{\varrho} \cdot 10^7$	$r \cdot 10^8$	$\frac{k\,A}{\varrho\,r^2} \cdot 10^{-10}$
1.	Na	+5,1	1,69	+0,41
	K	4,0	2,11	0,35
	Mg	5,5	1,42	0,66
	Al	6,5	1,28	1,07
2.	Fe	+		+
	Co	+		+
	Ni	+		+
3.	Rh	+11	1,19	+8,0
	Ir	1,5	1,21	2,0
	Pd	58	1,22	41,5
	Pt	10,7	1,24	13,6
4.	Cu	−0,87	1,13	−0,13
	Ag	2,0	1,28	1,32
	Au	1,5	1,28	1,80
	Zn	1,54	1,24	0,65
	Cd	1,7	1,39	0,99
	Sn	3,5	1,62	1,6
	Pb	1,2	1,55	1,0
5.	Sb	−9,5	1,55	−4,8
	Bi	14	1,64	10,8

worden. Für R ist einfach der Wert von r [vgl. (11)] eingesetzt. Die berechnete Größe wird hierdurch wahrscheinlich

etwas zu groß ausfallen. k/ϱ ist einer Zusammenstellung von Honda[1]) entnommen.

Die Bedingungen unserer Theorie (26) werden im linken Teile des periodischen Systems erfüllt, im rechten nicht. Sie gelten für die paramagnetischen Metalle Na, K, Mg und Al und für die diamagnetischen Cu, Ag, Au, Zn, Cd, Sn und Pb, dagegen nicht für Sb und Bi oder die ferromagnetischen und die ihnen nahestehenden Platinmetalle. Das abweichende Verhalten von Bi und Sb erklärt sich vielleicht durch die Annahme, daß diese Metalle mehratomig sind, eine Annahme, die auch für die Erklärung anderer Erscheinungen nützlich zu sein scheint. Der Radius der Elektronenbahnen würde dann viel größer als r sein können, woraus ein zu großer Wert von k folgen würde. Die ferromagnetischen Metalle bei solchen Temperaturen, wo sie nicht ferromagnetisch sind, und die ihnen nahestehenden Metalle zeigen einen abweichend großen Paramagnetismus, der dazu oft von der Temperatur stark abhängig ist. Vielleicht ist dieser wie der Ferromagnetismus einer Einwirkung des Feldes auf innere Elektronenbahnen im Atom zuzuschreiben. Es ist aber auch zu bemerken, daß eben diese Metalle besonders große Werte für $l/\pi r$ (Tab. 1) zeigen. Die Elektronen haben in der Tat Energie genug, um eine ganze Umdrehung um das Atom auszuführen. Ob dies irgendeine Einwirkung auf das paramagnetische Verhalten dieser Metalle haben kann, ist jedoch schwer zu bestimmen.

6. Unsere Auffassung von dem Magnetismus führt nun auch zu einer Erklärung des Halleffektes, bei der das Auftreten von positiven sowohl als negativen Koeffizienten, das der klassischen Theorie schwer verständlich war, einfach hervortritt. Wir betrachten wiederum die statistische Verteilung der Elektronen an der Kugeloberfläche vom Radius R. Das magnetische Feld ist nach positivem z gerichtet. Als Richtung des negativen (Elektronen-) Stromes nehmen wir die negative x-Achse. Der Strom besteht in einem Überschuß an solchen Elektronenbahnen, die die Elektronen nach negativem x befördern. Wir lassen die Hälfte dieser überschüssigen Elektronenbahnen in der xy-Ebene, die andere Hälfte in der

1) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. p. 1027. 1910.

xz-Ebene liegen. Die Untersuchung wird uns dann zeigen, daß in der xy-Ebene im Zusammenhang mit dem radialen Diamagnetismus eine positive Hallwirkung auftritt, in der xz-Ebene im Zusammenhang mit dem Paramagnetismus eine meistens negative.

Wir betrachten zuerst die xy-Ebene. Als Ursache des im ersten Augenblicke nach dem Schließen des primären Stromes auftretenden transversalen Hallstromes von der Dichte i_y sehen wir die elektrische Polarisation, die als Folge der Zusammenwirkung des magnetischen Feldes H und der primären Stromdichte i_x entsteht. Die Polarisation ist aus Symmetriegründen mit der y-Achse parallel und wird mit P_y bezeichnet. Da die Änderung der Winkelgeschwindigkeit keine Polarisation hervorbringt, kann eine solche nur in Verbindung mit dem radialen Diamagnetismus auftreten. Ein Elektron, das sich auf seiner gekrümmten Bahn in der Richtung der negativen x-Achse bewegt, wird von einer nach negativem y gerichteten Kraft beeinflußt und wird durch die Änderung des Radius seiner Bahn in entgegengesetzter Richtung, somit nach positivem y, verschoben. Der dadurch entstehende Halleffekt ist in der üblichen Bezeichnungsweise positiv. Seine Größe, als Verhältnis des transversalen Potentialgefälles zur longitudinalen Stromdichte definiert, ist durch

$$R_2 = -\frac{i_y}{\varkappa i_x H} \tag{28}$$

gegeben. Nun ist

$$i_y = \frac{P_y}{P_m} i_m, \tag{29}$$

wo nach (1) die maximale Stromdichte

$$i_m = 4 n \varepsilon \nu r \tag{30}$$

wird. Die maximale Polarisation ist (2)

$$P_m = n \varepsilon R. \tag{31}$$

Da weiter trotz des Stromes die Zahl der Elektronen, die sich in der xy-Ebene bewegen, nicht wesentlich von $n/3$ verschieden ist, wird

$$P_y = \frac{n}{3} \varepsilon \bar{y}, \tag{32}$$

wo $\bar{y}$ die mittlere Verschiebung nach positivem y bezeichnet.

Die halbe Stromdichte i_z ist der xy-Ebene zuzuschreiben und also

$$\frac{i_z}{2} = \frac{n}{8} e \overline{\frac{dx}{dt}}, \tag{33}$$

wenn $\overline{dx/dt}$ die mittlere Geschwindigkeit in der x-Richtung ist. Die Gleichungen (28) bis (33) geben

$$R_d = -\frac{2\nu r}{nR} \frac{\bar{y}}{\overline{\frac{dx}{dt}}}. \tag{34}$$

Es gilt also, $\bar{y}$ und $\overline{dx/dt}$ zu berechnen. Der Radius R der Elektronenbahnen erfährt, wenn der Diamagnetismus radialer Natur ist und dK/dR vernachlässigt wird [vgl. (16)], durch das magnetische Feld die Vergrößerung

$$\delta = \frac{eRH}{mw}. \tag{35}$$

Für ein Elektron, dessen Bahnmitte sich im Winkelabstande β von der x-Achse befindet, und das selbst um den Winkelabstand ψ von der Bahnmitte entfernt ist, gilt

$$y = (R + \delta)\sin(\psi + \beta), \tag{36}$$

$$\frac{dx}{dt} = -(R + \delta)w\sin(\psi + \beta). \tag{37}$$

Wegen der vollständigen Symmetrie in bezug auf die x-Achse, bis auf die Zeichen von δ und w, verschwinden bei der Mittelbildung im Ausdrucke für y der erste, im Ausdrucke für dx/dt der zweite Therm und wir finden

$$\bar{y} = \delta\,\overline{\sin(\psi + \beta)}, \tag{38}$$

$$\overline{\frac{dx}{dt}} = -Rw\,\overline{\sin(\psi + \beta)}, \tag{39}$$

wo die Mittelbildung über alle vorkommende ψ und β ausgestreckt wird. (35), (38) und (39) in (34) eingesetzt, geben

$$R_d = \frac{2e\nu r}{nmRw^2} \tag{40}$$

und in Verbindung mit den Gleichungen (8) und (24)

$$R_d = +\frac{3}{4en}. \tag{41}$$

Das Resultat ist von der Verteilung der Elektronenbahnen beim Stromdurchgange unabhängig.

Wegen seinem nahen Zusammenhange mit dem radialen Diamagnetismus wollen wir diesen Teil des Halleffektes diamagnetisch nennen. Da der Diamagnetismus immer teils radial, teils zirkular ist, wird

$$R_d = + \frac{3}{4en} \cdot q \quad (0 < q < 1), \tag{42}$$

wo q durch (27) bestimmt ist.

7. Wir betrachten dann die xz-Ebene. Die Gleichungen (28) bis (33) können dabei von der obigen Behandlung der xy-Ebene unverändert übernommen werden. Auch für den in der xz-Ebene auftretenden Teil des Halleffektes gilt daher

$$R_p = - \frac{2\nu r}{nR} \frac{\bar{y}}{\overline{\frac{dx}{dt}}} . \tag{43}$$

Die Geschwindigkeit in der x-Richtung ist wie früher

$$\frac{dx}{dt} = Rw \sin(\psi + \beta). \tag{44}$$

Das Elektron wird von einer Kraft senkrecht zur xz-Ebene von der Größe $eRwH \sin(\psi + \beta)$ beeinflußt und bekommt eine Verschiebung, die bestimmt ist durch

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = eRwH \sin(\psi + \beta); \quad dt = \frac{d\psi}{w} . \tag{45}$$

Die Mittelwerte $\overline{dx/dt}$ und $\bar{y}$ werden hier von der statistischen Verteilung der Elektronen auf ψ und β abhängig und können nicht ohne weitere Annahmen über diese Verteilung berechnet werden. Wie nehmen daher der Einfachheit halber an, daß alle stromführenden Elektronen den Weg $2R$ in der negativen x-Richtung gehen, so daß

$$\overline{\frac{dx}{dt}} = Rw \frac{2}{\pi} \tag{46}$$

wird. Die Integration von (45) führen wir unter der Voraussetzung, daß die Bahnen der stromführenden Elektronen symmetrisch in bezug auf die zum Strome senkrechte z-Achse sind (d. h. $\beta = 90°$), von $-\psi$ zu $+\psi$, aus und finden als Mittel

$$\bar{y} = \frac{eR}{mw} \left[\psi \sin \psi + \ln \psi - \frac{\sin \psi}{\psi} \right] . \tag{47}$$

Die Annahmen, unter denen die Mittel von dx/dt und y gebildet sind, stimmen nur für $\psi = 90^0$ gut überein. Bei $\psi > 90^0$ hätten wir eigentlich in $\bar{y}$ die wahrscheinlich vorkommenden Zurückschwingungen der Elektronen berücksichtigen sollen, was jedoch nur sehr ungenau gemacht werden kann, und was wir daher der Einfachheit halber unterlassen.

(46) und (47) in (48) eingesetzt, geben

$$R_p = -\frac{s\tau r}{\varkappa m R w^2} \cdot \pi \left[\psi \sin\psi + \ln\psi - \frac{\sin\psi}{\psi}\right], \tag{48}$$

oder in Verbindung mit (8) und (24)

$$R_p = \frac{F(\psi)}{n s}, \tag{49}$$

wo

$$F(\psi) = -\frac{3\pi}{8}\left[\psi \sin\psi + \ln\psi - \frac{\sin\psi}{\psi}\right]. \tag{50}$$

ψ ist, wenn wir die Zurückschwingungen außer acht lassen können, mit der unter 2. besprochenen Größe $l/\pi r$ durch die Gleichung

$$\psi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{\pi r} \tag{51}$$

verknüpft. $F(\psi)$ ist für $\psi = 90^0$ gleich $-1{,}10$, hat für $\psi = 104^0$ ein Minimum gleich $-1{,}31$, steigt dann erst langsam, dann schneller und geht bei $\psi = 157^0$ von negativ zu positiv über. R_p wollen wir paramagnetischen Halleffekt nennen.

8. Wir fassen die unter 6. und 7. erhaltenen Resultate betreffend des Halleffektes in einer Formel zusammen und bekommen

$$R = R_d + R_p = \frac{1}{n s}\left[\frac{3}{4} q + F(\psi)\right]. \tag{52}$$

Setzen wir gemäß (13)

$$n = \frac{N\varrho}{A}$$

und gemäß (27)

$$q = \frac{1{,}42 - k'}{3 \cdot 1{,}42},$$

so können wir (52) unter der Form schreiben

$$R' = \frac{R\varrho}{A} \cdot 10^4 = 1{,}04\left[\frac{1{,}42 - k'}{4 \cdot 1{,}42} + F(\psi)\right], \tag{53}$$

wo wir R' reduzierten Halleffekt nennen.

Die Gleichung (53) zwischen reduziertem Halleffekt und reduzierter magnetischer Suszeptibilität kann nun zu einem Vergleiche unserer Theorie mit der Erfahrung benutzt werden. In Tab. 3 sind die reduzierten Hallkoeffizienten R' nach Messungen der Halleffekte R von v. Ettinghausen und Nernst[1]), Zahn[2]), Smith[3]), Alterthum[4]), Kamerlingh Onnes u. Beckmann[5]) berechnet. Für die ferromagnetischen Metalle ist der Halleffekt von der Feldstärke abhängig und läßt sich nur unter Berücksichtigung der inneren Induktion statt der äußeren Feldstärke reduzieren. Bi und Sb fallen, wie schon hervorgehoben worden ist, aus dem Rahmen unserer Theorie heraus. Für die in der Tabelle mit * bezeichneten Metalle ist der Effekt von der Temperatur besonders stark abhängig.

Tabelle 3.

		$R \cdot 10^4$	$\frac{R\varrho}{A} \cdot 10^4$
1.	Na	− 25	− 1,07
	Mg	− 9,4	− 0,67
	Al*	− 3,9—3,2	− 0,38—0,31
2.	Fe	+	+
	Co	+	+
	Ni	−	−
3.	Ir	+3,6—4,0	+0,42—0,47
	Pd	− 6,8	− 0,76
	Pt	− 2,0—1,3	− 0,22—0,14
4.	Cu	− 5,4—4,9	− 0,76—0,69
	Ag	− 8,4—8,0	− 0,82—0,78
	Au	− 7,3—7,0	− 0,72—0,69
	Zn*	+6,3	+0,68
	Cd	+5,5—5,9	+0,42—0,45
	Sn	− 0,4	− 0,02
	Pb	+0,9	+0,05
5.	Sb	+1,250—2,200	+66—127
	Bi	− 70000	− 3300

1) v. Ettinghausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **31**. p. 760. 1887.
2) H. Zahn, Ann. d. Phys. **14**. p. 886. 1904; **16**. p. 148. 1905.
3) A. W. Smith, Physik. Rev. **30**. p. 1. 1910.
4) H. Alterthum, Ann. d. Phys. **39**. p. 933. 1912.
5) H. Kamerlingh Onnes u. B. Beckmann, Comm. Leiden 29a, 129c, 130b, 1912.

In der Fig. 1 sind für die Metalle der Gruppen 1 und 4 unserer Tabelle, bei denen unsere Theorie des Magnetismus ausreichend zu sein scheint, die Grenzen der reduzierten Hallkoeffizienten bei Zimmertemperatur gegen die reduzierte Suszeptibilität k' aufgetragen. Der vertikalen Linie $k' = +1{,}42$ entspricht [vgl. (26′)] ein zirkular diamagnetisches (paramagnetisches) Metall, der Linie $k' = -2{,}83$ ein radial diamagnetisches. Den geneigten Linien entsprechen verschiedene an der Figur angegebene Werte von ψ und $l/\pi r$.

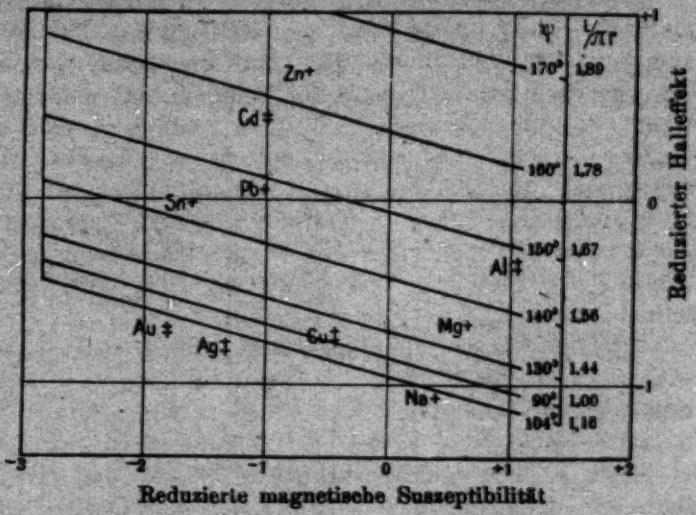


Fig. 1.

Es muß wohl als eine gute Stütze unserer Theorie aufgefaßt werden, daß die guten Leiter Au, Ag, Cu und Na, bei denen $l/\pi r$ klein gefunden war (Tab. 1) und demgemäß ψ nur wenig größer als 90° sein dürfte, wirklich in der Nähe der Linie $\psi = 104°$ des maximal negativen Halleffektes zu liegen kommen. Die übrigen Metalle mit größerem Werte von ψ und $l/\pi r$ liegen, wie es sein soll, alle oberhalb dieser Linie. Eben bei den höchstliegenden, wo eine kleine Variation in ψ am meisten zu bedeuten hat, scheinen die Messungen an verschiedenen Proben und bei verschiedenen Temperaturen am meisten auseinander zu gehen.

(Eingegangen 12. September 1918.)

2. *Über die Reflexion von Quecksilbermolekülen an Gold bei tiefen Temperaturen; von Jan Weyssenhoff.*

Die Frage nach der Reflexion der Gasmoleküle an festen Oberflächen steht bekanntlich im Mittelpunkte der neueren experimentellen Forschung über die kinetische Gastheorie. Was die Richtungsverteilung der reflektierten Moleküle anbetrifft, so gilt hier, wie Knudsen mittels einiger unabhängiger Methoden nachgewiesen hat, das sogenannte Cosinusgesetz, nach welchem die Anzahl der im Mittel pro Einheit des räumlichen Winkels reflektierten Moleküle proportional dem Cosinus des Reflexionswinkels und unabhängig von der Richtung der einfallenden Moleküle ist. Mit einer direkten Methode wurde dieses Gesetz von Knudsen[1]) und Wood[2]) bestätigt gefunden. Allerdings fand Wood Abweichungen davon für Reflexionswinkel von über 80°, die er aber auf Unebenheiten der benutzten Glasoberfläche zurückzuführen sucht.

Die weitere Frage nach der Veränderung der Energie der Moleküle durch die Zusammenstöße mit der Wand befindet sich noch heute weit von ihrer endgültigen Lösung. Man hat nach Maxwell probiert, den Tatsachen durch die folgende Annahme gerecht zu werden: Ein Bruchteil $1-f$ der Moleküle wird von der Wand „regelmäßig" reflektiert und verläßt die Wand mit unveränderter, mittlerer Energie, der Rest f wird „diffus", d. h. nach dem Cosinusgesetze zurückgestoßen und erlangt im Mittel die Temperatur (mittlere Energie) der Wandmoleküle. Nach den oben erwähnten Versuchen von Knudsen und Wood wäre f überall gleich Eins zu setzen, eine Annahme, welche sich jedoch bei der Behandlung der Wärmeleitfähigkeit verdünnter Gase nicht bewährt hat.[3]) Deshalb gebraucht Knudsen eine veränderte Hypo-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. **48**. p. 1113. 1915.
2) R. W. Wood, Phil. Mag. **30**. p. 300. 1915.
3) Vgl. z. B. M. Knudsen, Ann. d. Phys. **34**. p. 593. 1911.

these: alle Moleküle werden, was die Richtung anbetrifft, nach dem Kosinusgesetze reflektiert; sie erreichen aber dabei nicht die Temperatur der Wand (T_2), sondern eine mittlere Temperatur T zwischen derjenigen der Wand und der Temperatur T_1, welche sie vor dem Auftreffen besaßen. Diese mittlere Temperatur (mittlere kinetische Energie) wird durch die folgende Formel gegeben:

$$T - T_1 = a(T_2 - T_1).$$

Die Konstante a nennt Knudsen Akkommodationskoeffizient. Ein erster Versuch, das Problem theoretisch zu behandeln, wurde von Baule[1]) angestellt.

Die ganze Fragestellung wird noch komplizierter, wenn man auch die eventuelle Kondensation der Moleküle an der Wand zu berücksichtigen versucht. Die Erforschung dieses Problems, das teilweise in das Gebiet der Chemie übergreift, wurde in den allerletzten Jahren durch einige experimentelle Arbeiten eingeleitet:

Ein Molekül, das eine feste Oberfläche trifft, wird von dieser entweder reflektiert oder es bleibt an ihr haften. Ein bereits haftengebliebenes Molekül kann sich von der Oberfläche wieder loslösen, und zwar entweder durch eigentliche Verdampfung, oder unter dem Einflusse heranfliegender Moleküle. Dieses letzte Phänomen wurde von Knudsen beobachtet: ein dünner, gleichmäßiger Zinkbelag wird durch den Anprall anderer Zinkmoleküle von unzähligen kleinen Löchern besät.

Die Wahrscheinlichkeit α dafür, daß ein Gas- oder Dampfmolekül von einer festen Oberfläche bei einem Zusammenstoße reflektiert (nicht aufgefangen) wird, kann durch verschiedene direkte und indirekte Methoden geschätzt werden. So ergibt sich z. B. eine obere Grenze für α aus der Betrachtung der Verdampfungsgeschwindigkeit, aus dem Verlaufe mancher heterogener chemischer Reaktionen usw. Die verschiedensten sich hier darbietenden Möglichkeiten werden von Langmuir[2]) diskutiert. Dieser vertritt die Ansicht, daß eine wirkliche Reflexion der Moleküle überhaupt nicht stattfindet,

1) B. Baule, Ann. d. Phys. 44. p. 145. 1914.
2) J. Langmuir, Phys. Rev. 8. p. 149—176. 1916.

und wo sie scheinbar beobachtet wurde, ist sie auf Verdampfung der bereits haftengebliebenen Moleküle zurückzuführen. Leider waren Langmuir bei seiner Arbeit die letzten Untersuchungen von Knudsen[1]) und Wood[2]) unbekannt, mit deren Ergebnissen seine Verdampfungstheorie nicht in Einklang zu bringen ist. Auch das theoretische Bild, das er sich von dem betrachteten Vorgang macht, und das eine Erweiterung des von Baule[3]) gebrauchten ist, kann nach diesen neueren Untersuchungen kaum der Wirklichkeit entsprechen. Jedenfalls läßt es das Vorhandensein der von Knudsen entdeckten „kritischen Temperatur" (vgl. unten) nicht vermuten. Die von Langmuir behandelten experimentellen Ergebnisse können auch deshalb keine Andeutung des Phänomens der kritischen Temperatur liefern, weil sie entweder weit oberhalb dieser Temperatur ausgeführt waren, wie z. B. seine Versuche mit Wolframdrähten, oder aber es handelte sich dabei um die Reflexion von Metallmolekülen an Oberflächen desselben Metalles, ein Fall, wo auch nach Knudsen die Wahrscheinlichkeit einer Reflexion bei allen Temperaturen gleich Null bleiben sollte.

Experimente, die auf eine direkte Messung des Reflexionsvermögens α abzielen, wurden von Knudsen[4]) und zum Teil von Wood[5]) ausgeführt. Gelegentlich einer anderen Untersuchung hat der Verfasser einige der Knudsenschen Experimente wiederholt, sowie ähnliche angestellt. Von diesen soll hier im Zusammenhange mit der Arbeit von Knudsen kurz berichtet werden.

Am eingehendsten hat Knudsen die Reflexion von Quecksilbermolekülen an Glas untersucht. Er überzeugte sich zuerst, daß eine in flüssiger Luft gekühlte Glaswand praktisch alle darauf fallenden Hg-Moleküle gleich beim ersten Zusammenstoße auffängt. Die Wahrscheinlichkeit α ist hier jedenfalls kleiner als 1,3 Prom. (vgl. die Apparate Figg. 1 u. 8 bei Knudsen). Dieser Umstand erleichtert ungemein das weitere Experimentieren, indem es uns ein Mittel in die Hand gibt,

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 50. p. 472—488. 1916.
2) R. W. Wood, Phil. Mag. 32. p. 364—371. 1916.
3) B. Baule, l. c.
4) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 50. p. 472. 1916.
5) R. W. Wood, Phil. Mag. 32. p. 364. 1916.

die ungewünschten Moleküle aufzuhalten. So kann man durch entsprechendes Einsetzen von Blenden, deren Temperatur genügend tief ist, einen Strom von Molekülen von annähernd gleichen Richtungen, ein sogenanntes „eindimensionales Gas" erzeugen. Die Benennung stammt von Boltzmann, die erste experimentelle Ausführung von Dunoyer[1]), der ein eindimensionales Gas aus Natriumdampf erzeugte, während Wood[2]) mit einem solchen aus Quecksilber experimentierte.

Nun ließ Knudsen ein eindimensionales Quecksilbergas gegen einen Glaszylinder, dessen Temperatur mittels geeigneter Kohlenwasserstoffbäder regulierbar war, anlaufen (Apparat Fig. 4 bei Knudsen). Die reflektierten Hg-Moleküle wurden von den äußeren Wänden des Apparates, der in flüssige Luft eingetaucht war, aufgefangen und konnten gewogen werden. Ebenso konnte das auf dem inneren Glaszylinder haftengebliebene Quecksilber aufgesammelt und gewogen werden; durch Vergleich ergab sich eine Schätzung von α, der Wahrscheinlichkeit, daß ein Quecksilbermolekül beim ersten Zusammenstoße mit der Glasoberfläche reflektiert wird. Von der Temperatur der flüssigen Luft bis hinauf zu $-140°$ C wurden alle Quecksilbermoleküle von dem inneren Glaszylinder (auf den sich die Temperaturangaben beziehen) aufgehalten; aber schon bei der Temperatur von $-130°$ C wurde die Mehrzahl der Moleküle reflektiert. Knudsen vermutet, daß auch alle anderen Substanzen dieselbe Erscheinung der „kritischen Temperatur" zeigen. Inwieweit es sich dabei um eine ganz bestimmte Temperatur handelt, bei welcher das Reflexionsvermögen sprungweise, oder jedenfalls sehr scharf, von Null auf nahezu gleich Eins ansteigt, das können nur weitere Untersuchungen zeigen. Knudsen hat folgende Grenzen für die kritischen Temperaturen der untersuchten Stoffe gefunden:

Salmiak	unter $-183°$,
Quecksilber	zwischen $-140°$ und $-130°$,
Zink, Cadmium, Magnesium	zwischen $-183°$ und $-78°$,
Kupfer	zwischen $350°$ und $575°$,
Silber	über $575°$.

1) L. Dunoyer, Le Radium 8. p. 142. 1911.
2) R. W. Wood, Phil. Mag. 30. p. 300. 1915.

Alle diese Angaben beziehen sich auf Zusammenstöße mit einer Glasoberfläche. (Ob hier eventuell Oberflächenschichten von adsorbierten Gasen eine Rolle spielen, sei dahingestellt. Es dürfte sich auch α als Funktion der Geschwindigkeit der stoßenden Moleküle erweisen. Diese Abhängigkeit wurde bisher noch nicht untersucht. Bei Knudsen hatten die Quecksilberdämpfe etwa Zimmertemperatur.)

Außerdem hat Knudsen auch gefunden, daß eine Quecksilberoberfläche alle darauf fallenden Quecksilbermoleküle bei jeder Temperatur festhält. Für flüssiges Quecksilber wurde das aus der Verdampfungsgeschwindigkeit gefolgert und für festes direkt in dem oben erwähnten Apparate geprüft. Der innere Zylinder wurde zuerst bei der Temperatur der flüssigen Luft mit einem Quecksilberbelag versehen, und dann wurde die Reflexionsfähigkeit dieses Belages bei $-68°$ gemessen. Weniger als 10 Proz. der auffallenden Moleküle wurden reflektiert, und Knudsen schließt daraus, da er bereits vorher bei flüssigem Quecksilber eine bedeutende Heruntersetzung des Reflexionsvermögens durch die kleinsten Spuren von Oberflächenverunreinigungen beobachtet hatte, daß eine ganz reine Quecksilberoberfläche bei jeder Temperatur alle darauffallenden Quecksilbermoleküle gleich beim ersten Zusammenstoße festhalten würde.

Für andere reflektierende Oberflächen liegen noch keine Versuche vor. Man findet nur bei Knudsen die folgende Bemerkung: „Sogar von einem Stoffe wie Messing, das sich leicht mit Quecksilber amalgamiert, stellte es sich bei den Untersuchungen über das Kosinusgesetz heraus, daß es alle einfallenden Moleküle zurückwarf, wenn die Temperatur nicht zu niedrig war."

Wir sehen also, daß sich Glas und Quecksilber in bezug auf die Reflexion der Quecksilbermoleküle total anders verhalten. Während Glas die Erscheinung der „kritischen Temperatur" zeigt, bei welcher das Reflexionsvermögen α äußerst rasch von Null auf nahezu gleich Eins steigt, bleibt α bei einer Quecksilberoberfläche immer gleich Null. Man kann dieses auch so ausdrücken, daß man sagt, in diesem letzten Falle wird die kritische Temperatur unendlich groß, oder sie liegt jedenfalls in so hohen Temperaturgebieten, wo die große Verdampfungsgeschwindigkeit des Quecksilbers ihr eventuelles

Vorhandensein vollkommen verdeckt. Höchstwahrscheinlich stellt dieses letzte Verhalten eine allgemeine Regel für die Kondensation von Molekülen an Oberflächen derselben Substanz dar. Es erhebt sich hier nun die Frage nach der Reflexion an anderen Oberflächen. Die obenerwähnte Bemerkung von Knudsen über die Reflexionsfähigkeit des Messings, sowie die ganze Darstellungsweise seiner Arbeit erwecken den Anschein, als ob nicht nur alle Körper (die Muttersubstanz ausgenommen) die Erscheinung der kritischen Temperatur zeigen, sondern auch sogar, daß diese Temperatur von der Art der reflektierenden Substanz unabhängig ist. Der grundsätzliche Unterschied in dem Verhalten der Muttersubstanz und demjenigen aller anderer Substanzen läßt die oben erwähnte Hypothese äußerst unwahrscheinlich erscheinen; auch könnte man hier einwenden, daß die Schätzung des Reflexionsvermögens des Messings auf indirektem Wege erhalten wurde und, was noch wichtiger erscheint, daß sie äußerst leicht durch Oberflächenschichten gefälscht sein kann.

Es war deshalb eine naheliegende Idee, nach einer gelegentlichen Wiederholung einiger Experimente von Knudsen, das Reflexionsvermögen des äußerst leicht amalgamierbaren Goldes auf direktem Wege zu untersuchen. Der gebrauchte Apparat unterschied sich nur unwesentlich von dem Knudsenschen Fig. 4. In das Verbindungsstück der beiden Apparathälften war ein Metallröhrchen (15 mm lang, 2 mm innerer Durchmesser) eingesetzt, das nur einen nahezu „eindimensionalen" Strom von Quecksilbermolekülen aus der Heizkammer hindurchpassieren ließ, da es auf genügend tiefe Temperaturen abgekühlt war. Die Temperatur des Innenzylinders, gegen welchen die Quecksilbermoleküle anstießen, war durch ein Pentanbad regulierbar. Durch entsprechende Manipulation (Herausziehen und Eintauchen in flüssigen Sauerstoff) des in das Pentanbad eingetauchten Pentanthermometers konnte man die Temperatur dieses Bades auf 2—3° konstant halten; eine größere Feinheit der Einstellung war nicht erforderlich. Der ganze Apparat war in flüssigen Sauerstoff, der in einem nicht versilberten Dewargefäße enthalten war, eingetaucht. Eine Molekularluftpumpe erzeugte das nötige Vakuum.

Bei der Wiederholung der Knudsenschen Experimente war das Pentanbad durch flüssigen Sauerstoff ersetzt; ein

scharf begrenzter, runder Quecksilberfleck, von einem dem Durchmesser des Blenderöhrchens merklich gleichen Durchmesser, bildete sich auf dem Innenzylinder; wenn das Ablenderöhrchen noch nicht eingesetzt war, war der Quecksilberstrom viel breiter und man konnte deutlich auf dem Außenzylinder die schöne „Schattenbildung" beobachten.

Nun wurden auf den Innenzylinder Röhrchen aus dünnem (0,1 mm), stark vergoldetem[1]) Kupfer aufgesetzt; zum Vergleiche dienten ebensolche Röhrchen aus blankem Eisen, einem nicht amalgamierbaren Metalle. Die Bildung des Quecksilberbelages auf der „Vorderseite" des Außenzylinders, neben der Mündung des Blendenröhrchens, wurde beobachtet, während auf dem Innenzylinder ein Gold- oder ein Eisenröhrchen aufgesetzt war und alles sonst möglichst identisch ausgeführt wurde. Man hatte erwartet, daß ein eventueller Unterschied der Reflexionsvermögen des Goldes und des Glases sich bereits an den verschiedenen Geschwindigkeiten der Belagbildung erkennbar machen würde. Bei den Temperaturen von $-100°$ C und $-120°$ C wurden Andeutungen des gesuchten Unterschiedes bemerkt. Da aber die Geschwindigkeit der Spiegelbildung ein zu unsicheres Maß der Reflexionsfähigkeit lieferte, so wurde die Beobachtungsmethode abgeändert und es wurden immer je zwei Experimente nacheinander, mit einem Goldröhrchen und mit einem Eisenröhrchen bei derselben Temperatur ausgeführt; die Quecksilberdestillation beim zweiten Versuche wurde gerade so lange fortgesetzt, bis sich auf der Vorderseite des Außenzylinders ein Quecksilberbelag von derselben Farbe wie in dem vorhergehenden Versuche ausgebildet hatte. Die Röhrchen wurden gleich nach Beendigung der jeweiligen Versuche aus dem Apparate herausgenommen, in Wiegegläschen gebracht, in einem Trockenapparate von dem sich niedergesetzten Tau befreit und dann gewogen. Das Verhältnis der Quecksilbermengen auf den Röhrchen ergab ein ungefähres Maß für das Verhältnis der Reflexionsvermögen, vorausgesetzt natürlich, daß die Anzahl der reflektierten Moleküle in beiden Fällen die gleiche war. Zwar wurde diese Gleichheit nur subjektiv durch Farbenvergleich geprüft; aber erstens bildet die Farbe, wie Knudsen bemerkt[2]), ein sehr empfind-

1) Technisch reines Gold.
2) M. Knudsen, l. c. p. 477.

liches Kriterium für die Dicke der Quecksilberschicht, und zweitens wäre eine größere Genauigkeit, aus den weiter unten angegebenen Gründen, sowieso nicht erreichbar gewesen.

Bald stellte es sich heraus, daß der gesuchte Unterschied tatsächlich vorhanden ist, daß er aber, wie zu erwarten, stark von der Oberflächenbeschaffenheit der Goldröhrchen abhängig war. So zeigte z. B. ein vorher leicht ausgeglühtes Goldröhrchen eine Reflexionsfähigkeit gleich der des Eisens, während ein anderes (frisch vergoldet und in Toluoldampf gewaschen) bei derselben Temperatur (−100° C) fast gar nichts reflektierte. Im folgenden wurden alle Röhrchen, Gold wie Eisen, unmittelbar vor dem Einsetzen in den Versuchsapparat in Toluoldämpfen abgewaschen. Diese Reinigungsmethode hat sich bekanntlich bei der Untersuchung eines anderen Oberflächeneffektes, der optischen Konstanten der Metalle, verhältnismäßig noch am besten bewährt. Selbstverständlich wäre ein unmittelbares Ausglühen in Vakuum viel angezeigter gewesen, was sich nach Überwindung einiger Schwierigkeiten rein experimenteller Natur wohl ausführen ließe. Doch hätte man dadurch, in Anbetracht einer anderen wesentlichen Fehlerquelle aller beschriebenen Experimente nur wenig gewonnen. Die erwähnte Fehlerquelle besteht im folgenden: *Nur die ersten heranfliegenden Quecksilbermoleküle treffen die ursprüngliche Fläche, die folgenden aber, wenn das Reflexionsvermögen nicht gerade gleich Null ist, treffen zum Teil eine bereits mit Quecksilber bedeckte Fläche, welche keine Quecksilbermoleküle reflektiert.* Knudsen hat zur Beseitigung dieser Schwierigkeit im Apparate Fig. 4 (nach welchem auch der unserige konstruiert war) die reflektierende Oberfläche als einen in einem Schliffe drehbaren Zylinder ausgestaltet. Doch scheint diese Anordnung zur Erneuerung der reflektierenden Oberfläche für einigermaßen genaue Untersuchungen kaum genügend zu sein; nur eine prinzipiell verschiedene Versuchsmethode könnte diesen wichtigen Übelstand radikal beseitigen.

In allen unseren Experimenten wurde der reflektierende Innenzylinder fortwährend langsam weitergedreht, und manche Versuche mit Gold wurden so lange fortgesetzt, bis das Goldröhrchen ringsherum mit einem Quecksilberstreifen bedeckt war. Ohne Drehen bildet sich (nachdem die Heizhälfte des Apparates bereits genügend erwärmt ist) ein Quecksilberfleck

in weniger wie einer halben Minute; vorher sieht man schon ein stahlblaues Anlaufen des Goldes. Da ein stahlblauer Fleck bereits unzählige Quecksilbermoleküle enthalten muß, so kann trotz des Drehens von einem Einschlagen des Hauptteiles der Quecksilbermoleküle in eine frische Oberfläche selbstverständlich keine Rede sein. Es will beinahe scheinen, als ob Knudsen dieser Fehlerquelle eine noch zu kleine Bedeutung zugeschrieben hätte, und manche seiner Ergebnisse hätten vielleicht einer nochmaligen Prüfung bedürft.

Ein Goldröhrchen bei $-120°$ C wurde ganz ringsherum mit einem Hg-Ringe bedeckt, ohne daß dabei auf dem Außenzylinder irgend etwas zu sehen war. Ein zweiter ähnlicher Versuch zeigte außen die Andeutung einer Bräunung. Durch einen analogen Schluß, wie ihn Knudsen bei seinem Versuche mit einer festen Quecksilberoberfläche macht, könnte man daraus schließen, daß das Reflexionsvermögen einer vollkommen reinen Goldoberfläche bei $-120°$ C genau gleich Null wäre; ein solcher Schluß würde aber in Anbetracht aller wesentlichen Fehlerquellen der Versuchsmethode mindestens sehr gewagt sein.

Das einzige, was man aus allen diesen Experimenten wohl mit einiger Sicherheit schließen darf, ist ein bedeutender Unterschied in dem Verhalten des Goldes und des Eisens. Einige Paare zusammenhängender Experimente bei $-100°$ C mögen dieses beweisen. Der Sicherheit halber wurde der Außenbelag bei den Versuchen mit Eisen immer etwas dunkler erzeugt, wie bei dem entsprechenden Versuche mit Gold; trotzdem schlug sich auf dem Golde bedeutend mehr Quecksilber als auf dem Eisen nieder (0,9 mg gegen 0,1 mg; in einem anderen Versuchspaare: 2,6 mg gegen 0,6 mg). Man kann daraus schließen, daß das Reflexionsvermögen des Goldes bei $-100°$ C mindestens 5—10mal kleiner ist als dasjenige des Eisens (und Glases). Allerdings könnte man auch gegen diesen letzten Schluß einige Bedenken erheben. Das Quecksilber kriecht auf der Oberfläche des Goldes, sogar bei $-100°$ C, auseinander, wodurch die Hg-Flecke auf dem Golde von selber allmählich größer und größer werden. Hierdurch könnte der störende Einfluß der oben besprochenen Fehlerquelle beim Golde mehr ins Gewicht fallen als beim Eisen. Es scheint jedoch, daß dieser Umstand höchstens einen Teil des be-

obachteten Unterschiedes der Reflexionsvermögen des Goldes und des Eisens ausmacht und daß der Rest immerhin als reell anzusehen ist.

Der Verfasser hegt die Hoffnung, die hier angedeuteten Probleme in Bälde mit einer anderen Versuchsmethode wieder in Angriff nehmen zu können.

Ich möchte mir erlauben, Hrn. Prof. Dr. Edgar Meyer für die Anregung zu dieser Arbeit bestens zu danken. Auch ist es mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Gustav Weinmann in Zürich, der den Bedarf an flüssigem Sauerstoff in entgegenkommendster Weise dem Institute zur Verfügung stellte, den ergebensten Dank auszusprechen.

Zürich, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 21. Oktober 1918.)

3. *Zur Thermodynamik der Kapillarität;* *von A. March.*

1. Die Frage nach der Temperaturabhängigkeit der Kapillarkonstante wurde theoretisch auf Grund der verschiedensten Hypothesen so vielfach behandelt, daß eine Untersuchung von Interesse ist, innerhalb welcher Grenzen sich diese Frage rein thermodynamisch beantworten läßt. Wir betrachten dazu ein aus Flüssigkeit und Dampf bestehendes System, dessen Volumen mit V bezeichnet sei, und verkleinern auf isothermem und reversiblem Wege die an den Dampf grenzende Flüssigkeitsoberfläche bei konstant gehaltenem Volumen um die Flächeneinheit. Die bei diesem Prozesse zu gewinnende maximale Arbeit ist die Oberflächenspannung a. Bezeichnen wir die dabei vom Systeme abgegebene Energie mit u und die Änderung der Entropie mit s, so ist

$$a = u + Ts\,,$$

wenn T die absolute Temperatur bedeutet. Natürlich ist dafür Sorge zu tragen, daß die an die Gefäßwand grenzenden Teile der Oberflächen von Flüssigkeit und Dampf durch den Vorgang nicht geändert werden. Da die Änderungen der Energie und Entropie von dem Wege unabhängig sind, auf dem die Verkleinerung der Flüssigkeitsoberfläche vorgenommen wird, so können wir die Größen u und s auch durch folgenden Prozeß bestimmen. Wir erhitzen zunächst das System in einem durch zwei Stempel verschließbaren Gefäß (Fig. 1) bis zur kritischen Temperatur, wobei wir den unteren Stempel festhalten und den oberen so weit verschieben, als die Ausdehnung des Systems erfordert. Damit die an das Gefäß grenzenden Teile der Oberflächen von Flüssigkeit und Dampf

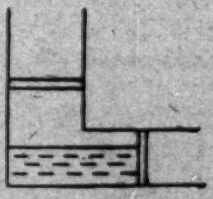


Fig. 1.

sich durch den Vorgang nicht ändern, denken wir uns die Wände gewellt und verbiegbar, so daß wir die Vergrößerung des Volumens durch Verbiegen der Wände bei ungeänderten Oberflächen vornehmen können. Durch diesen Prozeß gewinnen wir die Arbeit

$$A = \int_T^\Theta p \frac{dV}{dT} dT$$

und die zuzuführende Wärme beträgt

$$Q = \int_T^\Theta dQ,$$

wenn dQ die Wärme ist, die man dem Systeme zur Erwärmung von T auf $T + dT$ zuführen muß. Ist die kritische Temperatur erreicht, so verschieben wir bei konstantem Volumen beide Stempel so weit, daß der Querschnitt des späteren Flüssigkeitsraumes um die Flächeneinheit verkleinert wird und beginnen wieder, durch Wärmeentzug und Arbeit gegen den oberen Stempel, das System zu kondensieren. Diese Kondensation leiten wir so, daß wir bei jeder Temperaturerniedrigung von $T + dT$ auf T stets dieselbe Wärmemenge dQ gewinnen, die wir im ersten Teile des Prozesses dem Systeme haben zuführen müssen, so daß alle eingetretenen Änderungen der Entropie wieder rückgängig gemacht werden. Dann muß aber die aufzuwendende Arbeit A' von A verschieden sein, da wir sonst ohne Energie- und Entropieänderung die Oberfläche verkleinert hätten und somit $\alpha = 0$ wäre. Es ist also

$$A' = \int_T^\Theta p \frac{dV'}{dt} dt,$$

wobei $dV > dV'$. In Fig. 2 bedeute 1 den Anfangs-, 2 den Endzustand des Systems; man erkennt, daß für jede Temperatur $V' > V$. Der Unterschied ist

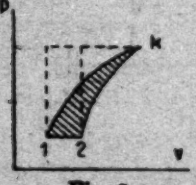


Fig. 2.

$$\Delta V = V' - V = \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{\alpha, T}$$

wenn wir durch angehängte Indizes die Größen andeuten, die bei der Differentiation nach der freien Flüssigkeitsoberfläche F konstant gehalten werden sollen. Um das ursprüngliche Volumen V herzustellen, haben wir jetzt noch eine gewisse Menge Dampf zu kondensieren, wozu wir

die Arbeit $p \cdot \Delta V$ und die Wärmemenge $-\Delta Q$ aufwenden müssen. Die während des ganzen Prozesses gewonnene Energie beträgt $A - A' - p\Delta V + \Delta Q$ und die Änderung der Entropie

$$-\frac{\Delta Q}{T},$$

somit ist die Oberflächenspannung α

$$\alpha = A - A' - p \cdot \Delta V = \int_T^\infty dp \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{T,p},$$

d. h. gleich dem Inhalte der in Fig. 2 schraffierten Fläche. Es ist

$$-\frac{d\alpha}{dT} = \Delta V \cdot \frac{dp}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{T,p} \frac{dp}{dT}.$$

Errichten wir über der Strecke 1 2 ein Rechteck bis zur Höhe des kritischen Punktes K, so ergibt sich aus der Figur, daß die schraffierte Fläche kleiner ist als der Inhalt dieses Rechteckes, daß also

$$\alpha < \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{T,p} \cdot (\pi - p)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_{T,p} > \frac{\alpha}{\pi - p}.$$

Somit wird

$$-\frac{d\alpha}{dT} > \frac{\alpha}{\pi - p} \frac{dp}{dT},$$

oder mit Benutzung der Clausius-Clapeyronschen Beziehung

$$-\frac{d \log \alpha}{dT} > \frac{1}{\pi - p} \frac{T(V_d - V_f)}{r},$$

wenn r die gesamte Verdampfungswärme und $V_d V_f$ die spezifischen Volumina von Dampf und Flüssigkeit bedeuten. Die Thermodynamik gibt also eine untere Grenze für den Wert von $-\frac{d\alpha}{dT}$.

2. Der Einfluß der Oberflächenspannung auf den Druck des gesättigten Dampfes wurde für den Fall gekrümmter Oberflächen von verschiedenen Forschern theoretisch untersucht. Lord Kelvin war der erste, der Formeln für den

Druck eines Flüssigkeitstropfens angab, und die bekannte Gleichung bewies, daß

$$p_f - p_d = \frac{2\alpha}{r}$$

(p_f, p_d Druck der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, r Radius des Tropfens). Es soll im folgenden gezeigt werden, daß die von Kelvin angegebenen Beziehungen sich aus viel allgemeineren Gleichungen ableiten lassen, die sich aus der Betrachtung des thermodynamischen Gleichgewichtes eines aus Flüssigkeit und Dampf bestehenden Systemes ergeben. Dieses Gleichgewicht ist dann vorhanden, wenn für alle mit den gegebenen äußeren Bedingungen verträglichen virtuellen Zustandsänderungen die Entropie S des Systemes ein Maximum ist.[1]) Die äußeren Bedingungen sind dabei die von gegebenen Werten der Masse, des Volumens und der Energie. Bedeuten M_1 M_2 die Massen von Flüssigkeit und Dampf, v_1 v_2 die spezifischen Volumina (der Index 1 soll sich stets auf die Flüssigkeit beziehen), so muß also für alle virtuellen Änderungen gelten:

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta M_1 + \delta M_2 = 0, \\ v_1 \delta M_1 + M_1 \delta v_1 + v_2 \delta M_2 + M_2 \delta v_2 = 0, \end{cases}$$

ferner seien F, G_1, G_2 die Flächen, in denen Flüssigkeit und Dampf aneinander bzw. an die Gefäßwand grenzen, u', u_1', u_2'' die Energien dieser Flächen bezogen auf die Flächeneinheit und α α_1 α_2 die bezüglichen Oberflächenspannungen. Dann gibt die Bedingung der Konstanz der Energie, wenn u_1 u_2 die spezifischen Energien von Flüssigkeit und Dampf bedeuten:

$$(2) \qquad \begin{cases} u_1 \delta M_1 + M_1 \delta u_1 + u_2 \delta M_2 + M_2 \delta u_2 + u' \delta F + u_1' \delta G_1 \\ \qquad + u_2' \delta G_2 + F \delta u' + G_1 \delta u_1' + G_2 \delta u_2' = 0. \end{cases}$$

Die auf den Dampf bezüglichen Glieder $u_2' \delta G_2$ und $G_2 \delta u_2'$ können vernachlässigt werden. Im Falle des Gleichgewichtes muß nun $\delta S = 0$ sein. Wir schreiben für S

$$S = M_1 s_1 + M_2 s_2 + S',$$

worin s_1 s_2 die spezifischen Entropien von Flüssigkeit und Dampf bedeuten.

---

1) Vgl. M. Planck, Thermodynamik, 4. Aufl. p. 139ff.

Es ist

$$\delta s = \frac{\delta u + p\,\delta v}{T},$$

$$\delta S' = \frac{F\delta u' + G_1\delta u_1' - (a-u')\delta F - (a'-u_1')\delta G_1}{T}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\delta S = 0$ gibt also:

$$(3)\quad \begin{cases} s_1\,\delta M_1 + s_2\,\delta M_2 + M_1\dfrac{\delta u_1 + p_1\delta v_1}{T_1} + M_2\dfrac{\delta u_2 + p_2\delta v_2}{T_2} \\ \qquad + \dfrac{F\delta u' + G_1\delta u_1' - (a-u')\delta F - (a'-u_1')\delta G_1}{T} = 0. \end{cases}$$

Sei nun V_1 das Gesamtvolumen der flüssigen Phase; dann können wir die Variationen δF und δG je in zwei Bestandteile zerlegen, von denen sich der erste auf Veränderungen bei konstantem Volumen V_1 bezieht, der zweite solche Variationen bedeutet, die durch die Änderung $\delta V_1 = v_1\delta M_1 + M_1\delta v_1$ hervorgerufen werden. Wir setzen demnach

$$(4)\quad \begin{cases} \delta F = \delta' F + \dfrac{\partial F}{\partial V_1}(v_1\,\delta M_1 + M_1\,\delta v_1), \\ \delta G = \delta' G + \dfrac{\partial G}{\partial V_1}(v_1\,\delta M_1 + M_1\,\delta v_1). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung von (1), (2) und (4) gibt nun Gleichung (3) folgende Beziehungen:

$$(5)\quad T_1 = T_2 = T,$$

$$(6)\quad p_1 = p_2 + \alpha\frac{\partial F}{\partial V_1} + \alpha'\frac{\partial G}{\partial V_1},$$

$$(7)\quad s_1 - s_2 = \frac{1}{T}\left(u_1 - v_2 + p_2(v_1 - v_2) + \alpha\frac{\partial F}{\partial V_1}v_1 + \alpha'\frac{\partial G}{\partial V_1}v'\right),$$

$$(8)\quad a\,\delta' F + a'\,\delta' G = 0.$$

Die Gleichung (8) drückt aus, daß im Gleichgewicht die freie Oberflächenenergie $aF + a'G$ bei gegebenem Flüssigkeitsvolumen ein Minimum ist. Die Kelvinsche Formel ist ein spezieller Fall der Gleichung (6). Für einen Flüssigkeitstropfen wird nämlich nach (8) $\delta' F = 0$, d. h. der Tropfen hat im Gleichgewichte Kugelgestalt. Es ist dann

$$F = 4\pi r^2, \quad G = 0, \quad V_1 = \frac{4\pi r^3}{3},$$

$$\delta F = 8\pi r\,\delta r; \quad \delta V_1 = 4\pi r^2\,\delta r,$$

somit

$$\frac{\partial F}{\partial V_1} = \frac{2}{r} \quad \text{und} \quad p_1 = p_2 + \frac{2\varkappa}{r}.$$

Zur Berechnung von p_1 und p_2 betrachten wir Gleichung (7) und beachten, daß

$$s_1 - s_2 = \int_2^1 \frac{du + p\,dv}{T}.$$

Integrieren wir auf isothermem Wege, so wird

$$s_1 - s_2 = \frac{u_1 - u_2}{T} + \frac{1}{T}\int_2^1 p\,dv$$

und daher

$$\int_2^1 p\,dv = p_2(v_1 - v_2) + \alpha\frac{\partial F}{\partial V_1}v_1 + \alpha'\frac{\partial G}{\partial V_1}v_1. \tag{9}$$

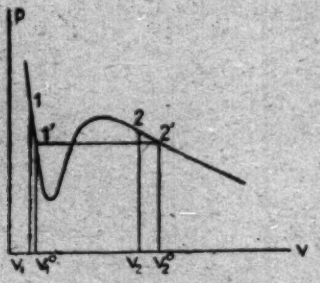


Fig. 3.

In Fig. 3 sollen die Punkte 1 2 die Zustände von Flüssigkeit und Dampf bedeuten; würden die Kapillarkräfte nicht wirken, so wäre

$$\int_{2'}^{1'} p\,dv = p_0(v_1^0 - v_2^0)$$

und es würden sich die Zustände 1′ und 2′ mit dem gemeinsamen Drucke p_0 und den Volumina v_1^0 und v_2^0 ausbilden. Wir schreiben nun für

$$\int_2^1 p\,dv$$

$$\int_2^1 p\,dv = \int_2^{2'} + \int_{2'}^{1'} + \int_{1'}^{1} = \frac{v_2^0 - v_2}{2}\cdot(p_2 + p_0) + p_0(v_1^0 - v_2^0) + \frac{v_1 - v_1^0}{2}(p_0 + p_1).$$

Diese Gleichung gibt zusammen mit (9) und (6)

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \dfrac{v_2 + v_2^0}{v_2 + v_2^0 - (v_1 + v_1^0)}\left(\alpha\dfrac{\partial F}{\partial V_1} + \alpha'\dfrac{\partial G}{\partial V_1}\right), \\ p_2 = p_0 + \dfrac{v_1 + v_1^0}{v_2 + v_2^0 - (v_1 + v_1^0)}\left(\alpha\dfrac{\partial F}{\partial V_1} + \alpha'\dfrac{\partial G}{\partial V_1}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Setzt man statt $v_2 + v_2^0$ und $v_1 + v_1^0$ die Größen $2v_2^0$ und $2v_1^0$ ein und vernachlässigt im Nenner v_1^0 gegen v_2^0, so wird

$$(11)\qquad \begin{cases} p_1 = p_0 + \alpha \dfrac{\partial F}{\partial V_1} + \alpha' \dfrac{\partial G}{\partial V_1}, \\ p_2 = p_0 + \dfrac{v_1^0}{v_2^0 - v_1^0}\left(\alpha \dfrac{\partial F}{\partial V_1} + \alpha' \dfrac{\partial G}{\partial V_1}\right). \end{cases}$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall, daß in die Flüssigkeit zwei parallele Platten von gleichem Materiale eingetaucht seien. Es sei l die Breite, e der Abstand der beiden Platten und h die Höhe, bis zu der die Flüssigkeit zwischen den Platten ansteigt. Dann ist das Volumen der zwischen den Platten befindlichen Flüssigkeit

$$V_1 = e \,.\, l \,.\, h, \qquad \delta V_1 = e \,.\, l \,.\, \delta h \,.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial F}{\partial V_1} = 0; \quad \delta G = 2(l + e)\delta h = 2\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{e}\right)\delta V_1.$$

Somit ist

$$\frac{\partial G}{\partial V_1} = 2\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{e}\right).$$

Ist l sehr groß gegenüber e, so wird der Dampfdruck nach der zweiten Gleichung (11)

$$p_2 = p_0 + \frac{2\alpha'}{e}\,\frac{v_1^0}{v_2^0 - v_1^0} = p_0 + \frac{2\alpha'}{e}\,\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

wenn ε_1 ε_2 die Dichten von Flüssigkeit und Dampf bedeuten. Ist das System der Schwere unterworfen, so entspricht der Differenz $p_2 - p_0$ eine Höhendifferenz h und es ist, wenn wir die Dichte des Dampfes als annähernd konstant betrachten

$$h\,\varepsilon_2\, g = p_2 - p_0,$$

also

$$h = \frac{2\alpha'}{e}\,\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)g}.$$

Ebenso leicht bestimmt sich die Steighöhe zwischen zwei Platten von verschiedenem Materiale, ferner in zylindrischen und konischen Röhren.

Wir betrachten noch den Fall eines von einem Netz von Poren und Kanälen durchzogenen Stoffes. Ist das Netz mit Flüssigkeit gefüllt, so ist $\partial F/\partial V_1$ verschwindend klein gegen $\partial G/\partial V_1$. Findet nun Benetzung statt, so ist α' negativ und der Druck des gesättigten Dampfes sehr viel kleiner als p_0. Bezeichnen wir die durchschnittliche Oberfläche G der Volumeinheit als „spezifische Oberfläche" 0, so ist unter Benutzung von (11)

$$p_2 - p_0 = \frac{{\varrho_1}^0}{{\varrho_2}^0 - {\varrho_1}^0}\, \alpha' \cdot 0 .$$

Für vollkommene Benutzung ist $-\alpha' = \alpha$; die Druckverminderung ist dann proportional dem Produkte aus spezifischer Oberfläche mal Oberflächenspannung.

(Eingegangen 16. September 1918.)

4. *Die allgemein kovarianten Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern ponderabler Materie vom Standpunkt der Elektronentheorie;*

von Walter Dällenbach.

(Zürcher Dissertation.)

Inhalt.

Im Kapitel I werden unter Zugrundelegung eines bestimmten elektronentheoretischen Modells der Materie, das die Trennung von wahrem Strom und Polarisationsstrom gewährleistet, aus den allgemein kovarianten Gleichungen des elektromagnetischen Feldes im leeren Raume durch einen Prozeß der Mittelung, der der vollkommenen Verschmelzung von Raum und Zeit, wie sie der Relativitätstheorie eigen ist, Rechnung trägt, ebensolche allgemein kovariante Feldgleichungen für das Innere der Materie abgeleitet. Der Polarisationszustand der Materie wird dabei charakterisiert durch einen „Sechservektor der Polarisation", der sich in natürlicher Weise als ein Konfigurationsintegral aus den Lagen und Geschwindigkeiten der in den Molekülen enthaltenen Mikroladungen ergibt.

Im Kapitel II werden die gewonnenen Feldgesetze für ruhende Materie mit den Maxwellschen identifiziert und ferner gezeigt, daß der Ausdruck für den Sechservektor der Polarisation zu den bekannten Ausdrücken der Elektronentheorie von Lorentz degeneriert.

Im Kapitel III werden zunächst für den Fall der Elektrostatik dann für bewegte Materie in einem beliebig veränderlichem Felde die Kraftdichte und der Impulsenergietensor anschaulich abgeleitet.

Im IV. Kapitel werden die Resultate des III. diskutiert. Die berechnete Kraftdichte gilt auch für anisotrope Körper mit Hysterese. Der Impulsenergietensor ist eine Verallgemeinerung des Minkowskischen. Es wird gezeigt, daß seine Asymmetrie nicht im Widerspruch steht zu der in der Relativitätstheorie geforderten Gleichheit von Impulsdichte und Energiestrom.

Kapitel I. Die Herleitung der Feldgleichungen.

Die folgenden Rechnungen werden bei raum-zeitlich konstantem Gravitationsfeld in einem Lorentzsystem durchgeführt. Der Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie ist in dieser Arbeit nur formaler Natur und wird der Einfachheit halber erst an den Resultaten vorgenommen.

In der Schreibweise der allgemeinen Relativitätstheorie[1]) lauten die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes im leeren Raum[2])

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad f_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu}, \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \varrho_0 u^\mu, \\ &\text{c)} \quad \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial f_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \end{aligned}$$

Das Induktionsgesetz c) ist eine bloß mathematische Konsequenz der Gleichung a), die den Sechservektor $f_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes von einem Vierervektorpotential φ_μ ableitet. In Gleichung b) bedeuten ϱ_0 die Ruhdichte der Elektrizität und

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

die Vierergeschwindigkeit, mit der sie begabt ist.

Es ist die Ansicht der Elektronentheorie, ein Stück Materie bestehe aus einem Klumpen von sehr vielen positiven und negativen elektrischen Ladungen im Raume, zwischen welchen das Gleichungsschema (I) streng gelte.

Mit den uns zu Gebote stehenden groben Meßinstrumenten sind wir nicht imstande, die Bewegungen der ungeheuer zahlreichen und winzigen Ladungen im einzelnen zu verfolgen; wir sind nicht imstande, in einem Zeitmoment den mikroskopischen Zustand der Materie experimentell festzulegen und die aus ihm folgenden und durch Gleichungen wie (I) verlangten räumlich-zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen wirklich zu beobachten. Was wir zu messen vermögen, sind immer nur Mittelwerte, wenn's hoch geht, mittlere Schwankungen um Mittelwerte der mikroskopischen Zustandsgrößen.

---

1) Hier wie im Folgenden ist über zwei gleiche Koordinatenindices im selben Term stets zu summieren.

2) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 49. p. 769. 1916, insbesondere § 20. — H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin 1918.

Es sei a eine solche mikroskopische Zustandsgröße. In voller Ausnutzung der Symmetrie, mit der Raum und Zeit als unabhängige Veränderliche in den Naturgesetzen auftreten, definieren wir als Mittelwert der Größe a

$$A = \frac{1}{\int_G d\tau} \int_G a \, d\tau = \bar{a}. \tag{1}$$

G bedeutet ein physikalisch kleines Weltgebiet, will sagen ein Raumgebiet, das sehr viele der kleinen Ladungen enthält, betrachtet während einer zeitlichen Dauer, die ebenfalls sehr viele der diskreten Erlebnisse, wie Zusammenstöße, Umläufe, Schwingungen irgendeiner der kleinen Ladungen umspannt. $d\tau$ ist das gegen Lorentztransformationen invariante Volumenelement des Gebietes G.

Weiterhin lassen wir uns vom Vertrauen leiten, daß, wenn wir den durch (1) definierten Prozeß der Mittelung auf die Gleichungen (I) anwenden, wir zu Beziehungen geführt werden, die gerade die Mittelwerte miteinander verknüpfen, die wir als experimentelle Physiker tatsächlich beobachten.

Wir konstatieren:

Eine Größe und ihr Mittelwert haben dieselben Kovarianzeigenschaften.

Differentiation und Mittelung sind vertauschbare Prozesse.

Das Gleichungsschema (I) gilt folglich unverändert ohne irgendeine spezialisierende Voraussetzung über die Konstitution der Materie für die Mittelwerte $\overline{\Phi_\mu}$, $\overline{F_{\mu\nu}}$ und $\overline{\varrho_0 u^\mu}$ des Potentials φ_μ, des Feldes $f_{\mu\nu}$ und des Stromes $\varrho_0 u^\mu$. Es wird uns in der Folge gelingen, $\overline{\Phi_\mu}$ und $\overline{F_{\mu\nu}}$ direkt mit in der Beobachtung gegebenen Größen der bisherigen phänomenologischen Theorie von **Maxwell** zu identifizieren. Nicht so mit dem Mittelwerte $\overline{\varrho_0 u_\mu}$. Ihm haben wir von nun an unsere ganze Aufmerksamkeit zu widmen, und er zwingt uns fürs erste, ein genaueres Bild der Materie zu entwerfen.

Die kleinen Ladungen in der Materie — wir nennen sie in Zukunft Elektronen — die Elektronen also seien ein für alle Mal zusammengefaßt zu Verbänden, zu kleinen Planetensystemen, zu Molekülen. Die totale Ladung eines Moleküls

sei Null und nie verlasse ein Elektron sein Molekül. Wohl gestehen wir ihm zu, daß es unter dem Einfluß eines äußeren, veränderlichen Feldes im Innern des Verbandes andere und andere Bahnen in stationären Bewegungen durchlaufe, oder um andere und andere Gleichgewichtslagen zitternde Schwingungen ausführe; der Elektronenverband aber, der durch das Wort „Molekül" bezeichnet wurde, bleibe dabei beisammen. Der kondensierte Ausdruck dieser Forderungen lautet:

$$\int_g \varrho_0 w^\mu \, d\tau = 0, \tag{2}$$

integriert über das Weltgebiet g, das von irgendeinem Molekül während irgendeiner physikalisch kleinen Dauer durchfegt wird.

Wie die einzelnen Moleküle sich gegeneinander verhalten, ob sie verbunden sind zu einem festen Körper, ob sie aneinander vorbeikriechen, wie in einer Flüssigkeit, oder ob sie sich schließlich zwischen zwei Zusammenstößen unabhängig voneinander bewegen wie in einem idealen Gase, ist für das Folgende durchaus unwesentlich; denn es ist uns hier gar nicht zu tun um die Zusammenhänge zwischen elektromagnetischen und elastischen Eigenschaften der Körper; und es geschieht bloß, um die Vorstellung zu fixieren und die Überlegungen nicht unnötig zu belasten, wenn wir von nun an trotzdem denken, die Schwerpunkte der Moleküle seien gegenüber den Veränderungen des elektromagnetischen Feldes durch elastische Kräfte starr aneinander gekettet.

Bis jetzt haben wir Elektronen nur als Bausteine von Molekülen kennen gelernt. Wir nennen sie in Zukunft *Polarisationselektronen* (P) und unterscheiden von ihnen die *konvektiven Ladungen* (K), die an die Materie — sagen wir an die Schwerpunkte der Moleküle — gebunden die makroskopische Bewegung der Materie mitmachen. Endlich soll noch ein Schwarm von frei beweglichen *Leitungselektronen* (L) stoßend und selbst gestoßen unter dem Einfluß des Feldes zwischen den Molekülen durchjagen.

Dieses Modell der Materie legen wir der Mittelung des Viererstromes $\varrho_0 w^\mu$ zugrunde. Aus der Definition (1) des Mittelwertes folgt

$$\overline{\varrho_0 u^\mu} = \overline{\varrho_0 u_L^\mu} + \overline{\varrho_0 u_K^\mu} + \overline{\varrho_0 u_P^\mu}.$$

$\overline{\varrho_0 u_L^\mu} + \overline{\varrho_0 u_K^\mu}$ = Leitungsstrom plus Konvektionsstrom bezeichnen wir zusammen als den *wahren Strom* J^μ.

Um die Existenz eines Stromes der Polarisationselektronen bequem einzusehen und ihn auf möglichst durchsichtige Weise zu berechnen, kehren wir auf die Dauer von einigen Seiten zurück in den dreidimensionalen, gewöhnlichen, euklidischen Raum mit einem der Anschauung geläufigen, kartesischen Koordinatensystem. Unsern Versuchskörper nehmen wir mit, entleeren ihn aber zuvor von allen konvektiven Ladungen und Leitungselektronen und behalten zurück den Haufen ungeladener Moleküle. Die von früher her noch wild bewegten Polarisationselektronen werden plötzlich alle in ihrer Bewegung gestoppt; sie sollen in Gleichgewichtalagen zur Ruhe kommen. Auch der Körper als Ganzes sei in Ruhe, und ein eventuell vorhandenes elektromagnetisches Feld sinke herab zu einem bloß elektrostatischen.

Der Aufgabe, den Mittelwert $\overline{\varrho_0 u_P^\mu}$ des Viererstromes $\varrho_0 u^\mu$ zu ermitteln, entspricht unter den geschilderten Verhältnissen die viel einfachere, den Mittelwert $\overline{\varrho_{0P}}$ der Ruhedichte ϱ_0 zu berechnen. Der Mittelwert selbst ist dabei immer noch durch (1) definiert, kann allerdings jetzt in der speziellen Form:

$$\overline{\varrho_{0P}} = \frac{1}{\int_R dV} \int_R \varrho_0 \, dV,$$

geschrieben werden. R ist ein physikalisch kleines Raumgebiet und dV sein Volumenelement. $\overline{\varrho_{0P}}$ ist immer dann von Null verschieden, wenn die Ladung $\int_R \varrho_0 \, dV$ es ist. Fehlt vorläufig das äußere Feld, so ist klar, daß sogar im Innern eines Kristalles $\int_R \varrho_0 \, dV = 0$ ist, falls nur die Oberfläche des Gebietes R genügend unregelmäßig, etwa wie ein Wellblech, ganz willkürlich Moleküle der Materie zerschneidet. Polarisieren wir, so werden im allgemeinen die positiven Elektronen ungefähr in der Richtung, die negativen aber entgegen der Richtung des äußeren Feldes verschoben.

Geschieht dieses Verschieben nicht über das ganze Gebiet R mit derselben Intensität, was seinen Grund darin haben kann, daß einmal das äußere Feld selbst, dann aber auch die Polarisierbarkeit der Materie sich über das Gebiet R von Raumpunkt zu Raumpunkt langsam und stetig ändern, so ist evident, daß das im unpolarisierten Zustand ungeladene Gebiet R nun sehr wohl eine Ladung haben kann. Die ihr entsprechende Ruhdichte ϱ_0 ist eben $\overline{\varrho_{0P}}$, und sie wollen wir jetzt berechnen durch Wiedergabe einer Überlegung von H. A. Lorentz.[1])

Bei nach außen gerichteter Normale seien df_ν ($\nu = 1, 2, 3$) die Komponenten eines Elementes der Oberfläche von R. df_ν zerschneide eine sehr große Menge von Molekülen. Die Summe dS aller Ladungen, die einerseits zerschnittenen Molekülen angehören, andererseits innen am Flächenelement df_ν haften, verschwindet im unpolarisierten Zustand der Materie; im polarisierten haben wir dS erst zu ermitteln. Alle Moleküle seien gleichgebaut und sollen je n Polarisationselektronen enthalten. Das k^{te} Elektron besitze die Ladung ε_k und habe vom Schwerpunkt seiner Molekel den Abstand $\mathfrak{r}_k$ mit den Komponenten x_k^ν. Unter allen Molekülen in der Umgebung von df_ν greifen wir alle die heraus, bei denen die Spitze des Vektors $\mathfrak{r}_k$, wenn wir ihn mit sich parallel in den Koordinatenursprung verschieben, in das Innere eines kleinen Volumenelementes dv zu liegen kommt. Die Moleküle dieser Art denken wir uns des bequemeren Ausdrucks wegen in der Folge „rot“ gefärbt. Wie groß ist die Zahl der roten Moleküle in der Volumeneinheit? Wir sind offenbar befugt, dafür den Ansatz zu machen $s_k dv$, wo die Funktion s_k nur noch von der Lage des Volumenelementes dv zum Koordinatenursprung abhängt. Ferner: welches sind die roten Moleküle deren Radius $\mathfrak{r}_k$ vom Flächenelement df_ν zerschnitten wird? Doch wohl alle die, deren Schwerpunkt im Zylinderchen liegt, das durch Flächenelement df_ν und Vektor $\mathfrak{r}_k$ gebildet wird. Das Volumen dieses Zylinderchens ist $x_k^\nu df_\nu$, und Volumen mal Dichte gibt die Anzahl $s_k dv x_k^\nu df_\nu$ all der roten Moleküle,

1) H. A. Lorentz, Weiterbildung der Maxwellschen Theorie Elektronentheorie. Encykl. d. math. Wiss. V 14, insbesondere Nr. 27 u. 28.

deren Ladungen e_k jenseits und deren Schwerpunkte diesseits von df_ν liegen, falls wir annehmen das Volumen $x_k^\nu df_\nu$ sei für den herausgegriffenen Vektor r_k gerade positiv. Jedes dieser Moleküle bedeutet „eine" Ladung e_k jenseits von df_ν, alle zusammen aber die Ladung $e_k s_k dv x_k^\nu df_\nu$ jenseits von df_ν herrührend von zerschnittenen Molekülen.

Integrieren wir über alle möglichen Lagen des mathematisch unendlich kleinen Volumenelementes dv, so erwischen wir damit sicher überhaupt alle Ladungen e_k, die zerschnittenen Molekülen angehören, und

$$df_\nu \int e_k s_k x_k^\nu dv$$

bedeutet den Überschuß der Ladungen e_k jenseits von df_ν über die noch diesseits des Flächenelementes gelegenen. Summieren wir endlich über alle Polarisationselektronen $k = 1$ bis n und bedenken, daß die diesseits und jenseits an df_ν haftenden totalen Ladungen entgegengesetzt gleich sind, so folgt als Ladung diesseits von df_ν

$$dS = -df_\nu \sum_{k=1}^{n} \int e_k s_k x_k^\nu dv.$$

Die Summe ist nichts anderes als die Summe der Funktion $e x^\nu$ über alle Ladungen e der Moleküle, die im Volumen 1 Platz haben. Lassen wir die diskreten Ladungen wieder zerfließen zu einer räumlich kontinuierlich ausgebreiteten elektrischen Ruhdichte ϱ_0, so wird endgültig

$$dS = -\overline{\varrho_0 x^\nu} \cdot df_\nu,$$

wobei

$$\overline{\varrho_0 x^\nu} = \frac{1}{\int_r dV} \int_r \varrho_0 x^\nu dV.$$

Das Integrationsgebiet r ist von höherer Ordnung klein als R, aber immer bloß physikalisch klein. Es unterscheidet sich außerdem von R darin, daß seine Oberfläche keine Moleküle schneiden darf. Erinnern wir uns, daß die Ladung $\int \varrho_0 dV$ einer Molekel verschwindet, so erkennen wir, daß die x^ν in obiger Formel in einem allen Molekülen gemeinsamen Koordinatensystem als die gewöhnlichen Koordinaten gedeutet

werden dürfen. Das tun wir in der Folge, ohne die Bezeichnung nochmals zu ändern. Durch Integration von dS über das Gebiet R erhalten wir die totale in ihm eingeschlossene Ladung und damit den Mittelwert $\overline{\varrho_{0P}}$.

Noch etwas verallgemeinernd fassen wir zusammen: Bedeutet ϱ_0 irgendeine Raumfunktion, für die

$$\int_r \varrho_0 \, dV = 0 \tag{3}$$

integriert über einen physikalisch kleinen Raum r, der keine Moleküle schneidet, so ist ihr Mittelwert gegeben durch

$$\overline{\varrho_{0P}} = -\frac{1}{\int_R dV} \int_R m^\nu \, df_\nu = -\frac{\partial m^\nu}{\partial x^\nu} \tag{4}$$

R ist dabei ein relativ zu r großes Gebiet, das achtlos Moleküle zerschneidet. Der Vektor

$$m^\nu = \overline{\varrho_0 x^\nu} = \frac{1}{\int_r dV} \int_r \varrho_0 x^\nu \, dV \tag{5}$$

variiere so langsam, daß seine ersten Ableitungen innerhalb R als konstant betrachtet werden dürfen.

Dieses Resultat bleibt auch dann bestehen, wenn das Gebiet R eine Mischung verschiedener Arten von Molekülen enthält.

Dies die Überlegung von H. A. Lorentz. Wir erkennen, sie ist unabhängig von der Zahl der Dimensionen, unabhängig davon, ob ϱ_0 nun gerade ein Skalar oder eine Vektor- oder Tensorkomponente bedeute. Ihre einzige Voraussetzung ist die Gleichnng (3); ihr entspricht aber in der vierdimensionalen Welt die Gleichung (2), und so erhalten wir in der Tat ohne weitere Rechnung den gesuchten Polarisationsstrom $\overline{\varrho^0 u^\mu}_P$. Ich darf es wohl dem Leser überlassen, rasch in der Welt eine Raumkoordinate zu unterdrücken und an zweidimensionalen Molekülen und dem von ihnen beschriebenen Bündel von Weltröhren, sich den vorstehenden Beweis nochmals anschaulich zurecht zu legen. Dann aber gehen wir weiter und

notieren in folgender Gestalt die den Gleichungen (4) und (5) entsprechenden Ausdrücke

$$(6) \qquad \overline{\varrho_0 u^\mu}_P = -\frac{1}{\int_G d\tau}\int_G M^{\mu\nu}\, df_\nu = -\frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$$

$$(7) \qquad M^{\mu\nu} = \overline{\varrho_0 u^\mu x^\nu} = \frac{1}{\int_g d\tau}\int_g \varrho_0 u^\mu x^\nu\, d\tau.$$

Mit Gleichung (7) haben wir jedenfalls den Tensor Polarisation gefunden. Nur ist er ganz unsymmetrisch. Die große Zahl von 16 Komponenten, über die er jetzt noch verfügt, bringen wir niemals in Einklang mit der Einfachheit Maxwellscher Theorie, die wir bei ruhender Materie als Resultat erhalten müssen. Auch die Tatsache, daß Gleichung (6) sich nur für den Fall, daß $M^{\mu\nu}$ ein Sechservektor ist, in einfacher Weise allgemein kovariant schreiben läßt, legt es nahe, die folgende partielle Umformung zu versuchen:

$$M^{\mu\nu} = \overline{\varrho_0 u^\mu x^\nu}$$
$$= -\overline{\varrho_0 u^\nu x^\mu} + \overline{\varrho_0 \frac{d}{ds}(x^\mu x^\nu)}.$$

Durch Addition der zwei Ausdrücke spaltet $M^{\mu\nu}$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil

$$M^{\mu\nu} = \overline{\frac{\varrho_0}{2}(u^\mu x^\nu - u^\nu x^\mu)} + \overline{\frac{\varrho_0}{2}\frac{d}{ds}(x^\mu x^\nu)}.$$

Die Komponenten des symmetrischen Tensors bedeuten mittlere Änderungsgeschwindigkeiten von Größen wie Trägheitsmomente, Zentrifugalmomente, statische Momente von Molekülen, nur stehen immer an Stelle der trägen Massen die teils positiven, teils negativen Ladungen der Polarisationselektronen. Sind auch die Änderungsgeschwindigkeiten derartiger Größen nicht exakt Null, so sind sie doch gewiß konstant über das Gebiet R und tragen nach Formel (6) nichts bei zum Werte von $\overline{\varrho_0 u^\mu}_P$.

Damit ist der Polarisationsstrom und sind auch die Mittelwerte der Feldgleichungen gefunden. Wir stellen die Resultate zusammen im folgenden Schema:

(II)

$$\text{a)}\quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu}$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial x^\nu}(F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) = J^\mu$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0$$

$$\text{d)}\quad M^{\mu\nu} = \frac{\varrho_0}{2}(u^\mu x^\nu - u^\nu x^\mu).$$

Es ist zu bemerken, daß diese ohne weiteres allgemein kovariant zu schreibenden Gleichungen sowohl für kristallisierte, wie kristalline, wie auch amorphe Körper gelten, wenn es nur möglich ist, wahren Strom und Polarisationsstrom in der durch die Existenz von Molekülen gemäß Gleichung (2) bedingten Weise zu trennen. Auch von der Trägheit der Elektrizität haben wir nirgends abgesehen. So ist es denn interessant zu konstatieren, daß die ganze Tücke der Materie wie Dispersion, Hysterese, Abhängigkeit der elektromagnetischen Eigenschaften von Temperatur und Elastizität die Feldgleichungen unberührt läßt und in den sogenannten Materialgleichungen ihren alleinigen Ausdruck findet. Diese ordnen bekanntlich einem gegebenen Verlauf des elektromagnetischen Feldes einen ganz bestimmten Verlauf der Polarisation zu. Ohne ihre Kenntnis ist die Lösung des elektromagnetischen Problems in irgendeinem konkreten Sonderfall unmöglich, und doch wäre es ein Verkennen der dieser Arbeit eigentümlichen Aufgabe, wenn wir auf sie näher eingingen und etwa versuchten, $F^{\mu\nu}$ und $M^{\mu\nu}$ in allgemein kovarianter Weise miteinander zu verknüpfen. Es hieße aber die unabhängige Bedeutung der Feldgleichungen überschätzen, wenn wir uns nicht noch einmal daran erinnerten, daß sie nur so lange gelten, als die Differentialquotienten der in ihnen auftretenden Zustandsgrößen „Feld“ und „Polarisation“ über physikalisch kleine Weltgebiete als konstant betrachtet werden dürfen. Damit schließen wir vor allem Lichtwellen aus, deren Wellenlänge vergleichbar mit den Moleküldimensionen bzw. deren Frequenz von derselben Größenordnung wie die Eigenfrequenzen der Polarisationselektronen werden.

Kapitel II. Anschluß an die bisherige phänomenologische Theorie von Maxwell und an die Elektronentheorie von Lorentz.

Im Fall ruhender Materie muß das Induktionsgesetz (IIc) zur Deckung kommen mit dem zweiten Maxwellschen Gleichungssystem und der Sechservektor $F_{\mu\nu}$ degeneriert infolgedessen zu den Vektoren magnetische Induktion $\mathfrak{b}$ und elektrische Feldstärke $\mathfrak{e}$. Halten wir daran fest und erinnern uns der Bedeutung von J^μ, so folgt aus der Identität von (IIb) mit dem ersten Gleichungssystem von Maxwell, daß die Magnetisierung $\mathfrak{m}$ und die elektrische Polarisation $\mathfrak{p}$ sich in ruhender Materie zusammenschließen zum Tensor $M^{\mu\nu}$. Und endlich aus (IIa) erkennen wir als die räumlichen Komponenten von Φ_μ das Vektorpotential $\mathfrak{f}$ und als die Zeitkomponente das skalare Potential φ. Die folgende Tabelle gibt die Darstellung in Komponenten:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f} &= (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), & \varphi &= \Phi_4,\\
\mathfrak{i} &= (J^1, J^2, J^3), & \varrho &= J^4,\\
\mathfrak{b} &= (F^{23}, F^{31}, F^{12}), & \mathfrak{e} &= (F^{41}, F^{42}, F^{43}),\\
&= (F_{23}, F_{31}, F_{12}), & &= (F_{14}, F_{24}, F_{34}),\\
\mathfrak{m} &= (M^{23}, M^{31}, M^{12}), & \mathfrak{p} &= (M^{41}, M^{42}, M^{43}).
\end{aligned}$$

Die Lichtgeschwindigkeit ist dabei gleich eins gesetzt.

Spalten wir bei ruhender Materie nach Raum und Zeit, so treten in dreidimensionaler Vektoranalysis an Stelle von (IIa, b, c) die Gleichungen

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned}
&\text{a)} && \begin{cases} \mathfrak{b} = -\operatorname{rot}\mathfrak{f}, \\ \mathfrak{e} = \dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \end{cases}\\
&\text{b)} && \begin{cases} \left(\operatorname{rot}\mathfrak{b} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}\right) - \left(\operatorname{rot}\mathfrak{m} + \dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}\right) = \mathfrak{i}, \\ \operatorname{div}\mathfrak{e} + \operatorname{div}\mathfrak{p} = \varrho, \end{cases}\\
&\text{c)} && \begin{cases} \operatorname{rot}\mathfrak{e} + \dfrac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div}\mathfrak{b} = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dies sind die Maxwellschen Gleichungen bei scharfer Trennung von Feld $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}\}$ und Materie $\{\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{i}, \varrho\}$. Die bloß abgeleitete Bedeutung der Vektoren dielektrische Verschiebung $\mathfrak{d} = \mathfrak{e} + \mathfrak{p}$ und magnetische Feldstärke $\mathfrak{h} = \mathfrak{b} - \mathfrak{m}$ tritt klar in Erscheinung. Trotzdem bilden sie zusammen einen antisymmetrischen Tensor $D^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}$ mit den Ruhkomponenten

$$\mathfrak{h} = (D^{23}, D^{31}, D^{12}), \quad \mathfrak{d} = (D^{41}, D^{42}, D^{43}).$$

Damit sind wir noch nicht zu Ende, denn es ist nicht sicher, daß die Komponenten des Tensors $M^{\mu\nu}$, wie sie durch Gleichung (IId) definiert sind, übereinstimmen mit den Ausdrücken der bisherigen Elektronentheorie. Das muß der Fall sein. In einem Lorentzsystem, in dem die Materie ruht, ist

$$x^\mu = \{(\mathfrak{r} = x, y, z), t\},$$

$$u^\mu = \left\{\frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \frac{\mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \frac{\mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}\right\}$$

und $M^{\mu\nu}$ zerfällt in:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{\int ds}\int\left\{\frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{m}}\sum_{k=1}^{n} e_k \frac{[\mathfrak{r}, \mathfrak{v}]}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}\right\} ds,$$

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{\int ds}\int\left\{\frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{m}}\sum_{k=1}^{n} e_k \frac{\mathfrak{r} - \mathfrak{v}t}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}\right\} ds.$$

Die $\sum_{k=1}^{n}$ ist zu erstrecken über alle Ladungen e_k in der Molekel, $\sum_{\mathfrak{m}}$ über alle Moleküle in der Volumeneinheit und endlich die Integrale über eine physikalisch kleine zeitliche Dauer.

Ein *elektrisch polarisierbares* Teilchen, d. h. ein durch quasielastische Kräfte an eine Gleichgewichtslage gebundenes führt um diese Schwingungen aus. Dabei ist $\mathfrak{m} = 0$. In $\mathfrak{p}$ setzen wir:

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{v}t = 2\mathfrak{r} - \frac{d(\mathfrak{r}f)}{dt} \text{ und}$$
$$1 + \mathfrak{v}^2 \sim 1.$$

Das Zeitmittel von $\frac{d(\mathfrak{r}f)}{dt}$ verschwindet schon für das einzelne Teilchen, und wir erhalten als erste Annäherung in Übereinstimmung mit der Elektronentheorie [1]):

$$\mathfrak{p} = N\sum_{k=1}^{n} e_k \mathfrak{r}_k,$$

wobei N die Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit bedeutet.

Ein *magnetisch polarisierbares* Teilchen dagegen rotiere sehr rasch in einer kreisähnlichen Bahn. Für dieses ist $\mathfrak{p} = 0$, und $\mathfrak{m}$ wird in derselben Annäherung wie oben:

$$\mathfrak{m} = N\sum_{k=1}^{n} {}^1/_2 e_k [\mathfrak{r}, \mathfrak{v}]$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit der Elektronentheorie.

Die Gleichungen (II) genügen dem Relativitätsprinzip und degenerieren im Fall der Ruhe zu den Maxwellschen. Sie stehen daher, wie Minkowski [2]) gezeigt hat, in Einklang mit den Versuchen an bewegten Körpern.

Kapitel III. Ermittlung der ponderomotorischen Kraftdichte und des Impulsenergietensors.

Zur Bestimmung der Kraftdichte $\varkappa_\sigma$ im Innern bewegter Materie scheint das Naheliegendste, man wendet den durch (1) definierten Prozeß der Mittelung an auf die Kraftdichte im Vakuum:

$$\varkappa_\sigma = f_{\sigma\mu} \varrho_0 u^\mu$$

und versucht mit Benutzung der Feldgleichungen und des zugrunde gelegten Materiemodells den Mittelwert des Produkts auszudrücken durch die Mittelwerte seiner Faktoren.

---

1) H. A. Lorentz, a. a. O.

2) H. Minkowski, Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Ges. Abhandlungen Bd. 2, p. 352.

Oder, da in einem Lorentzsystem $\varkappa_\sigma$ sich in der folgenden einfachen Weise vom Impulsenergietensor t_σ^ν ableitet:

$$\varkappa_\sigma = \frac{\partial t_\sigma^\nu}{\partial x^\nu},$$

bietet sich die neue Möglichkeit, direkt auf den Mittelwert des Impulsenergietensors loszugehen, etwa in derselben mathematischen Weise, wie das soeben für die Kraftdichte skizziert wurde. Diesen Vorschlag macht Abraham [1]), doch nicht ohne ihm einen zweiten wesentlich andern gegenüber zu stellen, und diesen zweiten, anschaulichen Weg, den Einstein und Laub [2]) seiner Zeit schon betreten hatten, werden wir gehen.

Die Überlegungen, die wir zu machen haben, tragen nicht den Charakter mathematischer Strenge. Ihre anschaulich-physikalische Plausibilität und nicht zuletzt ihr einfaches Resultat müssen sie rechtfertigen.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall der Elektrostatik. Es sei R ein beliebiges, physikalisch kleines Raumgebiet im Innern eines ruhenden Dielektrikums. Die durch das äußere Feld auf die Ladungen im Gebiete R ausgeübte Kraft muß sich darstellen lassen als Resultante von Spannungen t_σ^ν in der Oberfläche von R. In einer ersten Ableitung der Kraftdichte suchen wir diese Spannungen anschaulich zu ermitteln.

Zum Spannungstensor des leeren Raumes:

$$\mathfrak{e}_\sigma \mathfrak{e}^\nu - \delta_\sigma^\nu \tfrac{1}{2} \mathfrak{e}^\alpha \mathfrak{e}_\alpha \quad \text{wo: } \delta_\sigma^\nu = \begin{cases} 0 \\ 1 \text{ für } \end{cases} \begin{matrix} \sigma \neq \nu \\ \sigma = \nu \end{matrix},$$

wie er durch den Mittelwert $\mathfrak{e}^\nu$ bzw. $\mathfrak{e}_\nu$ des Mikrofeldes ausgeübt werden wird, treten als neu hinzu die Kräfte, welche die außen am Gebiet R haftenden Polarisationsladungen im *äußeren* Felde erfahren. Sie werden durch die innermolekularen Bindungen der durch die Oberfläche von R zerschnittenen Moleküle auf das Gebiet R selbst übertragen. So sitzt bei

1) M. Abraham, Frage der Symmetrie des elektromagnetischen Spannungstensors. Ann. d. Phys. 44. p. 537. 1914.

2) A. Einstein u. J. Laub, Über die im elektromagnetischen Felde auf ruhende Körper ausgeübten ponderomotorischen Kräfte. Ann. d. Phys. 26. p. 541. 1908.

positiver äußerer Normale außen am Flächenelement df_ν die Ladung $p^\nu df_\nu$, und auf sie wirkt im *makroskopischen* Felde die Kraft $\epsilon_0 p^\nu df_\nu$. Der Spannungstensor des Vakuums wird also durch die Anwesenheit des Dielektrikums vermehrt um den Term $\epsilon_0 p^\nu$.

Die bis jetzt angestellte Überlegung ist falsch oder bedarf zum mindesten einer Ergänzung.

Makroskopisches Feld und äußeres Feld sind durchaus nicht identisch; denn entfernen wir das äußere Feld, halten aber den Polarisationszustand der Materie in R und seiner unmittelbaren Umgebung aufrecht, so verschwindet im allgemeinen der Mittelwert des Mikrofeldes nicht. Die noch verbleibende Differenz zwischen äußerem und makroskopischem Felde, das sogenannte Polarisationsfeld, ist aber nie im Stande die Materie in R in Bewegung zu setzen; denn zur Aufrechterhaltung des Polarisationszustandes bedürfen wir allerdings bloß vorstellbarer, aber *nur innerer* Kräfte. Der bisherige Ausdruck des Spannungstensors ist daher zu ergänzen durch einen Term ϑ_σ^ν, der den Kräften entspricht, die dasjenige äußere Feld, das das Polarisationsfeld gerade zu Null ergänzt, auf die Ladungen $p^\nu df_\nu$ ausübt. ϑ_σ^ν sind also Spannungen, die bei verschwindendem makroskopischem Felde die Materie in Folge des unverändert festgehaltenen Polarisationszustandes erfährt. Wir werden jetzt von ihnen beweisen, daß sie ein einfacher Druck sind.

Denken wir, die Materie in R sei vollkommen homogen und die Polarisation p^ν über das ganze Gebiet konstant. Dann ist die Energiedichte in allen Punkten dieselbe und die Gesamtenergie direkt proportional dem Volumen des Gebietes. Erteilen wir der Materie irgendeine virtuelle Verrückung, die weder den Polarisationszustand, noch das Volumen von R ändert, so bleibt dabei seine Gesamtenergie konstant. Da das makroskopische Feld Null vorausgesetzt wird, kommen zur äußeren Arbeitsleistung nur die in der Oberfläche von R wirkenden Spannungen ϑ_σ^ν in Betracht. Ihre Arbeit muß also bei beliebiger volumentreuer Variation des Gebietes verschwinden, was nur möglich ist für einen über das ganze Gebiet konstanten Druck $\vartheta_\sigma^\nu = \delta_\sigma^\nu p$. Wir schreiten zur Bestimmung seiner Größe p.

Das Polarisationsfeld im Element df_ν der Oberfläche von R hängt nicht nur vom Polarisationszustand an der betreffenden Stelle, sondern von Konfiguration und Zustand des ganzen Gebietes R ab. Diese Unbequemlichkeit veranlaßt uns *Änderungen* des Polarisationsfeldes und damit von p zu betrachten, und zwar solche, die eintreten infolge Variation der Zustandsgrößen an der betrachteten Stelle allein. Da langsame Veränderlichkeit der makroskopischen Zustandsgrößen über physikalisch kleine Gebiete eine wesentliche Voraussetzung dieser ganzen Arbeit ist, haben wir uns insbesondere auf *unendlich kleine* lokale Änderungen zu beschränken.

In diesem Sinne erteilen wir an der Stelle des Flächenelementes df_ν dem makroskopischen Felde den Zuwachs de_ϱ von gleicher Richtung wie der Vektor df_ν selbst. Die Polarisation ändere sich dabei um dp_ν und die früher berechnete, durch das makroskopische Feld allein erzeugte Spannung erleidet die Zunahme:

$$de_\varrho p^\nu df_\nu + e_\varrho dp^\nu df_\nu = d(e_\varrho p^\nu) df_\nu.$$

Die de_ϱ entsprechende Zunahme des äußeren Feldes machen wir wieder rückgängig und haben, um den Zuwachs dp^ν der Polarisation aufrecht zu erhalten, gewisse, bloß vorstellbare, innermolekulare Kräfte anzubringen, die im Element df_ν eine Spannung i_ϱ^ν ergeben. Kompensieren wir endlich auch die de_ϱ entsprechende Zunahme des Polarisationsfeldes, so haben wir, um die Polarisation wiederum konstant zu halten, die fiktiven Spannungen i_ϱ^ν nach Definition des Druckes $\delta_\varrho^\nu p$ zu vermehren um $\delta_\varrho^\nu dp$. Schalten wir nun de_ϱ von neuem zu, so erkennen wir, daß bei der speziellen Wahl der relativen Richtung von de_ϱ und df_ν die dadurch auftretende Spannung $p^\nu de_\varrho$ gerade $i_\varrho^\nu + \delta_\varrho^\nu dp$ Gleichgewicht hält. i_ϱ^ν ist hervorgegangen aus bloß inneren Kräften, ergibt also für jedes endliche Stück Materie die Resultante null, so daß wir für unsere Zwecke setzen dürfen:

$$\delta_\varrho^\nu dp + de_\varrho p^\nu = 0$$

woraus, eingedenk der gleichen Richtung von df_ν und de_ϱ, folgt:

$$dp = -p^\varrho de_\varrho$$

und aus dieser von der speziellen Wahl des Flächenelementes unabhängigen Beziehung folgt der Druck selbst:

$$p = -\int_0^{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}^\alpha \, d\mathfrak{e}_\alpha .$$

Das Integral ist zu erstrecken vom Polarisationszustand Null bis zum tatsächlich vorhandenen Werte des Feldes und zwar über die Folge von Zuständen, wie sie von der Materie tatsächlich durchlaufen wurde.

Damit erhalten wir definitiv als elektrostatischen Spannungstensor:

$$t_\sigma^\nu = \mathfrak{e}_\sigma (\mathfrak{e}^\nu + \mathfrak{p}^\nu) - \delta_\sigma^\nu \int_0^{\mathfrak{e}} (\mathfrak{e}^\alpha + \mathfrak{p}^\alpha) \, d\mathfrak{e}_\alpha$$

oder nach Einführung des Vektors Verschiebung:

$$\mathfrak{d}^\nu = \mathfrak{e}^\nu + \mathfrak{p}^\nu ,$$

$$t_\sigma^\nu = \mathfrak{e}_\sigma \mathfrak{d}^\nu - \delta_\sigma^\nu \int_0^{\mathfrak{e}} \mathfrak{d}^\alpha \, d\mathfrak{e}_\alpha .$$

Eine zweite Ableitung, die sich noch enger an die Arbeit von Einstein und Laub anschließt, mag das Resultat in anderem Lichte zeigen.

Die Kraft $\mathfrak{K}_\sigma$ auf das Gebiet R stimmt bis auf physikalisch kleines höherer Ordnung überein mit der Kraft auf das Gebiet R', das alle die, aber auch nur die Moleküle vollständig enthalte, die bei irgendeinem Polarisationszustand dem Gebiete R ganz oder teilweise angehören. Die Oberfläche von R' schneidet also keine innermolekularen Bindungen.

$\mathfrak{K}_\sigma$ ist also die Resultante der Kräfte, die das äußere Feld auf die Ladungen in R' direkt ausübt. Zu ihrer Bestimmung entwickeln wir das makroskopische Feld in eine Reihe

$$\mathfrak{e}_\sigma = \mathfrak{e}_\sigma|_0 + \frac{\partial \mathfrak{e}_\sigma}{\partial x^\nu} x^\nu .$$

Im Koordinatenursprung, den wir mitten ins Gebiet R' hinein verlegen, hat das Feld den Wert $\mathfrak{e}_\sigma|_0$. Der zweite Term berücksichtigt seine langsame, in erster Annäherung

lineare Veränderlichkeit über R'. Betrachten wir zunächst — wie wir wissen mit Unrecht — makroskopisches und äußeres Feld als identisch, so wird

$$\mathfrak{K}_\sigma = \mathfrak{e}_\sigma / _0 \int_{R'} \varrho \, dV + \frac{\partial \mathfrak{e}_\sigma}{\partial x^\nu} \int_{R'} \varrho \, x^\nu \, dV .$$

Für die der wahren Ladungsdichte ϱ_w angehörende Elektrizität ist das erste Integral $= \varrho_w \cdot R'$ und das zweite gleich Null. Bei Integration über die in ihrer Summe Null ergebenden Ladungen der Moleküle wird dagegen das erste zu Null und das zweite nach Definition der Polarisation $= \mathfrak{p}^\nu \cdot R'$, so daß wir vorläufig als Kraftdichte erhalten

$$\varkappa_\sigma = \frac{1}{R'} \mathfrak{K}_\sigma = \mathfrak{e}_\sigma \varrho_w + \frac{\partial \mathfrak{e}_\sigma}{\partial x^\nu} \mathfrak{p}^\nu .$$

Erinnern wir uns jetzt des Unterschiedes zwischen makroskopischem und äußerem Felde, so erkennen wir, daß auch dieser Ausdruck zu ergänzen ist durch die oben berechnete Druckkraft, für die ich leider bis jetzt eine einfachere und unmittelbarere Ableitung nicht zu geben vermag. Die elektrostatische Kraftdichte wird also endgültig

$$\varkappa_\sigma = \mathfrak{e}_\sigma \varrho_w + \frac{\partial \mathfrak{e}_\sigma}{\partial x^\nu} \mathfrak{p}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \int_0^{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}^\sigma \, d\mathfrak{e}_\sigma \right\}$$

oder wegen der Feldgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{e}^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathfrak{p}^\nu}{\partial x^\nu} = \varrho_w .$$

$$\varkappa_\sigma = \mathfrak{e}_\sigma \frac{\partial \mathfrak{e}^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \mathfrak{e}_\sigma \mathfrak{p}^\nu - \delta_\sigma^\nu \int_0^{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}^\sigma \, d\mathfrak{e}_\sigma \right\} .$$

Da der erste Term sich in bekannter Weise als Divergenz der Maxwellschen Spannungen im leeren Raume schreiben läßt, ist die Identität mit dem ursprünglichen Resultate nachgewiesen.

Damit verlassen wir das Gebiet der Elektrostatik und gehen über zur Berechnung der Kraftdichte bzw. des Impulsenergietensors im allgemeinen Falle eines beliebigen, raumzeitlich veränderlichen elektromagnetischen Feldes im Innern

elektrisch und magnetisch polarisierbarer Materie. Wir können uns kurz fassen; denn sie macht sich durch fast wörtliche Übertragung der vorstehenden Überlegungen aus dem dreidimensionalen Raum in die vierdimensionale Welt. So treten zum Impulsenergietensor im leeren Raum

$$F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

in der Oberfläche des beliebigen, physikalisch kleinen Weltgebietes G als neu hinzu die Kräfte

$$F_{\sigma\mu} M^{\mu\nu} df_\nu,$$

die das makroskopische Feld auf die außen am Element df_ν haftenden Polarisationsladungen ausübt. Wegen des Unterschiedes von makroskopischem und äußerem Felde — im Fall der Magnetostatik tritt er besonders klar zutage — sind sie zu ergänzen durch Spannungen Θ_σ^ν, von denen, durch die vollkommen entsprechende Variationsbetrachtung wie oben, an einem Weltgebiet und der in ihm beschlossenen Wirkungsgröße bewiesen wird, daß sie einen einfachen Druck $\Theta_\sigma^\nu = \delta_\sigma^\nu p$ bedeuten. Die Übertragung der Berechnung von p für das elektrostatische Feld auf den Fall der Magnetostatik, die Superposition der zwei Spezialfälle zum allgemeinen des elektromagnetischen Feldes und endlich die Formulierung des Resultates im vierdimensionalen Kalkül ergeben

$$p = \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta}.$$

Die kleinen Buchstaben $m_{\cdot\cdot}^{\alpha\beta}$ und $f_{\alpha\beta}$ von Polarisation und Feld sollen daran erinnern, daß sie hier laufende Größen bedeuten und die wirklich vorhandenen Zustandsgrößen $M^{\alpha\beta}$ und $F_{\alpha\beta}$ nur als obere Grenze des Integrals auftreten. Integrationsweg ist wieder die Folge von Zuständen wie sie die Materie tatsächlich durchlaufen hat.

Der Impulsenergietensor wird jetzt endgültig

$$(8) \qquad \boxed{T_\sigma^\nu = F_{\sigma\mu} (F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) + \delta_\sigma^\nu \frac{1}{2} \int_0^F (f^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}) df_{\alpha\beta},}$$

oder nach Einführen des Tensor Verschiebung $D^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}$

$$T_\sigma^\nu = F_{\sigma\mu} D^{\mu\nu} + \delta_\sigma^\nu \frac{1}{2} \int_0^F d^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Die Kraftdichte $\varkappa_\sigma$ folgt aus ihnen im allgemeinen Fall zu

$$\sqrt{g}\,\varkappa_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \{\sqrt{g}\, T_\sigma^\nu\} - \left\{ {\alpha \atop \sigma\beta} \right\} \sqrt{g}\, T_\beta^\alpha ,$$

wo g die negative Determinante der Gravitationspotentiale und das Christoffelsche Dreiindizessymbol $\left\{ {\alpha \atop \sigma\beta} \right\}$ die negative Gravitationskraft bedeuten. Für verschwindendes Schwerefeld reduziert sie sich auf

$$\varkappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x^\nu} \tag{10}$$

und nur in dieser speziellen Gestalt wird sie uns in der Folge noch beschäftigen.

Von T_σ^ν spaltet sich in natürlicher Weise der Tensor des leeren Raumes ab. Der ihm entsprechende Anteil der Kraftdichte läßt sich bekanntlich umformen zu

$$F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} ,$$

so daß mit Benützung der Feldgleichung (IIb) $\varkappa_\sigma$ sich schreiben läßt

$$= F_{\sigma\mu} J^\mu + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} M^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\} .$$

Das Induktionsgesetz (IIc) vermittelt die Beziehung

$$\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} M^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} M^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} ,$$

so daß die Kraftdichte in der bemerkenswerten Gestalt erscheint

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^\mu - \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^F m^{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} \right\}. \tag{11}$$

Kapitel IV. Diskussion der Resultate des vorausgehenden Kapitels.

Welches sind die *Gültigkeitsgrenzen* des aufgestellten Impulsenergietensors?

Wie schon erwähnt, eine wesentliche Voraussetzung dieser Arbeit ist die langsame Veränderlichkeit der makroskopischen Zustandsgrößen Feld und Polarisation über physikalisch kleine Weltgebiete.

Ferner muß die Möglichkeit der scharfen Trennung von Polarisationsstrom und wahrem Strome gegeben sein, d. h. Geltung der Bedingung (2).

Dem letzten Kapitel liegt unausgesprochen die Annahme zugrunde, daß die Zahl der Moleküle in einem zur Materie ruhenden Raumvolumen sich während des Polarisierens nicht ändere. Trifft das nicht zu, d. h. variiert der elastische Verzerrungszustand der Materie, so bleibt der aufgestellte Tensor gültig, sofern wir die aus ihm folgende Kraftdichte nicht auf die Volumeneinheit, sondern stets auf die im unverzerrten Zustand in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle beziehen und, sofern wir zur Kraftdichte die durch die elastische Verzerrung mitbestimmten Striktionskräfte beifügen. Auf sie wollen wir hier nicht eingehen.

Diese Einschränkungen zugegeben, kann die Materie im übrigen beliebig beschaffen sein; insbesondere gilt der Tensor für amorphe, wie kristallisierte Körper, für Ferromagnetika mit und ohne Hysterese, ja selbst für dispergierende Medien, was allerdings von geringer Bedeutung ist, da Dispersion erst bei Feldfrequenzen aufzutreten pflegt, die außerhalb der Forderung langsamer Veränderlichkeit über physikalisch kleine Weltgebiete liegen.

Zum bequemen *Vergleich mit den früheren Arbeiten* über denselben Gegenstand spalten wir bei ruhender Materie nach Raum und Zeit und notieren im folgenden Schema die Ruhkomponenten des Tensors in dreidimensionaler Vektoranalysis:

$$T_\sigma^\nu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline e_x b_x + \mathfrak{h}_x \mathfrak{b}_x - \int_0^e \{(\mathfrak{b}, de) + (\mathfrak{b}, d\mathfrak{h})\} & e_x b_y + \mathfrak{h}_x \mathfrak{b}_y & e_x b_z + \mathfrak{h}_x \mathfrak{b}_z & -[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]_x \\ \hline e_y b_x + \mathfrak{h}_y \mathfrak{b}_x & e_y b_y + \mathfrak{h}_y \mathfrak{b}_y - \int_0^e \{(\mathfrak{b}, de) + (\mathfrak{b}, d\mathfrak{h})\} & e_y b_z + \mathfrak{h}_y \mathfrak{b}_z & -[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]_y \\ \hline e_z b_x + \mathfrak{h}_z \mathfrak{b}_x & e_z b_y + \mathfrak{h}_z \mathfrak{b}_y & e_z b_z + \mathfrak{h}_z \mathfrak{b}_z - \int_0^e \{(\mathfrak{b}, de) + (\mathfrak{b}, d\mathfrak{h})\} & -[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]_z \\ \hline [e, \mathfrak{h}]_x & [e, \mathfrak{h}]_y & [e, \mathfrak{h}]_z & \int_0^e \{(e, d\mathfrak{b}) + (\mathfrak{h}, d\mathfrak{b})\} \\ \hline \end{array}$$

Für lineare Abhängigkeit der Polarisation vom Felde degeneriert T_σ^ν zum Tensor von Minkowski.[1]) Die elektrostatischen Spannungen sind identisch mit den Ausdrücken, wie sie Cohn[2]) durch Variation der Energiedichte $\int_0^e (e, d\mathfrak{b})$ gefunden hat. Energiedichte und Energieströmung treten auf, wie wir es verlangen müssen.

Es fällt in die Augen, wie weitgehend die alte Hertzsche Symmetrie der Feldgrößen $\{e, \mathfrak{h}\}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{b}\}$ sich behauptet. Würden nicht der eigentümlich verschiedene Kovarianzcharakter der beiden Maxwellschen Gleichungssysteme und die elektronentheoretische Deutung so entschieden für die Abrahamsche Symmetrie $\{e, \mathfrak{b}\}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}\}$ sprechen, man wäre versucht, beim Anblick des aufgestellten Impulsenergietensors von neuem der Hertzschen den Vorzug zu geben.

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der *Asymmetrie* des Impulsenergietensors.

Daß der gemischte Tensor T_σ^ν asymetrisch ist, kann uns nicht wundern; allein auch die rein kovarianten, bzw. kontravarianten

$$T_{\sigma\nu} = g_{\nu\alpha} T_\sigma^\alpha \quad \text{und}$$
$$T^{\sigma\nu} = g^{\sigma\alpha} T_\alpha^\nu$$

sind es.

1) H. Minkowski, a. a. O.
2) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld (Hirzel 1900).

Der mathematische Ausdruck dafür ist die Existenz des Differenztensors

$$\Delta^{\sigma\nu} = T^{\sigma\nu} - T^{\nu\sigma} = F_\mu{}^\sigma M^{\mu\nu} - M_\mu{}^\sigma F^{\mu\nu}.$$

Seine räumlichen Ruhkomponenten

$$[\mathfrak{e}, \mathfrak{p}] + [\mathfrak{m}, \mathfrak{b}] = (\Delta^{32}, \Delta^{13}, \Delta^{21})$$

bedeuten bekanntlich das auf die Volumeneinheit der Materie ausgeübte Drehmoment und seine zeitlichen

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{p}] + [\mathfrak{m}, \mathfrak{e}] = (\Delta^{41}, \Delta^{42}, \Delta^{43})$$

den Überschuß der Impulsdichte über den Energiestrom.

Das scheint bedenklich, wenn man sich vergegenwärtigt, welche Bedeutung der Gleichheit von Impulsdichte und Energiestrom, als dem mathematischen Ausdruck für die Trägheit der Energie, wie für den energetischen Ursprung aller trägen Masse, innewohnt. Einwände, die von dieser Seite gegen den aufgestellten Tensor gemacht werden, ist entgegen zu halten, daß die eigentlichen und strengen Naturgesetze die Mikrogesetze sind. Durch ihre unter gewissen Voraussetzungen [hier insbesondere Gleichung (2)] errechneten Mittelwerte, werden sie natürlich nicht angetastet.

Es bleibt aber weiter zu erläutern, wie aus einem symmetrischen Tensor durch Ausüben des Prozesses der Mittelung (1) ein asymmetrischer entstehen kann. Hierzu das Folgende: T_σ^ν beansprucht garnicht der durch (1) definierte strenge Mittelwert des symmetrischen Mikrotensors zu sein, ist es sogar sicher nicht, denn im unpolarisierten Zustand entspricht dem Mikrofelde, obschon sein Mittelwert verschwindet, doch eine von Null verschiedene und daher niemals durch makroskopische Zustandsgrößen ausdrückbare Energiedichte.

Die Frage endlich, ob T_σ^ν wenigstens den Zuwachs darstellt, den der Mittelwert des Mikrotensors durch das Polarisieren erleidet, lassen wir offen; denn es ist sehr wohl möglich, daß die Symmetrieeigenschaften von Tensorkomponenten, die sich über das physikalisch kleine Mittelungsgebiet derart wild ändern, wie das beim Mikrotensor des elektromagnetischen Feldes der Fall ist, dem Mittelwerte nicht erhalten bleiben.

Daß beispielsweise ein physikalisch kleines Stück eines Kristalles in einem elektrischen Felde ein Drehmoment erfährt, obschon das für ein unendlich kleines Gebiet nicht zutrifft, kommt nur daher, daß schon im einzelnen Molekül entgegengesetzte Ladungen vorhanden sind, die Ladungsdichte ϱ also eine in dem physikalisch kleinen Stück unzählige Male zwischen positiven und negativen Werten hin- und herspringende Funktion darstellt.

T_σ^ν ist daher für uns nichts anderes als der Tensor, den man ansetzen muß, um die richtige Kraftdichte zu erhalten.

Zur *Diskussion der Kraftdichte* selbst stützen wir uns auf Gleichung (11). Der erste Term ist die Kraft auf den wahren Strom. Die zwei anderen sind Kräfte auf die polarisierbare Materie. Im allgemeinen, d. h. bei Anwesenheit von Hysterese hängt das Integral

$$\int_0^P m^{\alpha\beta}\, df_{\alpha\beta}$$

vom Integrationsweg ab. Für hysteresefreie Medien ist dagegen $m^{\alpha\beta}\, df_{\alpha\beta}$ ein exaktes Differential, was z. B. für anisotrope, linear polarisierbare Dielektrika zu den bekannten Integrabilitätsbedingungen

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon^{ki}$$

führt, wo die ε^{ik} die durch

$$b^i = \varepsilon^{ik} e_k$$

definierten Dielektrizitätskonstanten bedeuten. Der Wert des Integrals ist also durch die Grenzen allein bestimmt, und wir sind imstande, seinen Gradienten auszudifferenzieren:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left\{\frac{1}{2}\int_0^P m^{\alpha\beta}\, df_{\alpha\beta}\right\} = \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{1}{2}\int_0^P \frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\, df_{\alpha\beta}.$$

Der erste Term rührt her vom Gradienten des Feldes, der zweite allein vom Gradienten der eindeutig vorausgesetzten Abhängigkeit der Polarisation vom Felde. Die Kraftdichte nimmt also für hysteresefreie Medien die ganz einfache Gestalt an:

$$(12) \qquad \boxed{\varkappa_\alpha = F_{\alpha\mu} J^\mu + \frac{1}{2} \int_0^P \frac{\partial m^{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} df_{\alpha\beta}.}$$

Abgesehen vom wahren Strom erfährt also ein hysteresefreies Medium in einem beliebigen elektromagnetischen Felde außer Drehmomenten nur da Kräfte, wo die funktionelle Abhängigkeit der Polarisation vom Felde einen Gradienten zeigt; also insbesondere ein homogener Körper nur in seiner Oberfläche, und zwar senkrecht zu ihr. Das ist ein Resultat, das bei einer Impulsdichte $[\mathfrak{e}, \mathfrak{h}]$ statt $[\mathfrak{d}, \mathfrak{b}]$ niemals erfüllt wäre, und hier müßte der Experimentator einsetzen, der hierüber den allerdings schwer zu führenden praktischen Entscheid für nötig hält.

Für isotrope Körper, deren Materialgleichungen durch

$$\mathfrak{d} = \varepsilon \mathfrak{e}$$

und

$$\mathfrak{b} = \mu \mathfrak{h}$$

gegeben seien, wo die Dielektrizitäts„konstanten" raumzeitlich variabel, noch beliebige eindeutige Funktionen $\varepsilon(\mathfrak{e})$ und $\mu(\mathfrak{b})$ des Feldes bedeuten, nehmen die Ruhkomponenten der Gleichung (12) die bekannten, hier aber mit erweitertem Gültigkeitsbereich auftretenden Werte an:

$$\varkappa_{1,2,3} = [\mathfrak{i}, \mathfrak{b}] + \varrho \mathfrak{e} - \int_0^{\mathfrak{e}} \operatorname{grad} \varepsilon(\mathfrak{e}, d\mathfrak{e}) - \int_0^{\mathfrak{b}} \operatorname{grad} \left(\frac{-1}{\mu}\right) (\mathfrak{b}, d\mathfrak{b})$$

$$\varkappa_4 = -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}) - \int_0^{\mathfrak{e}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} (\mathfrak{e}, d\mathfrak{e}) - \int_0^{\mathfrak{b}} \frac{\partial \left(-\frac{1}{\mu}\right)}{\partial t} (\mathfrak{b}, d\mathfrak{b}).$$

Die Leistungsdichte enthält außer dem Jouleschen Effekt $(\mathfrak{i}, \mathfrak{e})$ noch Glieder, die dann von Null verschieden sind, wenn ε und μ noch explizite von der Zeit abhängen, was z. B. da der Fall sein wird, wo sie beide Funktionen der Temperatur und diese sich mit der Zeit ändert.

Es ist das Resultat dieser Arbeit, nachgewiesen zu haben, daß man zur Lösung des elektromagnetischen Problems im groben (makroskopisch) im Innern ponderabler, bewegter Materie in jedem Weltpunkte außer dem wahren Viererstrom nur eine einzige, durch die Konfiguration der Mikroladungen allein bestimmte Größe, nämlich den durch Gleichung (IId) definierten Tensor der Polarisation in seiner Abhängigkeit vom Mittelwerte des Feldes, von Temperatur, elastischem Verzerrungszustand usw. kennen muß.

(Eingegangen 30. Oktober 1918.)

5. *Elektrische Zerstäubung von geschmolzenem Siegellack;*
von G. Quincke.

Um die elektrische Leitfähigkeit geschmolzener isolierender Substanzen nachzuweisen, dient gewöhnlich folgender Vorlesungsversuch. Man schmilzt über einer Flamme an das untere Ende eines dicken Metalldrahtes einen großen Siegellacktropfen und hängt den Metalldraht an den Konduktor einer kräftigen Elektrisiermaschine. Beim Drehen der Maschine entstehen normal zur Tropfenoberfläche 10, 20 oder mehr kegelförmige Spitzen nebeneinander, welche sich zu langen, dünnen, haarfeinen Fäden verlängern, gegenseitig abstoßen, in viele spitze oder runde Tropfen zerfallen, auf einem weißen Papierbogen aufgefangen werden und erstarren. Die geraden oder gewundenen Fäden haben vor der Erstarrung infolge der Oberflächenspannung Anschwellungen und Einschnürungen gebildet. An den äußeren Enden sind einzelne Tropfen oder kürzere und längere Fadenstücke mit Anschwellungen oder aneinander hängenden Tropfen abgeschleudert worden. Die Enden der Fäden und Fadenstücke sind zugespitzt oder Tropfen, deren Oberfläche glatt oder wieder mit einzelnen Fadenspitzen besetzt ist.

Die Formen wechseln mit Qualität, Temperatur, Viskosität und Erstarrungsgeschwindigkeit des Siegellackes und zeigen die durch elektrische Kräfte veränderten Formen von Schaumwänden I. und II. Art, ähnlich wie die elektrischen Staubfiguren.[1])

Ich bedeckte das untere Ende eines dicken Drahtes mit einer 2—3 cm langen Schicht von leichtflüssigem, geschmolzenem Siegellack, hing den Draht an die eine Elektrode einer Toeplerschen Influenzmaschine mit 20 rotierenden Scheiben[2]),

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 43. p. 452. 1914.
2) Aug. Toepler, Elektrotechn. Zeitschr. 3. p. 366. 1882.

während sehr lange Funken zwischen den Polkugeln übersprangen. Die abgeschleuderten erstarrenden Siegellackfäden wurden mit einem Papierblatte aufgefangen. An der Oberfläche des geschmolzenen Siegellacks entstanden parallel der Drahtachse neben- und übereinander dünne, durchsichtige Bänder von gleichförmiger Dicke, von 5—8 mm Breite und 40 mm Länge, deren vorderer Teil zylindrisch gekrümmt und am Ende zusammengebogen war, eine Röhre bildete und in einen langen, dünnen Faden mit Anschwellungen und spitzem Kopfe auslief. Von diesem Faden waren wieder kleine Tropfen und kürzere Stücke mit Anschwellungen abgeworfen.

Ein isolierter, horizontaler Messingdraht von 60 × 8 mm trug an einem Ende eine Kugel und war am anderen abgerundeten Ende mit geschmolzenem, leichtflüssigem Siegellack überzogen. Vom positiven Pole einer Holtzschen Influenzmaschine, deren anderer Pol geerdet war, ließ ich Funken von 10 mm Schlagweite nach dem Kugelende des Messingdrahtes überschlagen. Die von der Oberfläche des flüssigen Siegellacks abgeschleuderten kegelförmigen Fäden, welche in lange, dünne, haarfeine Fäden mit Anschwellungen ausliefen, wurden auf einem Papierblatte aufgefangen. Unter dem Polarisationsmikroskop zeigten die erstarrten Fäden undurchsichtige massive Fäden mit Anschwellungen, oder dünne, durchsichtige, doppeltbrechende Bänder mit dicken, rauhen, undurchsichtigen Rändern und Querleisten. An der Oberfläche der Fäden und Bänder waren in nahezu gleichen Abständen voneinander kleine, runde Kugeln eingeschmolzen oder sehr feine, gerade und gewundene Fäden abgeschleudert mit kleinen Anschwellungen oder Kugeln am Ende (vgl. Fig. 1, *a—f*).

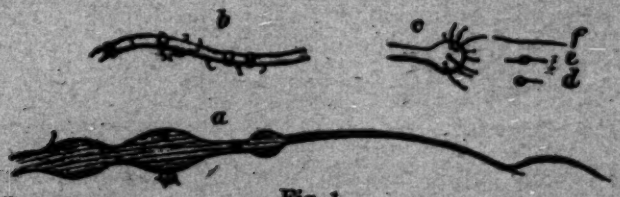


Fig. 1.

Mit den aufeinanderfolgenden Entladungs- und Ladungsfunken der Influenzmaschine wechselt periodisch an der Oberfläche und im Inneren des langsam erstarrenden Siegellackes

die Dichte der freien Elektrizität. Für einzelne Stellen besonders stark, von denen die elektrische zähe Flüssigkeit abgeschleudert wird in dünnen Lamellen oder Bändern oder kegelförmigen, spitz auslaufenden Fäden. Gleichzeitig werden durch die Oberflächenspannung die dünnen Bänder gekrümmt zu Zylinderflächen oder Röhren, und in den Fäden Anschwellungen, Einschnürungen, Kopftropfen, und durch die freie Elektrizität an der Oberfläche spitze Enden gebildet. Ist bei den folgenden Funken der Siegellack noch flüssig, so werden an den Fadenenden kürzere Strecken mit Anschwellungen und spitzen Enden oder aus der Seitenwand der Fäden, der Anschwellungen und der Kopftropfen neue Fäden abgeschleudert. Aus größeren Kopftropfen wurden wieder kleinere Fäden mit spitzen Enden und Anschwellungen oder durchsichtige Bänder mit Längs- und Querleisten durch elektrische Kräfte abgestoßen. Bei genügend hoher Temperatur zerfallen die abgeschleuderten Fäden durch Oberflächenspannung in einzelne runde Tropfen, ehe der Siegellack erstarrt.

Der rote Siegellack besteht aus Schellack oder Harzen mit Beimengungen fester, pulverförmiger Substanzen, Zinnober, Mennige, Eisenoxyd, Schlemmkreide, Gips usw. Die freie Elektrizität an der Grenzfläche der festen Teilchen und des flüssigen Harzes treibt diese Fremdstoffe nach den Rändern der abgeschleuderten Bänder und bildet die undurchsichtigen Rand- und Querleisten, wobei die durchsichtigere, zähe Flüssigkeit gezerrt, gedehnt und doppeltbrechend wird, und erstarrt. Wahrscheinlich ist die rauhe Oberfläche der Rand- und Querleisten mit vielen kleinen, unsichtbaren Spitzen besetzt.

Die spitzen Fadenenden beweisen, daß der abgeschleuderte Siegellack flüssig und elektrisch war, als er erstarrt ist. Man hat also anzunehmen, daß die freie Elektrizität von flüssigem Siegellack fortgeleitet wird und daß die freie Elektrizität den Siegellack länger flüssig erhalten hat, oder mit anderen Worten:

Der flüssige Siegellack ist ein Leiter der Elektrizität. Der elektrische Siegellack hat einen niedrigeren Schmelzpunkt als unelektrischer, oder Siegellack wird beim Elektrischwerden erwärmt und geschmolzen. Beides ist möglich, sobald die Elektronen mit dem Siegellack unter Wärmeentwicklung eine chemische Verbindung oder Lösung bilden.

Mit Flaschenströmen elektrisch zerstäubte Metalldrähte zeigen ähnliche Erscheinungen wie elektrisch zerstäubter Siegellack, und bilden unter dem gleichzeitigen Einflusse der elektrischen Kräfte und der Oberflächenspannung abgeschleuderte Splitter und Emanationen mit ähnlichen Formen wie elektrisch zerstäubter, geschmolzener Siegellack. Die Formen der abgeschleuderten elektrischen Metallsplitter gestatten dieselben Schlußfolgerungen wie die abgeschleuderten elektrischen Siegellackfäden und bestätigen meine Ansichten über die Schaumstruktur der Metalle[1]), wie ich in einer folgenden Mitteilung zeigen werde.

Heidelberg, den 28. Oktober 1917.

---

1) G. Quincke; W. Guertler, Internationale Zeitschrift für Metallographie 3. p. 23—36, 79—101, 303—304. 1912.

(Eingegangen 24. Oktober 1918.)

6. *Theoretisches über den Starkeffekt in der Fowlerschen Heliumserie;* von *Paul S. Epstein.*

§ 1. *Einleitung.* — Neben der Balmerserie des Wasserstoffs sind die von Pickering und Fowler gefundenen, von Bohr dem ionisierten Helium[1]) zugeordneten Serien die einzigen, deren Entstehen uns vom Standpunkte der Bohrschen Theorie[2]) in allen Einzelheiten klar ist. Das einfach ionisierte Heliumatom ist nämlich vollständig „wasserstoffähnlich": es besteht aus einem Kern und einem einzigen Elektron und erfüllt damit die Voraussetzungen sowohl der Sommerfeldschen Theorie der Feinstrukturen[3]) als auch der vom Verfasser gegebenen Theorie des Starkeffektes[4]), und in der Tat haben die Paschenschen Messungen an diesen Heliumlinien für die Prüfung und Bestätigung der ersteren eine grundlegende Rolle gespielt.

Neuerdings liegen auch Messungen über den *Starkeffekt* an Linien der Fowlerserie

$$(1) \qquad \nu = N\left\{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^2}\right\}, \qquad m = 4, 5, 6, \ldots.$$

1) Hr. J. Stark bezeichnet diese Serien als die des *doppelt* ionisierten Heliums. Vom Standpunkte der Quantentheorie ist dies insofern gerechtfertigt, als die Vorbedingung für das Leuchten eines Atoms darin besteht, daß sich das Elektron nicht mehr in der Normallage befindet, sondern in eine äußere Bahn bzw. ins Unendliche entfernt ist. Während des Leuchtvorganges selbst fällt aber diesem Elektron gerade die wesentliche Rolle zu, so daß es unzweckmäßig wäre, es als außerhalb des Atomverbandes stehend zu bezeichnen. In diesem Sinne sagen wir, daß die Träger der Fowlerserie *einfach* ionisiert sind, und folgen damit dem in der Quantentheorie eingebürgerten Sprachgebrauche.

2) N. Bohr, Phil. Mag. **26**. p. 1. 476 u. 857. 1913.

3) A. Sommerfeld, Münch. Ber. p. 459. 1915; Ann. d. Phys. **51**. p. 1, 125. 1916.

4) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **50**. p. 489. 1916. — Diese Arbeit wird im folgenden mit l. c. zitiert.

vor. Nachdem Evans und Croxson[1]) im elektrischen Felde eine Verbreiterung der Grundlinie ($m = 4$; 4686 Å) gefunden hatten, konnte Nyquist[2]) eine Aufspaltung derselben erhalten und ausmessen. Nunmehr ist es J. Stark und seinen Mitarbeitern[3]) unter Überwindung großer experimenteller Schwierigkeiten gelungen, auch die Zerlegung der zweiten ($m = 5$; 3203 Å) und dritten ($m = 6$; 2788 Å) Linie dieser Serie zu beobachten.

Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist, die Prüfung der Quantentheorie an dem neuen wertvollen Material durchzuführen. Zunächst wird die Lage der elektrischen Komponenten in derselben Weise berechnet, wie dies l. c. für die ersten Linien der Balmerserie geschehen ist (§ 2). Das so gewonnene Bild der Aufspaltung gibt zwar bereits einige Züge der Beobachtungen wieder, läßt sich aber noch nicht im einzelnen mit denselben vergleichen, weil es sich um eine experimentelle *Grobzerlegung* handelt. Bei einer solchen gelangen schwächere Linien gelegentlich nicht zur Beobachtung, während mehrere starke eventuell zusammenfließen, so daß man als Maximum der Schwärzung auf der Platte nur ihren gemeinsamen Schwerpunkt feststellen kann. Daher genügt es für die Theorie nicht, die Lage der Komponenten zu bestimmen; man muß auch ihre relative Lichtstärke kennen. Glücklicherweise sind neuerdings von Bohr[4]) Gesichtspunkte entwickelt worden (§ 3), welche eine Berechnung der Intensitäten gestatten. Dementsprechend gestalten sich die nachstehenden Rechnungen auch zu einer Prüfung der hochwichtigen neuen Bohrschen Theorie, deren Hauptverdienst es ist, die Kluft zwischen den Auffassungen der Quantentheorie und der klassischen Elektrodynamik wesentlich verengert zu haben.

Es sei vorweggenommen, daß die Ergebnisse der Prüfung durchaus zugunsten der Theorie ausfallen. Der Vergleich mit

---

1) E. J. Evans and C. Croxson, Phil. Mag. **32**. p. 327. 1916.

2) H. Nyquist, Phys. Rev. **10**. p. 226. 1916.

3) J. Stark, O. Hardtke u. G. Liebert, Ann. d. Phys. **56**. p. 569. 1918. — Durch Hrn. Prof. Starks Freundlichkeit war mir diese Abhandlung schon in der Korrektur zugänglich.

4) N. Bohr, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Naturvidensk. Afd., 8. Raekke, IV. p. 1.

der Erfahrung bildet eine neue Stütze sowohl für die Theorie des Verfassers als für den neuen Bohrschen Standpunkt zur Intensitätsfrage.

§ 2. *Lage der Komponenten im Starkeffekt.* — Das Bild der elektrischen Zerlegung in der Fowlerserie wird durch die Formel l. c. (65) des Verfassers gegeben, in welcher für den zweiwertigen Heliumkern $\varkappa = 2$ zu setzen ist:

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta\nu = \dfrac{3h}{16\pi^2\mu e c} E \cdot Z, \\ Z = (n_1 + n_2 + n_3)(n_1 - n_2) - (n_1 + n_2 + n_3)(n_1 - n_3). \end{cases}$$

Dabei bedeutet h das Plancksche Wirkungsquantum, e die Ladung und μ die Masse des Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit und E die Stärke des angelegten elektrischen Feldes. Die Summen der Quantenzahlen betragen für die Fowlerserie

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3, \quad m_1 + m_2 + m_3 = 4, 5, 6, \ldots$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte der Konstanten h, μ, e, c erhält man, wenn E in Volt/cm gemessen wird, in der Skala der Wellenlängen λ

$$(3)\qquad \Delta\lambda = 3{,}21 \,.\, 10^{-5} \lambda^2 E \,.\, Z \text{ cm}.$$

Das ergibt für die drei von Stark untersuchten Linien bei der Feldstärke $E = 100000$ Volt/cm:

$\lambda = 4686$ Å	$\Delta\lambda = 0{,}70 \cdot Z$ Å
3203	0,33
2733	0,24

Da die Formel (2) im Falle der Balmerserie zuviel Komponenten ergab, mußten wir ein *Auswahlprinzip* zu Hilfe nehmen und benutzten als solches die Sommerfeldschen Quantenungleichungen:

$$(4)\qquad m_1 > n_1, \quad m_2 > n_2, \quad m_3 > n_3.$$

Setzt man dieselben Ungleichungen auch als in der Fowlerserie gültig voraus, so ergeben sich in der l. c. geschilderten Weise die folgenden symmetrischen Zerlegungen, von denen wir nur die positiven Komponenten angeben:

Linie 4686

	$Z = 7$	6	5	4	3	2	1	0	
p:	$\Delta\lambda = 4{,}9^{**}$	4,2	3,5	2,8	2,1	1,4	$0{,}7^{*}$	—	Å
s:	$\Delta\lambda =$ —	—	—	—	$2{,}1^{*}$	1,4	0,7	0	„
							36^{*}		

Mit einem Stern sind die Komponenten bezeichnet, bei deren Entstehen die sehr wenig wahrscheinlichen Pendelbahnen (l. c.) mitwirken, weshalb sie nur mit sehr geringen Intensitäten auftreten können. Zwei Sterne bedeuten, daß sowohl die Anfangs- als die Endbahn unter diese Kategorie fallen.

Die Beobachtung durch Nyquist ergab für diese Linie Intensitätsmaxima bei

$$p: \quad \Delta\lambda = 3{,}2 \text{ Å}, \qquad s: \quad \Delta\lambda = 0 \text{ Å}.$$

Linie 3203

	$Z =$	16	14	12	11	10	9	8	7	6	5
p:	$\Delta\lambda =$	5,3**	4,6	4,0	—	3,3	—	2,6	—	2,0	—
s:	$\Delta\lambda =$				3,6*	—	3,0	—	2,3	—	1,6

4	3	2	1	0
1,3	—	0,66	—	0 Å
—	1,0	—	0,33	—

Nach Messungen von J. Stark und seinen Mitarbeitern:

$$p: \quad \Delta\lambda = 3{,}8 \text{ Å}, \qquad s: \quad \Delta\lambda = 1{,}9 \text{ Å}.$$

Linie 2738

	$Z =$	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
p:	$\Delta\lambda =$	6,5**	5,8	5,0	4,3	3,6	2,9	2,2	1,4	0,72	0
s:	$\Delta\lambda =$			5,0*	4,3	3,6	2,9	2,2	1,4	0,72	0

Beobachtet wurde:

p:	$\Delta\lambda =$	5,1		1,2	Å
s:	$\Delta\lambda =$		3,7	0	„

Die Erfahrungen an der Balmerserie legen die Annahme nahe, daß in den p-Serien die äußersten Komponenten (ohne Stern) die stärksten sind, deren Lage das gemessene Schwärzungsmaximum ungefähr entsprechen muß. Innerhalb der Genauigkeit der Messungen, welche Stark mit 25 Proz. angibt, ist dies auch in der Tat der Fall. Bezüglich der s-Komponenten sind die Ergebnisse insofern befriedigend, als die Nullage wirklich nur in den beiden Linien beobachtet wurde, in welchen sie nach der Theorie auftreten muß.

Indessen läßt sich, wie schon in der Einleitung hervorgehoben, ein eingehender Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung nur an der Hand der Intensitäten durchführen. Der Verfasser hatte l. c. für die Intensitätsverteilung die beiden folgenden Regeln aufgestellt: 1. Die zu Pendelbahnen

gehörigen (mit Sternen versehenen) Komponenten sind durchweg sehr schwach. 2. Vorbedingung für das Auftreten großer Intensitäten ist, daß eine der Quantendifferenzen $Q_1 = m_1 - n_1$ oder $Q_2 = m_2 - n_2$[1]), durch welche der betreffende Bohrsche Übergang gekennzeichnet ist, einen möglichst großen Wert erreicht (während die andere vermöge der Ungleichungen (4) positiv oder gleich Null bleibt). Die erste dieser Regeln, die ja durch die ausgezeichnete Stellung der Pendelbahnen von vornherein plausibel scheint, muß auch zur Ergänzung der weiter unten dargestellten Bohrschen Theorie beibehalten werden. Aber auch die zweite behält in gewissem Umfange ihre Gültigkeit, wenn man sie auf die p-Komponenten beschränkt: die größten Differenzen der Quantenzahlen spielen hier in der Tat für die Intensitätsfrage eine fundamentale Rolle, worauf wir noch in § 5 ausführlicher eingehen werden.

§ 3. *Die Bohrsche Theorie der Intensitäten.* — Bohr geht in seinen Überlegungen von dem Postulat aus, *daß im Gebiete großer Wellenlängen die Ergebnisse der Quantentheorie und Elektrodynamik übereinstimmen müssen.* Betrachten wir die bedingt periodische Bewegung eines Elektrons, so entsprechen bei Anwendung der Bohrschen Frequenzbedingung

$$\nu = A(m_1, m_2, m_3) - A(n_1, n_2, n_3) \tag{5}$$

auf Übergänge aus einer statischen Bahn (m_1, m_2, m_3) in eine andere (n_1, n_2, n_3) großen Wellenlängen große Werte der Quantenzahlen m und n, im Vergleiche zu denen die Differenzen Q_1, Q_2, Q_3 klein sind. Unter diesen Voraussetzungen muß uns nach dem Bohrschen Postulat Formel (5) genau dieselben Schwingungszahlen liefern, welche das Elektron bei seiner Bewegung in der Anfangs- oder Endbahn, die ja in der Grenze $m = n = \infty$ unendlich wenig voneinander abweichen, nach den Regeln der Elektrodynamik emittieren würde.

---

1) Ursprünglich war meine Meinung, daß auch der azimutalen Quantendifferenz $Q_3 = m_3 - n_3$ die gleiche Bedeutung zukomme. Es wurde aber bereits l. c. durch Einklammern angedeutet, daß diese eine Sonderstellung einnimmt. Für das Folgende scheidet der Wert von Q_3 als notwendige Bedingung großer Intensität aus, da nach Bohr (§ 5) Q_3 nur die Werte Null und ± 1 annehmen kann.

Welche Frequenzen sind aber nach der Elektrodynamik zu erwarten? Aus der Theorie der bedingt periodischen Bewegungen ist bekannt, daß der Zustand des Systems, also z. B. die jeweilige Entfernung s des Elektrons von einer festen Ebene, eine periodische Funktion von der Periodizität 2π geeignet gewählter Parameter, der sogenannten Winkelkoordinaten w_1, w_2, w_3 ist $\left(s = s(w_1, w_2, w_3)\right)$, welche sich ihrerseits in linearer Abhängigkeit von der Zeit t befinden:

$$w_h = \Omega_h t + \delta_h, \quad (h = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Eine periodische Funktion kann man aber stets in eine Fouriersche Reihe entwickeln

$$s = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_j \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k a_{ijk} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i w_1 + j w_2 + k w_3), \tag{7}$$

oder nach (6)

$$s = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_j \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k b_{ijk} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i \Omega_1 + j \Omega_2 + k \Omega_3) t.$$

Die Bewegung des Elektrons stellt sich also als Überlagerung von harmonischen Schwingungen der Frequenzen

$$2\pi \nu_\varrho = i \Omega_1 + j \Omega_2 + k \Omega_3 \tag{8}$$

dar, wo die Indizes alle möglichen positiven und negativen Werte (doch so, daß die Bedingung $\nu > 0$ erfüllt bleibt) durchlaufen.

Einen ganz ähnlichen Ausdruck kann man vom Standpunkte der Quantentheorie gewinnen. Dabei macht man von dem Umstande Gebrauch, daß die den Winkelkoordinaten kanonisch konjugierten Impulse u_i konstant sind. Und zwar sind es gerade diejenigen Unveränderlichen, welche dem Planckschen Wirkungsquantum h proportional gesetzt werden (Schwarzschildsche Fassung der Quantenbedingungen):

$$u_i = n_i \frac{h}{2\pi}.$$

Die Gesamtenergie oder Hamiltonsche Funktion A ist eine Funktion der Größen u_i allein und von den Winkelkoordinaten w_i unabhängig.[1]) Daher ist die Änderung, welche

1) Vgl. P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 168. 1916.

die Gesamtenergie beim Übergang von einer Bahn zu einer benachbarten erfährt

$$\Delta A = \sum_1^3 i \frac{\partial A}{\partial u_i} \Delta u_i .$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß man die Glieder zweiter und höherer Ordnung in Δu_i vernachlässigen kann, und das ist dann der Fall, wenn diese Differenzen gegen die Absolutwerte u_i klein sind, also im Bereiche langer Wellen. Nun gilt nach den kanonischen Gleichungen

$$\frac{d w_i}{d t} = \frac{\partial A}{\partial u_i} = \Omega_i ;$$

fassen wir dabei den Übergang von der statischen Bahn m_1, m_2, m_3 zur Bahn n_1, n_2, n_3 ins Auge, so ergibt dies zusammen mit den beiden vorangehenden Gleichungen

$$A(m_1, m_2, m_3) - A(n_1, n_2, n_3) = \frac{h}{2\pi} \sum_1^3 i (m_i - n_i) \Omega_i ,$$

und hieraus erhält man nach (5) für die Frequenz

$$(8') \quad 2\pi \nu_Q = (m_1 - n_1) \Omega_1 + (m_2 - n_2) \Omega_2 + (m_3 - n_3) \Omega_3 .$$

Da die Ausdrücke (8) und (8') übereinstimmen sollen, können nur diejenigen Quantendifferenzen vorkommen, welche den Indizes i, j, h der Reihe (7) entsprechen. *Ist einer der Koeffizienten a_{ijk} gleich Null, so ist auch der entsprechende Bohrsche Quantenübergang unmöglich.* Diese Forderung enthält ein *Auswahlprinzip*, welches die Sommerfeldschen Ungleichungen (4) teilweise ersetzen kann. Darüber hinaus verlangt das Bohrsche Postulat, daß die vom Standpunkte der Elektrodynamik und Quantentheorie übereinstimmend berechnete Wellenlängen auch übereinstimmende Polarisationen und Intensitäten aufweisen. *Die Lichtstärke einer Komponente wird daher durch den entsprechenden Koeffizienten a_{ijk} der Fourierzerlegung (7) gegeben* (bzw. durch dessen Quadrat).

Was die Polarisationen betrifft, so zeigt Bohr allgemein, daß in einem Systeme von axialer Symmetrie die parallel der Achse verlaufenden Schwingungen lediglich die azimutale Quantendifferenz $Q_3 = 0$ enthalten können, diejenigen senkrecht zur Achse die Differenzen $Q_3 = \pm 1$. Dasselbe Resultat

hat unabhängig auch Rubinowicz[1]) aus einem auf dem Studium der Impuls- und Energieverhältnisse basierenden Gesichtspunkte erhalten, der noch weniger Hypothetisches enthält als die dargelgte Bohrsche Theorie und bei Bohr gleichfalls kurz angedeutet wird. Verfasser hat bei der Untersuchung des Starkeffektes in der Balmerserie mit der Möglichkeit der Differenzen $Q_2 = 2, 3, 4$ gerechnet; es zeigt sich jedoch, daß keine Komponenten in Wegfall kommen, wenn man solche Übergänge ausschließt und sich auf $0, \pm 1$ beschränkt, wie wir es in § 6 sehen werden. Für die Theorie des Zeemaneffektes ist dieses allgemeine Ergebnis von Bohr und Rubinowicz von grundlegender Bedeutung, da es die von Sommerfeld[2]) und Debye[3]) gefundenen überzähligen Komponenten wegschafft; beim Starkeffekt gibt es eine Erklärung der vom Verfasser (l. c. p. 514) gefundenen Polarisationsregel.

§ 4. *Durchführung für den Starkeffekt.* — Wir wollen die in § 3 auseinandergesetzte allgemeine Methode im Falle des Starkeffektes im einzelnen durchführen. Zu diesem Zwecke fassen wir ein Elektron ins Auge, welches sich unter der Wirkung eines Coulombschen Kraftzentrums von der Ladung $+ \varkappa e$ und eines ihm überlagerten homogenen elektrischen Feldes bewegt. Dabei knüpfen wir an l. c. p. 495 an und benutzen auch die dort eingeführten Bezeichnungen. Durch die parabolischen Koordinaten ξ, η drücken sich die vom Nullpunkte parallel zum elektrischen Felde ($\mathfrak{F}_p$) und senkrecht zu demselben ($\mathfrak{F}_s$) aufgetragenen Strecken wie folgt aus

$$9) \qquad \mathfrak{F}_p = \tfrac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \qquad \mathfrak{F}_s = \xi\,\eta \sin\varphi,$$

oder wenn wir von der Transformation (l. c. p. 503)

$$10) \qquad \begin{cases} \xi^2 = \dfrac{e^2 \varkappa}{A}\left(\sigma_1 u + \dfrac{\varkappa + \beta}{2\varkappa}\right), \\ \eta^2 = \dfrac{e^2 \varkappa}{A}\left(\sigma_2 v + \dfrac{\varkappa - \beta}{2\varkappa}\right) \end{cases}$$

Gebrauch machen

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_p = \dfrac{e^2 \varkappa}{2A}\left(\sigma_1 u - \sigma_2 v + \dfrac{\beta}{\varkappa}\right), \\ \mathfrak{F}_s = \dfrac{e^2 \varkappa}{A}\sqrt{\left(\sigma_1 u + \dfrac{\varkappa + \beta}{2\varkappa}\right)\left(\sigma_2 v + \dfrac{\varkappa - \beta}{2\varkappa}\right)} \sin\varphi. \end{cases}$$

1) A. Rubinowicz, Physik. Zeitschr. 19. p. 445, 465. 1918.
2) A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 17. p. 491. 1916.
3) P. Debye, Phys. Zeitschr. 17. p. 507. 1916.

Dabei ist nach l. c. (45), (53), (55), (56) die Bedeutung der Buchstaben die folgende

$$(12)\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\sqrt{n_1(n_1+n_2)}}{n_1+n_2+n_3}, \qquad \sigma_2 = \dfrac{\sqrt{n_2(n_2+n_3)}}{n_1+n_2+n_3}, \\ A = \dfrac{2\pi^2 x^3 \mu e^4}{h^2} \dfrac{1}{(n_1+n_2+n_3)^2}, \quad \beta = \varkappa \dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2+n_3}, \quad \alpha = \dfrac{n_3 h}{2\pi\sqrt{\mu}}. \end{cases}$$

Wir haben nun $\mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_q$ zunächst durch die Konstanten der Bewegung auszudrücken, um diese später durch die Winkelkoordinaten zu ersetzen. Die Gleichungen der Bewegung sind nach l. c. (32) bis (34)

$$3\qquad \begin{cases} \int_{\xi_1}^{\xi} \dfrac{d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} - \int_{\eta_1}^{\eta} \dfrac{d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \beta, \\ \int_{\xi_1}^{\xi} \dfrac{1}{\sqrt{f_1(\xi)}} \dfrac{d\xi}{\xi^2} + \int_{\eta_1}^{\eta} \dfrac{1}{\sqrt{f_2(\eta)}} \dfrac{d\eta}{\eta^2} = \dfrac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}, \\ \int_{\xi_1}^{\xi} \dfrac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \dfrac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}(t-t_0).^1) \end{cases}$$

Im folgenden wollen wir uns auf die Betrachtung sehr schwacher elektrischer Felder beschränken und die Feldstärke gleich Null setzen. Das heißt, wir berücksichtigen das äußere Feld nur insofern, als durch dasselbe eine Richtung ausgezeichnet und die Auswahl der statischen Bahnen abgeändert wird, sehen aber von einer Beeinflussung der Bewegung durch dasselbe ab. Damit leisten wir auf die Untersuchung einer eventuellen Veränderung der Intensitätsverteilung bei Anwachsen des elektrischen Feldes Verzicht. Man muß aber im Auge behalten, daß die in § 3 dargelegte Theorie nur für den Grenzfall sehr großer Quantenzahlen streng gelten soll, während ihren Anwendungen auf die Verhältnisse der experimentell untersuchten Linien eine nur angenäherte Gültig-

1) L. c. habe ich als Grenzen der Integration 0 und ξ bzw. 0 und η angegeben. Hr. Geheimrat Planck machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß $\xi = 0$ und $\eta = 0$ imaginären Werten der Wurzeln entsprechen. In der dritten Gleichung ist der Faktor $1/\sqrt{\mu}$ ergänzt. — Zugleich sei ein anderer sinnstörender Schreibfehler berichtigt: l. c. in Formel (21) und (24) ist der Faktor $^1/_4$ zu streichen und dementsprechend in (22) $^1/_2$ statt $^1/_8$ zu schreiben.

keit zukommt. Andererseits beanspruchen auch die Angaben über die gemessenen Intensitäten keine große Genauigkeit, so daß es ungerechtfertigt wäre, eine unnötige Verfeinerung der Theorie durch eine starke Komplikation der Rechnungen zu erkaufen.

Im Grenzfall $E = 0$ erhalten die Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ nach l. c. (80) die Form

$$(14)\qquad \begin{cases} f_1(\xi) = \sqrt{2e^2(\varkappa+\beta) - 2A\xi^2 - \frac{a^3}{\xi}}, \\ f_2(\eta) = \sqrt{2e^2(\varkappa-\beta) - 2A\eta^2 - \frac{a^3}{\eta}} \end{cases}$$

oder bei Einführung der Variablen u, v

$$(14')\qquad f_1(\xi) = \frac{2\varkappa e^2\sigma_1}{\sqrt{2A}\cdot\xi}\sqrt{1-u^2}, \qquad f_2(\eta) = \frac{2\varkappa e^2\sigma_2}{\sqrt{2A}\cdot\eta}\sqrt{1-v^2}.$$

Deshalb schreiben sich die Gleichungen (13)

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = 2\sqrt{2A}\beta',$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{1}{\sigma_1 u + \frac{\varkappa+\beta}{2\varkappa}} + \int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}\,\frac{1}{\sigma_2 v + \frac{\varkappa-\beta}{2\varkappa}} = \frac{4e^2\varkappa}{\sqrt{2A}}\,\frac{\varphi-\varphi_0}{a},$$

$$\int\frac{\sigma_1 u + \frac{\varkappa+\beta}{2\varkappa}}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \int\frac{\sigma_2 v + \frac{\varkappa-\beta}{2\varkappa}}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \frac{(2A)^{3/2}}{\varkappa e^2\sqrt{\mu}}(t-t_0).$$

Die Integration der zweiten und dritten Gleichung liefert:

$$(15)\qquad \begin{cases} \arcsin u - \arcsin v - 2\sqrt{2A}\beta', \\ \frac{\varkappa+\beta}{\varkappa}\arcsin u + \frac{\varkappa-\beta}{\varkappa}\arcsin v = 2\sigma_1\sqrt{1-u^2} + 2\sigma_2\sqrt{1-v^2} \\ \qquad\qquad + \frac{2(2A)^{3/2}}{\varkappa e^2}(t-t_0), \end{cases}$$

während die dritte mit der Substitution

$$(16)\qquad u = \cos\mathfrak{u}, \qquad v = \cos\mathfrak{v}$$

ergibt:

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{\varkappa+\beta-2\varkappa\sigma_1}{\varkappa+\beta+2\varkappa\sigma_1}}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right) \\ \qquad\qquad - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{\varkappa-\beta-2\varkappa\sigma_2}{\varkappa-\beta+2\varkappa\sigma_2}}\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\right). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (15) und (17) lassen sich u, v und φ als Funktionen der Größen β', φ_0, $t-t_0$ ermitteln, und wir gehen jetzt dazu über, die Beziehungen der letzteren zu den Winkelkoordinaten w_1, w_2, w_3 anzugeben. Es gelten nämlich die Relationen[1])

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}(t-t_0) = \omega_{11}w_1 + \omega_{21}w_2 + \omega_{31}w_3\,, \\ \varphi_0 = \omega_{12}w_1 + \omega_{22}w_2 + \omega_{32}w_3\,, \\ e^2\beta' = \omega_{13}w_1 + \omega_{23}w_2 + \omega_{33}w_3\,, \end{cases}$$

wobei

$$\omega_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j}, \qquad (i,j = 1, 2, 3)$$

bedeutet und mit a_1, a_2, a_3 bzw. $-A$, α, β bezeichnet werden. Unter u_i, schließlich, verstehen wir die Ausdrücke

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\sqrt{f_1(\xi)}\,d\xi, \qquad u_2 = \frac{1}{\pi}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\sqrt{f_2(\eta)}\,d\eta, \qquad u_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha\,d\varphi\,.$$

Die Integration läßt sich [z. B. mit Hilfe der Substitution (10)] leicht ausführen und liefert

$$(19)\quad u_1 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2(\varkappa+\beta)}{\sqrt{2A}}, \qquad u_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2(\varkappa-\beta)}{\sqrt{2A}}, \qquad u_3 = \alpha\,.$$

Dementsprechend schreiben sich die Beziehungen (18)

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}(t-t_0) = -\dfrac{e^2}{2(2A)^{3/2}}[(\varkappa+\beta)w_1 + (\varkappa-\beta)w_2]\,, \\ \varphi_0 = -\dfrac{w_1+w_2}{2} + w_3\,, \\ \beta' = -\dfrac{1}{2\sqrt{2A}}(w_1 - w_2)\,. \end{cases}$$

---

1) Vgl. z. B. C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. I. p. 104. Leipzig 1902; oder auch P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 176. 1916. Die Definition der Größen ω weicht dort um den Faktor $2\pi\sqrt{\mu}$ von der hier benutzten ab.

Nunmehr können wir zu den Gleichungen (15) zurückkehren. Aus denselben erhalten wir eine erste Näherung für u und v, wenn wir beachten, daß die arcsin unbegrenzt wachsen, während die Glieder mit den Quadratwurzeln die Werte $2\sigma_1$, $2\sigma_2$ nie überschreiten. Wir können daher die letzteren Glieder zunächst vernachlässigen und erhalten, indem wir zugleich (20) berücksichtigen:

$$\arcsin u = -w_1, \quad \arcsin v = -w_2,$$

oder

$$u = -\sin w_1, \quad v = -\sin w_2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die vernachlässigten Glieder erhält man zur Berechnung der zweiten Näherung, welche für unsere Zwecke ausreicht, die Gleichungen

$$\arcsin u - \arcsin v = -w_1 + w_2,$$

$$(\varkappa+\beta)\arcsin u + (\varkappa-\beta)\arcsin v = 2\varkappa\sigma_1 \cos w_1 + 2\varkappa\sigma_2 \cos w_2 - (\varkappa+\beta)w_1 - (\varkappa-\beta)w_2,$$

woher folgt:

$$(21) \qquad \begin{cases} u = -\sin(w_1 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2), \\ v = -\sin(w_2 - \sigma_1 \cos w_1 - \sigma_2 \cos w_2). \end{cases}$$

Es bleibt noch $\sin\varphi$ in Abhängigkeit von den Winkelkoordinaten zu bestimmen. Aus (17) und (10) folgt

$$\sin\varphi = \frac{e^2}{2A\xi\eta}\left\{\sin\varphi_0\left(a\cos\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} - b\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right) - \cos\varphi_0\left(c\sin\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + d\cos\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right)\right\},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(22) \qquad \begin{cases} a = \sqrt{\varkappa+\beta+2\varkappa\sigma_1}\cdot\sqrt{\varkappa-\beta+2\varkappa\sigma_2}, \\ b = \sqrt{\varkappa+\beta-2\varkappa\sigma_1}\cdot\sqrt{\varkappa-\beta-2\varkappa\sigma_2}, \\ c = \sqrt{\varkappa+\beta-2\varkappa\sigma_1}\cdot\sqrt{\varkappa-\beta+2\varkappa\sigma_2}, \\ c = \sqrt{\varkappa+\beta+2\varkappa\sigma_1}\cdot\sqrt{\varkappa-\beta-2\varkappa\sigma_2} \end{cases}$$

setzen. Hieraus

$$\sin\varphi = \frac{e^3}{8A\xi\eta}\{(a-b-c+d)\sin(w_3-w_2)+(a-b+c-d)\cdot\sin(w_3-w_1)+(a+b-c-d)\cos(w_3-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)-(a+b+c+d)\cos(w_1+w_2-w_3-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)\}.$$

Damit ist unser Ziel, die Strecken $\mathfrak{z}_p$ und $\mathfrak{z}_s$ durch die Winkelkoordinaten auszudrücken, erreicht. Führen wir noch die weiteren Abkürzungen ein:

$$(23)\quad \begin{cases} \tau_1 = \dfrac{e^3\varkappa\sigma_1}{2A}, & \tau_2 = \dfrac{e^3\varkappa\sigma_2}{2A}, \\ \gamma = \dfrac{e^3}{8A}(a+b-c-d), & \delta = \dfrac{e^3}{8A}(a+b+c+d), \end{cases}$$

so gewinnen sie die endgültige Gestalt:

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{z}_p = -\tau_1\sin(w_1-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)+\tau_2\sin(w_2-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)+\text{const.} \\ \mathfrak{z}_s = \dfrac{e^3}{8A}[(a-b-c+d)\sin(w_3-w_2)+(a-b+c-d)\cdot\sin(w_3-w_1)]+\gamma\cos(w_3-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)-\delta\cos(w_1+w_2-w_3-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2). \end{cases}$$

§ 5. *Spezialisierung für die Balmer- und Fowlerserien.* — Die soeben gewonnenen Ausdrücke sind, wie in § 3 ausgeführt wurde, in nach den Argumenten w_1, w_2, w_3 fortschreitende Fourriersche Reihen zu entwickeln. Berücksichtigt man die aus der Theorie der Zylinderfunktionen bekannten Reihen:

$$\cos(\sigma_1\cos w_1) = 2\sum_0^\infty{}' (-1)^i J_{2i}(\sigma_1)\cos 2iw_1,$$

$$\sin(\sigma_1\cos w_1) = 2\sum_0^\infty (-1)^i J_{2i+1}(\sigma_1)\cos(2i+1)w_1,$$

(wobei durch $J_i(\sigma_1)$ die i-te Besselsche Funktion des Argumentes σ_1 bezeichnet ist und der Strich am Summenzeichen in üblicher Weise andeutet, daß das $i=0$ entsprechende Glied mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist), so erhält man die Entwicklung

$$
\begin{aligned}
&-\sin(w_1-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)\\
&=\sum_0^\infty{}'_i\sum_0^\infty{}'_j(-1)^{i+j}J_{2i}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\{\sin[(2i-1)w_1+2jw_2]\\
&\quad-\sin[(2i+1)w_1+2jw_2]+\sin[(2i-1)w_1-2jw_2]\\
&\quad-\sin[(2i+1)w_1-2jw_2]\}\\
&+\sum_0^\infty{}'_i\sum_0^\infty{}'_j(-1)^{i+j}J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\{-\sin[2iw_1+(2j\\
&\quad+1)w_2]+\sin[(2i+2)w_1+(2j+1)w_2]-\sin[2iw_1\\
&\quad-(2j+1)w_2]+\sin[(2i+2)w_1-(2j+1)w_2]\}\\
&+\sum_0^\infty{}'_i\sum_0^\infty{}'_j(-1)^{i+j}J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\{\cos[2iw_1+2jw_2]\\
&\quad+\cos[(2i+2)w_1+2jw_2]+\cos[2iw_1-2jw_2]\\
&\quad+\cos[(2i+2)w_1-2jw_2]\}\\
&+\sum_0^\infty{}'_i\sum_0^\infty{}'_j(-1)^{i+j}J_{2i}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\{\cos[(2i-1)w_1+(2j\\
&\quad+1)w_2]+\cos[(2i+1)w_1+(2j+1)w_2]+\cos[(2i\\
&\quad-1)w_1-(2j+1)w_2]+\cos[(2i+1)w_1-(2j+1)w_2]\};
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der für ganzzahlige p geltenden Beziehung

$$J_{-p}(\sigma)=(-1)^pJ_p(\sigma),$$

aus welcher sich

$$\sum_0^\infty{}'_i(-1)^i[f(i)+f(-i)]J_{2i}(\sigma)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_i(-1)^if(i)\,J_{2i}(\sigma)$$

und

$$\sum_0^\infty{}'_i(-1)^i[f(2i+1)+f(-2i-1)]J_{2i+1}(\sigma)$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_i(-1)^if(2i+1)J_{2i+1}(\sigma)$$

ergibt, läßt sich die Schreibweise wesentlich vereinfachen:

$$
(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\sin(w_1-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)\\
&=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{i+j}\{J_{2i}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\sin[(2i-1)w_1+2jw_2]\\
&\qquad -J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\sin[2iw_1+(2j+1)w_2]\\
&\qquad +J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\cos[2iw_1+2jw_2]\\
&\qquad +J_{2i}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\cos[(2i-1)w_1+(2j+1)w_2]\}.
\end{aligned}\right.
$$

Ganz analog gelangt man zu den beiden Entwickelungen:

$$
(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos(w_2-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)\\
&=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{i+j}\{J_{2i}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\cos[2iw_1+2jw_2+w_2]\\
&\qquad -J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\cos[(2i+1)w_1+(2j+1)w_2+w_2]\\
&\qquad +J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\sin[(2i+1)w_1+2jw_2+w_2]\\
&\qquad +J_{2i}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\sin[2iw_1+(2j+1)w_2+w_2]\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos(w_1+w_2-w_2-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)\\
&=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{i+j}\{J_{2i}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\cos[(2i+1)w_1\\
&\qquad +(2j+1)w_2-w_2]-J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\cos[(2i+2)w_1\\
&\qquad +(2j+2)w_2-w_2]+J_{2i+1}(\sigma_1)J_{2j}(\sigma_2)\sin[(2i+2)w_1\\
&\qquad +(2j+1)w_2-w_2]+J_{2i}(\sigma_1)J_{2j+1}(\sigma_2)\sin[(2i+1)w_1\\
&\qquad +(2j+2)w_2-w_2]\}.
\end{aligned}\right.
$$

Die Entwicklung von $-\sin(w_2-\sigma_1\cos w_1-\sigma_2\cos w_2)$ ergibt sich aus (25), wenn man die Indizes 1 und 2 vertauscht.

Nach § 3 entsprechen die Koeffizienten der Winkelkoordinaten w_1, w_2, w_3 beziehungsweise den Quantendifferenzen $Q_1=m_1-n_1$, $Q_2=m_2-n_2$, $Q_3=m_3-n_3$. Wir sehen, daß unserer Polarisationsregel entsprechend bei den parallel polarisierten Komponenten, deren Lichtstärke durch die Glieder der Entwicklung von $\mathfrak{s}_p$ gegeben wird, die azimutale Quantendifferenz Q_3 verschwindet, während sie bei den senkrecht polarisierten ($\mathfrak{s}_s$) die Werte ± 1 annimmt. Die Koeffizienten (K) der einzelnen Glieder haben die folgende Gestalt.

1. Linien H_α und 4686.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1 .$$

a) p-Komponenten.

Q_1	Q_2	Q_3	$K =$
4	−3	0	$-2\left(\frac{4\tau_1}{\sigma_1}+\frac{3\tau_2}{\sigma_2}\right) J_4(\sigma_1) J_3(\sigma_2)$,
3	−2	0	$2\left(\frac{3\tau_1}{\sigma_1}+\frac{2\tau_2}{\sigma_2}\right) J_3(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
2	−1	0	$-2\left(\frac{2\tau_1}{\sigma_1}+\frac{\tau_2}{\sigma_2}\right) J_2(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
1	0	0	$2\frac{\tau_1}{\sigma_1} J_1(\sigma_1) J_0(\sigma_2)$.

b) s-Komponenten.

3	−3	1	$-\gamma J_3(\sigma_1) J_3(\sigma_2) + \delta J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
2	−2	1	$\gamma J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
1	−1	1	$-\gamma J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2)$,
0	0	1	$\gamma J_0(\sigma_1) J_0(\sigma_2) + \delta J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$.
4	−2	−1	$\gamma J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_3(\sigma_2)$,
3	−1	−1	$-\gamma J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
2	0	−1	$\gamma J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2) - \delta J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
1	1	−1	$\gamma J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_0(\sigma_1) J_0(\sigma_2)$.

Unter Zuhilfenahme der bereits benutzten Beziehung

$$J_{-p}(\sigma_2) = (-1)^p J_p(\sigma_2)$$

kann man die zusammengestellten Ausdrücke auf die folgende allgemeine Form bringen:

a) p-Komponenten,

Q_1	Q_2	Q_3	$K =$
p	$-p+1$	0	$2\left(p\frac{\tau_1}{\sigma_1}+(p-1)\frac{\tau_2}{\sigma_2}\right) J_p(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2)$.

b) s-Komponenten.

p	$-p$	1	$\gamma J_p(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2) + \delta J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2)$,
$p+1$	$-p+1$	−1	$\gamma J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2) + \delta J_p(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2)$.

Wir haben hier nur den Fall $Q_1 \geqslant Q_2$ betrachtet, weil der andere aus diesem durch bloße Vertauschung der Indizes 1 und 2 der Konstanten σ, τ hervorgeht. Für die übrigen Linien lauten die analogen Ausdrücke:

2. Linien H_β und 3203.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2.$$

a) p-Komponenten.

Q_1	Q_2	Q_3	$K =$
$p+1$	$-p+1$	0	$\tau_1 [J_p(\sigma_1) - J_{p+2}(\sigma_1)] J_{-p+1}(\sigma_2) + \tau_2 J_{p+1}(\sigma_1)[J_{-p+2}(\sigma_2) - J_{-p}(\sigma_2)]$.

b) s-Komponenten.

$p+1$	$-p$	1	$\gamma J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2) - \delta J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_2)$;
$p+2$	$-p+1$	-1	$\gamma J_{p+2}(\sigma) J_{-p+1}(\sigma_2) - \delta J_{p+1}(\sigma_1) J_{-p}(\sigma_2)$.

Die besonders einfachen Ausdrücke für H_γ wollen wir im Interesse einiger später zu machender allgemeiner Bemerkungen ausführlich hinschreiben.

3. Linien H_γ und 2733.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3.$$

a) p-Komponenten.

6	-3	0	$-2\left(\frac{6\tau_1}{\sigma_1} + \frac{3\tau_2}{\sigma_2}\right) J_6(\sigma_1) J_3(\sigma_2)$;
5	-2	0	$2\left(\frac{5\tau_1}{\sigma_1} + \frac{2\tau_2}{\sigma_2}\right) J_5(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
4	-1	0	$-2\left(\frac{4\tau_1}{\sigma_1} + \frac{\tau_2}{\sigma_2}\right) J_4(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
3	0	0	$2 \cdot \frac{3\tau_1}{\sigma_1} J_3(\sigma_1) J_0(\sigma_2)$,
2	1	0	$2\left(\frac{2\tau_1}{\sigma_1} - \frac{\tau_2}{\sigma_2}\right) J_2(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$.

b) s-Komponenten.

5	-3	1	$\gamma J_5(\sigma_1) J_3(\sigma_2) - \delta J_6(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
4	-2	1	$-\gamma J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2) + \delta J_5(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
3	-1	1	$\gamma J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2) - \delta J_4(\sigma_1) J_0(\sigma_2)$,
2	0	1	$-\gamma J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
1	1	1	$-\gamma J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2) - \delta J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
6	-2	-1	$\gamma J_6(\sigma_1) J_2(\sigma_2) - \delta J_5(\sigma_1) J_3(\sigma_2)$,
5	-1	-1	$-\gamma J_5(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_4(\sigma_1) J_2(\sigma_2)$,
4	0	-1	$\gamma J_4(\sigma_1) J_0(\sigma_2) - \delta J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$,
3	1	-1	$\gamma J_3(\sigma_1) J_1(\sigma_2) + \delta J_2(\sigma_1) J_0(\sigma_2)$,
2	2	-1	$\gamma J_2(\sigma_1) J_2(\sigma_2) + \delta J_1(\sigma_1) J_1(\sigma_2)$.

5. Linie H_δ.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4.$$

a) p-Komponenten.

$p+2 \quad -p+2 \quad 0 \quad \tau_1 [J_{p+1}(\sigma_1) - J_{p+3}(\sigma_1)] J_{-p+2}(\sigma_3) - \tau_3 J_{p+2}(\sigma_1)[J_{-p+1}(\sigma_3) - J_{-p+3}(\sigma_3)]$.

b) s-Komponenten.

$p+2 \quad -p+1 \quad 1 \quad \gamma J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_3) - \delta J_{p+3}(\sigma_1) J_{-p+2}(\sigma_3)$,

$p+3 \quad -p+2 \quad -1 \quad \gamma J_{p+3}(\sigma_1) J_{-p+2}(\sigma_3) - \delta J_{p+2}(\sigma_1) J_{-p+1}(\sigma_3)$.

Betrachtet man das durch diese Ausdrücke gegebene Verteilungsgesetz und beachtet, daß die Größen σ_1, σ_3 ihrer Definition (12) nach stets < 1 sind, so zeigt es sich, daß die negativen Differenzen Q_1 (bzw. Q_2) entsprechenden Komponenten nur mit sehr schwachen Intensitäten vorkommen können. *Die beiden ersten Sommerfeldschen Quantengleichungen ergeben sich demnach als eine Intensitätserscheinung näherungsweise auch bei Bohr.* Sehen wir von negativen Differenzen Q_1, Q_2 ab, so zeigen die p- und s-Reihen ein verschiedenes Verhalten: Bei den ersteren haben die Intensitätsausdrücke caeteris paribus den größten numerischen Wert, wenn die Differenzen Q_1 (oder Q_2) ihren größten Wert erreichen und fallen mit Abnahme derselben ab, wie man es besonders deutlich an der ausführlich mitgeteilten Reihe für H_γ erkennt. Dies ist der mathematische Grund einer vom Verfasser empirisch aufgestellten, aber zu weit verallgemeinerten Regel (l. c. p. 516). Innerhalb der durch die Q_1 gegebenen Stufen werden die Intensitäten durch die Werte der Konstanten τ, σ geregelt, und fallen die letzteren ungünstig aus, so kann der Ausdruck K trotz großer Differenz Q_1 klein bleiben; es handelt sich also um eine notwendige, aber nicht hinreichende Vorbedingung für die Lichtstärke, wie bereits l. c. ausgeführt wurde. Komplizierter verhalten sich die s-Komponenten: Das Maximum liegt hier nicht beim größten Q_1, sondern bei den beiden darauf folgenden Stufen, welche Intensitäten von der gleichen Größenordnung ermöglichen. Es genügt hier also eine große Reihe (innerer) Komponenten den notwendigen Bedingungen maximaler Lichtstärke, so daß die wesentliche Rolle in der Intensitätsbestimmung den Konstanten γ, δ, σ zufällt.

Über die Festlegung dieser Konstanten, von denen σ_1, σ_2 durch die Gestalt und Lage der Bahnellipse, τ_1, τ_2, γ, δ im wesentlichen durch ihre Dimensionen (große Achse) bestimmt werden, ist noch ein Wort zu sagen. Im Grenzfalle großer Wellenlängen, von welchem Bohr ausging, wenn man die Anfangs- und Endbahn als identisch betrachten kann, sind sie eindeutig gegeben. Dagegen sind sie in den praktisch wichtigeren Fällen für die Anfangs- und Endbahn verschieden, und es entsteht die Frage, welche Werte man dem Übergang aus der einen in die andere zuschreiben soll. Es ist zuzugeben, daß in der Auswahl dieser Mittelwerte eine gewisse Willkür liegt; indessen zeigte es sich, daß bei der Durchrechnung für einzelne Linien nach verschiedenen Methoden der Mittelung, welche dem Verfasser besonders plausibel schienen, die Resultate nicht sehr erheblich auseinander gingen. Aus diesem Grunde wurde nicht so sehr das begrifflich konsequenteste, als das praktisch bequemste Verfahren für die etwas mühsamen Rechnungen ausgewählt, welches darin besteht, in die Intensitätsformeln die arithmetischen Mittel aus den für Anfangs- und Endbahn gültigen Werten der Konstanten τ_1, τ_2, σ_1, σ_2, γ, δ einzusetzen.

§ 6. *Ergebnisse für die Balmerserie.* — Die Bohrsche Theorie der Intensitäten ist nur im Gebiete großer Wellenlängen a priori überzeugend. Wie weit es berechtigt ist, sie auf den Bereich kürzerer Wellenlängen zu übertragen, kann nur an der Erfahrung geprüft werden. Aus diesem Grunde wollen wir zunächst die Berechnungen für die Linien der Balmerserie den sorgfältigen Messungen der Starkschen Feinzerlegung dieser Linien[1]) gegenüberstellen.

H_α

p-Komp.			*s*-Komp.		
Z	K (ber.)	Int. (gem.)	Z	K (ber.)	Int. (gem.)
13	0,001**	—	11	0,0*4*	—
9	0,06*	—	10	0,0*4*	—
8	0,02	—	7	0	—
7	0,02*	—	6	0,06	—
5	1,14**	—	5	0,05	—
4	0,93	1,2	4	0,02*	—
3	89	1,1	3	—	
2	89	1	2	0*	—
1	25*	—	1	1,27	1
0	—		0	2,29	2,6

1) J. Stark, Gött. Nachr. p. 427. 1914; Ann. d. Phys. 48. p. 193. 1915.

H_β

	p-Komp.		*s*-Komp.	
Z	*K* (ber.)	Int. (gem.)	*K* (ber.)	Int. (gem.)
20	$0{,}0^{91}$**	—	—	
18	—		0,0**	—
16	0,1*	—	0,0**	—
14	0,05	—	0*	—
12	8,4**	1	0,13	1
10	12,4	11,5	0,05	1,1
8	4,6	9,1	0,04*	1,3
6	2,6	4,8	7,4	9,7
4	1,1*	1	4,4	12,6
2	0,5	1,2	2,4	3,3
0	0	1,4	0,9*	1,4

H_γ

	p-Komp.		*s*-Komp.	
Z	*K* (ber.)	Int. (gem.)	*Z*	*K* (ber.)	Int. (gem.)
29	0,0***	—	27	0,00*	—
25	0,2*	—	24	0,00*	—
22	0,1	—	23	0*	—
21	20**	1 (fr.)	20	0,07	1
19	0,1*	—	17	0,04	1,1
18	11,0	10,8	16	0*	—
15	6,5	7,2	14	0,01*	—
12	1,5	2,0	13	10,6	6,1
11	0,3*	—	10	4,4	4,3
9	0,6*	—	7	1,9	1,2
8	0,4	1	6	2,5*	—
5	2,9	1,5	4	0,8*	—
2	1,7	1,6	3	5,8	3,6
1	0,6*	—	0	8,6	7,2

H_δ

	p-Komp.		*s*-Komp.	
Z	*K* (ber.)	Int. (gem.)	*Z*	*K* (ber.)	Int. (gem.)
40	0,00**	—	38	0,000*	—
36	0,1*	—	34	0,000*	—
32	16,0**	1 (fr.)	20	0,04	1 (fr.)
28	7,2	7,2	26	0,02	1,3
24	3,6	2,8	22	0,58	2,4
20	0,6	1,1	18	28	2,0
16	0,8	1,2	14	8	1
12	3,2	1,5	10	40	2,1
8	1,0	1,2	6	52	3,2
4	0,8	1	2	16	1,3
0	0	—			

Die Werte K für die p- und s-Komponenten einer Linie sind in denselben Einheiten angegeben, während die Starkschen Intensitäten *nicht* von Reihe zu Reihe vergleichbar sind.

Die Komponenten oberhalb der horizontalen Striche würden bei Anwendung der Ungleichungen (4) ausfallen. Ist als Wert der berechneten Intensität 0 ohne weitere Dezimalstellen angegeben, so bedeutet dies, daß die Rechnung zum exakten Nullwert geführt hat.

Im allgemeinen laufen die gemessenen Intensitäten den berechneten K in befriedigender Weise parallel. Wie wir schon in § 4 hervorhoben, handelt es sich weder bei den experimentellen noch den theoretischen Angaben um strenge Bestimmungen der Lichtstärke, sondern nur um eine mehr oder weniger qualitative Bewertung derselben; man muß also nicht auf die Absolutwerte der Zahlen achten, sondern nur auf deren Gang, die Lage der Maxima und Minima; und in dieser Beziehung ist die Übereinstimmung recht brauchbar. Bedeutendere Abweichungen bemerkt man nur bei der H_β-Linie. In der p-Reihe fällt hier zunächst auf, daß für $Z = 0$ die Intensität theoretisch verschwindet, während experimentell eine schwache Komponente festgestellt wurde. Diese Diskrepanz ist von der Willkür der Mittelung (vgl. Schluß des § 5) unabhängig und beruht auf der Symmetrie des Ausdruckes K der Linie H_β (p. 17) für $p = 0$, dessen beide Terme sich für $\tau_1 = \tau_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ aufheben. Denselben Grund hat auch das Verschwinden der Komponente $Z = 0$ von H_β, welches durch die Beobachtung bestätigt wird. Es ist aber einleuchtend, daß ein solcher durch die gegenseitige Vernichtung zweier erheblicher Größen zustande kommender Effekt, gegenüber kleinen Änderungen der Bedingungen empfindlich sein muß: die Berücksichtigung des elektrischen Feldes, welches wir ja vernachlässigt haben, würde die strenge Vertauschbarkeit der Indizes von τ und σ aufheben und zu einem endlichen, wenn auch kleinen Werte von K führen. In der s-Reihe sehen wir bei den äußeren, sehr lichtschwachen Komponenten einen Abfall der K, wo die Beobachtung einen schwachen Anstieg der Intensitäten zeigt. Dies ist jedoch eine typische Erscheinung, welche bei den Linien $Z = 20, 17$ von H_γ und $Z = 30, 26$ von H_δ wiederkehrt. Störender ist, daß das Maximum der Lichtstärke von $Z = 4$, wo es gemessen wurde, nach $Z = 6$ verschoben erscheint.

Dagegen ist in den übrigen Linien der Parallelismus ein viel besserer. Beachtenswert ist das Minimum bei $Z = 8$ in

der p-Reihe von H_γ. Es ist nämlich der Form des Ausdruckes K nicht anzusehen und hat seinen Grund darin, daß sich die beiden Terme desselben für die dieser Komponente entsprechenden Werte von τ, σ stark schwächen, was zugunsten der von uns benutzten Mittelungsart spricht.

§ 7. *Ergebnisse für die Fowlerlinie.* — Aus dem im letzten Paragraphen zwischen Theorie und Erfahrung durchgeführten Vergleiche entnehmen wir, daß die Berechnungen in zuverlässiger Weise das qualitative Anwachsen oder Abfallen der Intensitäten von Komponente zu Komponente ergeben. Und zwar gehen die aus der Plattenschwärzung bestimmten Lichtstärken besser den ersten Potenzen der Größen K parallel als deren Quadraten, welche theoretisch das eigentliche Intensitätsmaß darstellen. Diese Umstände sind bei der Bewertung der folgenden Tabelle zu beachten.

4686				3203				2733			
	p-Komp.		s-Komp.		p-Komp.		s-Komp.		p-Komp.		s-Komp.
Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K	Z	K
25	$0{,}0^{5}1$ *	22	$0{,}0^{4}4$*	34	$0{,}0^{5}1$**			45	$0{,}0^{5}1$**		—
19	0,002 *	21	$0{,}0^{4}4$*	28	$0{,}0^{5}1$*	31	$0{,}0^{4}2$*	42	—		$0{,}0^{5}1$*
18	0,001 *	16	$0{,}0^{5}1$*	26	$0{,}0^{5}1$	29	$0{,}0^{4}3$*	39	$0{,}0^{4}4$*		$0{,}0^{4}2$*
17	0,001*	15	0,002	24	$0{,}0^{5}1$*	25	$0{,}0^{5}1$*	36	$0{,}0^{4}2$		$0{,}0^{4}3$*
13	0,10*	14	0,009	22	0,018*	23	$0{,}0^{4}3$	33	$0{,}0^{5}1$*		$0{,}0^{5}1$
12	0,09	13	0,000*	20	0,014	21	$0{,}0^{4}2$	30	0,04*		0,045
11	0,03	10	0*	18	0,015	19	$0{,}0^{5}1$*	27	5,40**		0,031
10	0,05	9	0,14	16	1,48**	17	0,037	24	3,61		0,028
9	0,04*	8	0,13	14	1,12	15	0,041	21	2,42		0,018
7	2,20**	7	0,11	12	1,15	13	0,028	18	1,45		2,97
6	1,93	6	0,09	10	0,64	11	0,012	15	0,84		3,32
5	2,48	5	0,03*	8	0,45	9	1,12	12	0,24		2,15
4	1,49	3	0*	6	0,21	7	1,49	9	0,76		1,03
3	1,26	2	2,10	4	0,09	5	1,39	6	0,72		1,46
2	0,51	1	3,62	2	0,09	3	0,72	3	0,70		2,62
1	0,86*	0	5,17	0	0	1	0,11	0	0,89		3,16

Graphisch sind diese Ergebnisse in den Figg. 1, 2, 3 veranschaulicht, in denen unter der theoretischen Energieverteilung, um den Vergleich mit der Erfahrung zu erleichtern, die Schwärzungsmaxima nach den Messungen von J. Stark und seinen Mitarbeitern (bzw. von Nyquist für 4686) in Form von dicken Strichen eingetragen sind.[1]) Sowohl in den theore-

1) Sowohl die berechneten als auch die gemessenen Intensitäten sind hier von p-Reihe zu s-Reihe innerhalb derselben Linie vergleichbar.

tischen wie in den experimentellen Figuren sind die Intensitäten durch die Länge der Striche gegeben. In den ersteren sind die oberen Strichenden der Übersichtlichkeit wegen durch

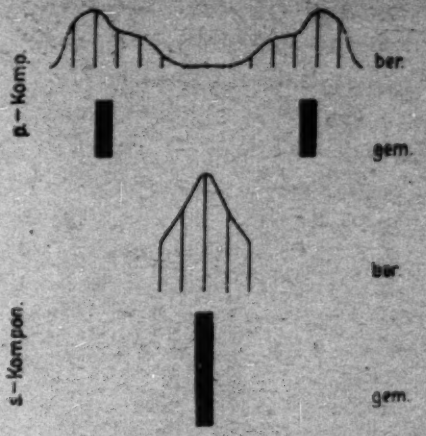


Fig. 1.

eine Kurve verbunden; in den letzteren ist auf die Lage der Striche, welche derjenigen der Schwärzungsmaxima entspricht, nicht aber auf deren Breite zu achten. Die Übereinstimmung ist,

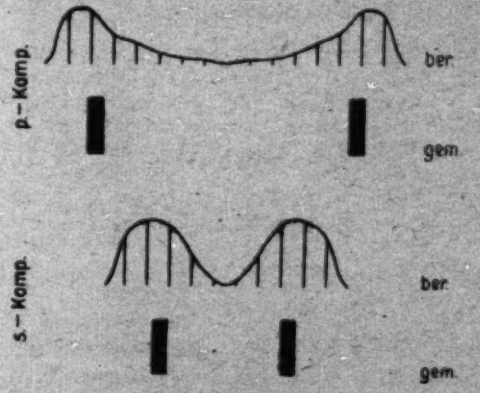


Fig. 2.

wie man sieht, eine recht gute, und die Lagen der berechneten und gemessenen Maxima entsprechen einander mit einer viel größeren Genauigkeit als 25 Proz., welche nach der zu vorsichtigen Schätzung von J. Stark den möglichen Fehler seiner Bestimmungen darstellen sollen.

Zusammenfassung. — Auf Grund der Quantenlehre wurde die elektrische Aufspaltung der ersten drei Linien der Fowlerserie des ionisierten Heliums nach Lage und Intensität der Komponenten untersucht.

Die Intensitätsberechnungen wurden auch auf die Linien H_α, H_β, H_γ, H_δ der Balmerserie des Wasserstoffs ausgedehnt.

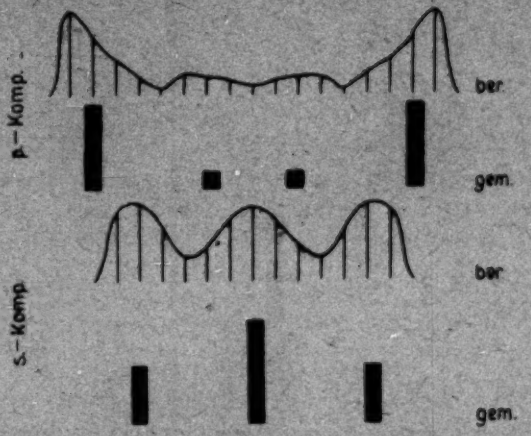


Fig. 3.

Der Vergleich der theoretischen Resultate mit den Ergebnissen der Starkschen Messungen lieferte eine neue schöne Bestätigung sowohl der vom Verfasser gegebenen Theorie des Starkeffektes und damit seiner allgemeinen Ansätze für bedingt periodische Bewegungen, als auch der neuen Bohrschen Theorie der Intensitäten.

(Eingegangen 1. Oktober 1918.)

Nachtrag bei der Korrektur. — Die vorstehenden Ausführungen beschäftigen sich nur mit dem *voll ausgebildeten* Starkeffekt, welcher dann vorliegt, wenn man den Einfluß der Relativität gegen den des elektrischen Feldes vernachlässigen kann (vgl. P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 182. 1916). In dem inzwischen erschienenen zweiten Teil seiner auf p. 554 angeführten Abhandlung stellt Bohr eine Untersuchung von Kramers in Aussicht, welche durch Berücksichtigung der Relativitätskorrektion eine Erklärung des beobachteten Anwachsens des Effektes mit dem Felde gibt.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

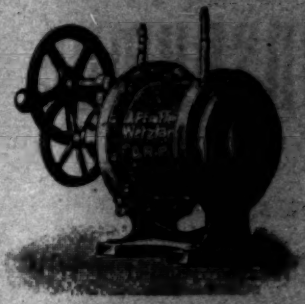
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

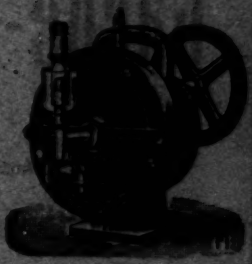
Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P. — **System Gaede, D. R. P. angemeldet**



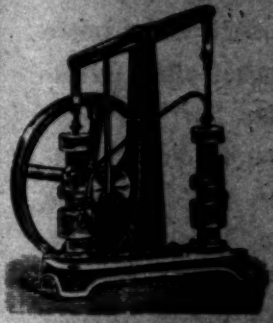
Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.**



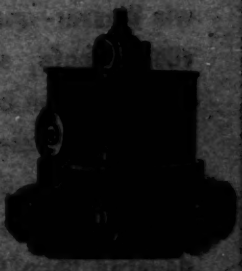
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

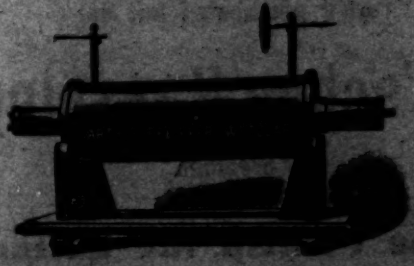
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

		Seite
1.	J. Holtsmark. Über die Verbreiterung von Spektrallinien .	577
2.	O. Lehmann. Über die Beziehungen zwischen mechanischer und chemischer Verdrehung der Struktur flüssiger Kristalle .	631

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. *Über die Verbreiterung von Spektrallinien; von J. Holtsmark.*

1. Einleitung.

§ 1. Es ist schon längst bekannt, daß unter geeigneten Bedingungen die scharfen Spektrallinien mehr oder weniger verbreitert erscheinen. Es werden z. B. viele Linien im kondensierten Funken stark verbreitert, die Wasserstofflinien wachsen sogar zu breiten „Banden“ aus, und ebenso kann eine Linie dadurch verbreitert werden, daß man den Druck des emittierenden Gases genügend erhöht. Es ist dabei nicht nötig, daß z. B. im Falle der Emission der Natriumlinien der Natriumdampf eine hohe Dichte hat, es wirkt ebenso, wenn der emittierende Natriumdampf mit z. B. Stickstoff vermischt ist, und der Stickstoff einen hohen Druck hat.

Zur Erklärung dieser Tatsachen setzte man in Übereinstimmung mit der alten Auffassung, daß die Emission durch schwingende Elektronen bedingt sei, an, daß die Bewegung der Elektronen gedämpft sei, man fügte also in der elastischen Schwingungsgleichung ein Reibungsglied hinzu. Dies ist z. B. von Voigt[1]) mehrfach gemacht worden. Da dieser Ansatz zunächst rein formal war, so hat man sich auch bestrebt, eine physikalische Erklärung des Reibungsgliedes zu finden. Es kam da von vornherein die Dämpfung durch Strahlung in Betracht, diese ist aber nach Planck so gering, daß sie neben der beobachteten gar nicht in Betracht kommt. Außerdem hat sie gar keinen unmittelbaren Zusammenhang mit dem Druck des umgebenden Gases. H. A. Lorentz[2]) suchte bekanntlich einen anderen Ausweg und nahm an, daß die Dämpfung gewissermaßen eine scheinbare ist. Die Elektronen führen

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1908.

2) H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. 25. Jan. 1906.

ungedämpfte oder nahezu ungedämpfte Schwingungen aus, die Wellenzüge sind aber nicht von unendlicher Länge, sondern sie werden jedesmal dann abgeschnitten, wenn das emittierende Atom einen Zusammenstoß mit einem der übrigen Gasmoleküle erleidet. Ein endlicher, aber ungedämpfter, monochromatischer Wellenzug läßt sich nun mit Hilfe des Fourierintegrals zerlegen in eine stete Folge von Frequenzen, die sich um die Frequenz der ungedämpften Schwingung nach Art der Verbreiterung ordnen. Der Effekt ist also ähnlich wie bei der gewöhnlichen Dämpfung von unendlich langen Wellenzügen.

Wohl der genauesten Prüfung ist diese Theorie unterzogen worden durch die Versuche von Füchtbauer und Hoffmann[1]), sowie durch die Versuche von Füchtbauer und Schell.[1]) Bei den genannten Versuchen wurde die Breite von Cs-Linien in Stickstoff von 2 Atmosphären Druck bestimmt. Die Lorentzsche Stoßdämpfung ist in diesem Falle genau berechenbar, es zeigte sich aber beim Vergleich mit der Erfahrung, daß sie viel zu klein gegenüber dem theoretischen Wert ausfiel. Um die Versuche nach der Lorentzschen Theorie erklären zu können, müßte man annehmen, daß die Anzahl der Zusammenstöße pro Zeiteinheit ca. 32 mal so groß wäre, wie die gaskinetisch berechnete Anzahl. Dies ist wohl als eine entscheidende Schwierigkeit der Lorentzschen Theorie anzusehen, sie ist auch meines Wissens nachher in keinerlei Weise behoben worden.

Nach der neueren Auffassung der Lichtemission als eine quantenhafte sinkt die Wahrscheinlichkeit der Lorentzschen Erklärungsweise auch deswegen, weil es nunmehr ganz unwahrscheinlich wird, daß die Emission von schwingenden Elektronen herrührt.

Gleich nach seiner Entdeckung des Starkeffekts wies Stark[2]) darauf hin, daß die Verbreiterung von Spektrallinien durch die Einwirkung der elektrischen Felder der benachbarten Atome verursacht sein könnte und er führte eine

1) Chr. Füchtbauer und W. Hoffmann, Ann. d. Phys. 43. p. 96. 1914.

2) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig 1914.

Reihe von Tatsachen an, welche diese Auffassung unterstützten. So wächst die Verbreiterung innerhalb der Serien gleichzeitig mit der Zerlegung durch den Starkeffekt, d. h. im allgemeinen mit steigender Gliednummer. Ebenfalls konnte er auch nachweisen, daß in Fällen, wo der Starkeffekt unsymmetrisch oder einseitig war, die Verbreiterung eine ebenfalls unsymmetrische oder einseitige war. Es schien deshalb recht wahrscheinlich, daß die Verbreiterung wirklich sich in dieser Weise erklären ließe, einen Beweis dafür konnte man aber nur dann erbringen, wenn man die Sache quantitativ verfolgen könnte und es sich dann zeigen würde, daß auch zahlenmäßig eine Übereinstimmung vorhanden wäre.

Ich möchte im folgenden zeigen, wie man eine Theorie der Verbreiterung auf dieser Grundlage aufstellen kann, und daß dieselbe in quantitativer Übereinstimmung mit der Erfahrung steht. Dabei stellt sich auch heraus, daß es möglich ist, aus Messungen der Verbreiterung Schlüsse auf gewisse Konstanten des Atoms zu ziehen, die bis jetzt der Messung nicht zugänglich waren. Wir werden dabei sowohl die Verbreiterung durch Ionisation (kondensierter Funken), sowie die Verbreiterung durch Druck behandeln können, und es wird unsere Aufgabe sein, die Abhängigkeit der Verbreiterung von der Dichte und Art der umgebenden Ionen bezw. Molekülen zu berechnen. Außerdem werden wir auch die Verbreiterung direkt mit den Konstanten des Starkeffekts in Beziehung bringen und verhältnismäßig rohe, aber für unsere Zwecke völlig ausreichende Angaben über die Intensitätsverteilung in der verbreiterten Linie machen können.

2. Aufstellung des Problems.

§ 2. Wir nehmen an, daß das emittierende oder absorbierende Atom von einer großen Zahl anderer „störender" Atome oder Moleküle umgeben sei. Diese umgebenden Atome können auch Ionen sein. Das emittierende Atom wollen wir als das Atom 0 bezeichnen, die störenden Atome wollen wir mit Nummern $1—N$ versehen, allgemein mit n bezeichnet. Die Atome $1—N$ brauchen nicht gleich dem Atom 0 zu sein, sie sollen aber alle unter sich gleich sein. Im Falle der Füchtbauerschen Versuche wäre z. B. das Atom 0 das lichtab-

sorbierende Cäsiumatom, während die Stickstoffatome die Atome 1—N wären.

Die umgebenden Atome sind nach der nunmehr allgemein genug begründeten Auffassung Systeme elektrischer Massen, sie erzeugen an der Stelle des nullten Atoms ein elektrisches Feld gleich der Summe der elektrischen Felder aller Atome. Das vom Atom 0 emittierte Licht wird infolgedessen einen Starkeffekt zeigen, und die Größe dieses Starkeffektes wechselt mit dem eben erwähnten elektrischen Feld. Weil die Atome ständig in Bewegung sind, wechselt das Feld fortwährend, sowohl nach Richtung wie nach Größe, so daß wir keine einheitliche Aufspaltung der emittierten bzw. absorbierten Linien erhalten, sondern nur eine Verbreiterung. Wir sind offenbar imstande, diese Verbreiterung anzugeben, sobald wir die Wahrscheinlichkeit dafür kennen, daß eine bestimmte Feldstärke herrscht, als Funktion von dieser Feldstärke. Auf die Richtung derselben braucht keine Rücksicht genommen zu werden. Zunächst kommt es aber darauf an, *die Wahrscheinlichkeit einer resultierenden Feldstärke* F_0 als Funktion von F_0 zu finden.

Die Feldstärke F_0 am Ort des Atoms 0 setzt sich zusammen aus den von sämtlichen N Atomen erzeugten Feldstärken. Die Komponenten der letzteren seien für das erste Atom in einem festen Koordinatensystem X_n, Y_n, Z_n, dann sind die Komponenten von F_0 gegeben durch

$$(1)\qquad \begin{cases} X_0 = \sum_1^N{}_n X_n, \\ Y_0 = \sum_1^N{}_n Y_n, \\ Z_0 = \sum_1^N{}_n Z_0 \end{cases}$$

und wir suchen die Wahrscheinlichkeit, daß

$$(2)\qquad \begin{cases} X_0 \text{ zwischen } X_0 \text{ und } X_0 + dX_0, \\ Y_0 \quad \text{„} \quad Y_0 \text{ „ } Y_0 + dY_0, \\ Z_0 \quad \text{„} \quad Z_0 \text{ „ } Z_0 + dZ_0 \end{cases}$$

liegen. Die X_n, Y_n, Z_n, welche die vom n-ten Atom hervorgebrachte Feldstärke angeben, hängen nun in bestimmter Weise von einer Anzahl unabhängiger Koordinaten $x_{1n}\, x_{2n} \ldots x_{\nu n}$ ab,

nämlich den Koordinaten, welche die Lage des n-ten Atoms in bezug auf den Mittelpunkt des nullten Atoms charakterisieren. Jede Komponente unserer resultierenden Feldstärke $X_0 Y_0 Z_0$ hängt also von $N\nu$ Koordinaten ab, nämlich von den $N\nu$ Koordinaten sämtlicher N Atome. Die Werte dieser Koordinaten wollen wir durch Punkte in dem νN— dimensionalen Raum $x_{11} \dots x_{\nu 1}$, $x_{12} \dots x_{\nu 2} \dots x_{1N} \dots x_{\nu N}$ darstellen. Diese Punkte werden nach irgendeinem Wahrscheinlichkeitsgesetz in dem Raum verteilt sein, wir werden die „Einzelwahrscheinlichkeit" für den Punkt $x_{1n}, x_{2n} \dots x_{\nu n}$ eines bestimmten Atoms n mit σ_n bezeichnen. Zu jeder Kombination $x_{11} x_{21} \dots x_{\nu N}$ ist die Feldstärke $X_0 Y_0 Z_0$ durch die Gleichungen (1) gegeben. Hier sind die $X_n Y_n Z_n$ als Funktionen von $x_{1n} x_{2n} \dots x_{\nu n}$ zu denken, also:

$$\text{(1a)} \qquad \begin{cases} X_0 = \sum_1^N X_n (x_{1n} x_{2n} \dots x_{\nu n}), \\ Y_0 = \sum_1^N Y_n (x_{1n} x_{2n} \dots x_{\nu n}), \\ Z_0 = \sum_1^N Z_n (x_{1n} x_{2n} \dots x_{\nu n}). \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Koordinaten $x_{1n} \dots x_{\nu n}$ einem Bereiche $dx_{1n} \dots dx_{\nu n}$ angehören, wird man schreiben können in der Form

$$\text{(1b)} \qquad \sigma_n \, dx_{1n} \, dx_{2n} \dots dx_{\nu n}.$$

Die Größe σ_n ist dabei im allgemeinen eine Funktion von $x_{1n} \dots x_{\nu n}$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kombination von sämtlichen $N\nu$ Koordinaten wird durch das Produkt sämtlicher Ausdrücke von der Form (1b) gegeben sein, also gleich

$$\text{(1c)} \qquad \sigma_1 \dots \sigma_N \, dx_{11} \, dx_{21} \dots dx_{\nu N}.$$

Eine solche Kombination ergibt nun einen bestimmten Wert von X_0 und ebenfalls bestimmte Werte von Y_0 und Z_0, nach (1a). In gewissen Teilen des νN-dimensionalen Raumes werden also die Gleichungen (2) erfüllt sein, in den übrigen Teilen nicht.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Gleichungen (2) erfüllt sind, ist aber gleich der Summe aller Volumenelemente, die für (2) günstig sind, jedes multipliziert mit der spezifischen Wahrscheinlichkeit dieses Elementes, die gleich $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$ ist, das Ganze dividiert durch die Summe aller Volumenelemente überhaupt, jedes ebenfalls mit derselben spezifischen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Oder die Wahrscheinlichkeit $W(X_0 Y_0 Z_0)$ wird gleich:

$$(3) \quad W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{V_N} \cdot \int \dots \int \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N \, dx_{11} \, dx_{21} \dots dx_{\nu N},$$

wo das Integral zu erstrecken ist über diejenigen Teile des νN-dimensionalen Raumes, wo die Gleichungen (2) gelten, und wo V_N die Bedeutung hat:

$$(4) \quad V_N = \int\int \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N \, dx_{11} \, dx_{21} \dots dx_{\nu N},$$

über den ganzen Raum integriert.

Die Gleichungen (3) und (4) sind unser Ansatz, es gilt nun, in unserem besonderen Fall die Integrale auszurechnen.

§ 3. Eine ähnliche Frage ist von Markoff[1]) behandelt worden, und von v. Laue[2]) angewendet. Beide finden unter vereinfachenden Annahmen, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(X_0 Y_0 Z_0)$ die Gausssche Fehlerfunktion wird, wo als Konstanten im Exponenten die Mittelwerte auftreten:

$$\overline{X_n^2} \; \overline{Y_n^2} \; \overline{Z_n^2} \; \overline{X_n Y_n} \; \overline{X_n Z_n} \; \overline{Y_n Z_n}$$

und wo der Index n fortgelassen werden kann, wenn alle Atome 1 bis N gleichartig sind. Wenn man diese Resultate auf das obige Problem anzuwenden versucht, zeigt es sich, daß das nicht möglich ist, weil die genannten Mittelwerte hier keinen Sinn haben. Dies folgt daraus, daß die Feldstärke in unmittelbarer Nähe der Atome oder Moleküle unendlich wird. Da es aber trotzdem klar ist, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion (3) wirklich existiert, so müßte man versuchen, das Integral in anderer Weise zu berechnen.

Es zeigt sich dann bei genauerer Untersuchung, daß man das Verfahren von Markoff zum Teil verwenden kann, nur

1) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von Liebmann. Leipzig u. Berlin 1912. §§ 16 und 33.

2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 47. p. 853. 1915.

darf man nicht die vereinfachenden Annahmen machen, die er benutzt, weil eben dadurch die genannten Schwierigkeiten entstehen.

§ 4. Es gilt in erster Linie, das Integral (3) zu berechnen. Das Verfahren von Markoff beruht nun darauf, daß man durch Multiplikation mit einem passenden Dirichletschen Faktor das Integral über denjenigen Teil des Raumes, wo (2) gelten, in ein Integral über den ganzen Raum verwandelt. Dieser Dirichletsche Faktor muß so beschaffen sein, daß er überall dort, wo die Gleichungen (2) gelten, gleich 1 ist, und im ganzen übrigen Raum gleich Null. Wir brauchen für jede der drei Ungleichungen (2) einen Faktor. Solche Faktoren sind die Dirichletschen Integrale:

$$(5)\quad \begin{cases} H(X) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha\xi}{\xi}\, e^{i\delta\xi}\, d\xi, \qquad H(Y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \beta\eta}{\eta}\, e^{i\varepsilon\eta}\,, \\ \\ H(Z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \gamma\zeta}{\zeta}\, e^{i\varkappa\zeta}\, d\zeta, \end{cases}$$

wenn wir die Werte verwenden:

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha = \tfrac{1}{2} dX_0, \quad \delta = \sum_1^N X_n(x_{1n} \dots x_{rn}) - X_0, \\ \beta = \tfrac{1}{2} dY_0, \quad \varepsilon = \sum_1^N Y_n(x_{1n} \dots x_{rn}) - Y_0, \\ \gamma = \tfrac{1}{2} dZ_0, \quad \varkappa = \sum_1^N Z_n(x_{1n} \dots x_{rn}) - Z_0. \end{cases}$$

Die Integrale (5) sind gleich 1 oder 0, je nachdem:

$$-\alpha < \delta < \alpha, \quad -\beta < \varepsilon < \beta, \quad -\gamma < \varkappa < \gamma$$

gelten oder nicht, und nach den Festsetzungen (6) sind diese Ungleichungen identisch mit (2). Wir führen (6) in (5) ein, dabei werden, weil α, β und γ unendlich klein sind [1]):

1) Anmerkung. Man sollte eigentlich den Grenzübergang wegen α sehr klein erst dann vornehmen, nachdem die Integration in (7) über $dx_{11} \dots dx_{rN}$ ausgeführt ist, weil die Integrale (5a) an sich keinen Sinn haben. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß es auf dasselbe herauskommt.

$$\frac{\sin \alpha \xi}{\xi} = \alpha, \quad \frac{\sin \beta \eta}{\eta} = \beta, \quad \frac{\sin \gamma \zeta}{\zeta} = \gamma,$$

so daß die Integrale lauten:

$$(5a) \quad \begin{cases} H(X) = \frac{1}{2\pi} dX_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(\sum_1^N X_n - X_0)} d\xi, \\ H(Y) = \frac{1}{2\pi} dY_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta(\sum_1^N Y_n - Y_0)} d\eta, \\ H(Z) = \frac{1}{2\pi} dZ_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta(\sum_1^N Z_n - Z_0)} d\zeta. \end{cases}$$

Diese Integrale multiplizieren wir mit dem Integrand in (3), dann können wir die Integration über den ganzen Raum erstrecken:

$$(7) \quad \begin{cases} W(X_0 Y_0 Z_0) dX_0 dY_0 dZ_0 \\ \qquad = \frac{1}{8\pi^3} dX_0 dY_0 dZ_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int\int\int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{-(\xi X_0 + \eta Y_0 + \zeta Z_0)}. \\ \frac{1}{V_N} \int \dots \int_{V_N} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N e^{i(\xi \Sigma X_n + \eta \Sigma Y_n + \zeta \Sigma Z_n)} dx_{11}\, dx_{21} \dots dx_{\nu N}. \end{cases}$$

Das innere Integral ist über das ganze Volumen V zu erstrecken, dabei sind X_n, Y_n und Z_n als Funktionen der ν Koordinaten $x_{1n} x_{2n} \dots x_{\nu n}$ zu denken. $X_0 Y_0 Z_0$ sind die Komponenten der resultierenden Feldstärke, sie sind bei allen Integrationen als Konstanten zu betrachten. Es ist nun von Wichtigkeit, daß alle N Moleküle einander gleich sind. Dann sind nämlich $X_n Y_n Z_n$ sämtlich dieselben Funktionen von $x_{1n} x_{2n} \dots x_{\nu n}$ und die $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$ sind alle gleich. Infolgedessen läßt sich das innere Integral aufspalten in das Produkt von N Integralen, die unter sich alle gleich sind. Das innere Integral in (7) wird dadurch einfach die N^{te} Potenz eines Integrales, das nur über die ν Koordinaten eines einzelnen Atoms zu erstrecken ist, also:

$$(7a) \quad J^N = \frac{1}{V^N} \left[\int \dots \int_V e^{i(\xi X + \eta Y + \zeta Z)} \sigma\, dx_1\, dx_2 \dots dx_\nu \right]^N,$$

wo wir den Index n wegen der Gleichheit fortgelassen haben. Ebenfalls haben wir:

$$V_N = V^N$$

geschrieben, indem V sich nur auf ein einzelnes Atom bezieht. Mit Verwendung der Gleichung (7a) erhalten wir sodann aus (7):

$$(8)\quad \begin{cases} W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int d\xi\,d\eta\,d\zeta\,e^{-i(\xi X_0+\eta Y_0+\zeta Z_0)}\cdot \\ \qquad \frac{1}{V^N}\left[\int_V\dots\int e^{i(X\xi+Y\eta+Z\zeta)}\sigma\,dx_1\,dx_2\dots dx_\nu\right]^N. \end{cases}$$

Soweit sind unsere Ausführungen analog zu denen von Markoff und von v. Laue gewesen. Um weiter zu kommen, müssen wir aber einen anderen Weg einschlagen, wie schon oben bemerkt wurde.

Herr Professor Debye wies mich nun darauf hin, daß in unserem besonderen Falle die Integrale wirklich auswertbar sind, ohne daß man irgendwelche Annahmen zu machen braucht. Fassen wir nämlich zunächst das innere Integral ins Auge, so bemerken wir, daß die Komponenten der Feldstärke XYZ in der Form eines skalaren Produkts von den zwei Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ auftreten, wo $\mathfrak{F}$ die Komponenten XYZ und $\mathfrak{s}$ die Komponenten ξ, η, ζ haben. ξ, η, ζ ist bei der inneren Integration konstant. Es gelingt nun, bei Anwendung von Polarkoordinaten dieses skalare Produkt in eine solche Form zu bringen, daß die Integration ermöglicht wird. Wie dies im einzelnen geschieht, wollen wir im folgenden zeigen. Es handelt sich aber zunächst darum, die Feldstärke $\mathfrak{F}$ eines Atoms im umgebenden Raum zu finden, um daraus das Produkt $(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ zu bestimmen.

3. Berechnung des Atompotentials und der Feldstärke.

§ 5. Ein Atom (oder Molekül) bestehe ganz allgemein aus einer Anzahl s Ladungen, die wir mit e_s bezeichnen wollen. Wir suchen das von diesen Ladungen in einem Aufpunkt x, y, z hervorgebrachte Potential. Das Koordinatensystem x, y, z wollen wir uns fest mit dem Atom verbunden denken, dessen Mittelpunkt wir im Anfangspunkt verlegen. Die Lagen der Ladungen e_s wollen wir uns ebenfalls in diesem System ange-

geben denken, sie seien durch die Koordinaten x_s, y_s, z_s gegeben. Wenn nun R_s der Abstand der s-ten Ladung vom Aufpunkt bedeutet, so ist das Potental in diesem Punkt:

$$\Phi = \Sigma \frac{e_s}{R_s}. \tag{9}$$

Da uns das Feld in großem Abstand vom Atom interessiert, können wir den Ausdruck (9) nach r entwickeln, r bedeutet den Abstand des Punktes x, y, z vom Mittelpunkt, also:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es ist nun:

$$R_s^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 - \frac{2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_s)}{r^2}\right],$$

wo

$$r_s^2 = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2,$$
$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_s) = x x_s + y y_s + z z_s,$$

wie man leicht findet. Die Entwicklung von $[R_s^2]^{-1/2}$ ergibt dann nach Einsetzung in (9):

$$\Phi = \frac{\Sigma e_s}{r} - \frac{(\mathfrak{r}, \Sigma e_s \mathfrak{r}_s)}{r^3} - \frac{1}{2r^3}\left\{\Sigma e_s r_s^2 - 3\Sigma\left(e_s \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_s)^2}{r^2}\right)\right\} + \dots \tag{10}$$

plus weitere Glieder, die wir vernachlässigen wollen. Wir können diesen Ausdruck noch etwas umformen, so daß er für die Verwendung bequemer wird:

$$\left\{\begin{aligned}\Phi = \frac{\Sigma e_s}{r} &- \frac{1}{r^3}\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}, \Sigma e_s \mathfrak{r}_s\right) - \frac{1}{2r^3}\left\{\Sigma e_s x_s^2\left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right)\right. \\ &+ \Sigma e_s y_s^2\left(1 - \frac{3y^2}{r^2}\right) + \Sigma e_s z_s^2\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) \\ &\left. - \frac{6\Sigma e_s x_s y_s xy}{r^2} - \frac{6\Sigma e_s y_s z_s yz}{r^2} - \frac{6\Sigma e_s x_s z_s xz}{r^2}\right\} - \dots\end{aligned}\right. \tag{10a}$$

Was nun diese Gleichung betrifft, so ist zu bemerken, daß wir drei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem:

1. Keines der Glieder verschwindet.
2. Das erste Glied gleich Null ist.
3. Das erste und zweite Glied verschwinden.

Im ersten Fall hat das Atom eine überschüssige Ladung, es ist also ein *Ion*; im zweiten Fall ist es neutral, hat aber ein elektrisches Moment, wir haben also ein *Dipol*; im dritten Falle hat das Atom keine Ladung und keine Dipole, es wirkt

aber wie ein *Quadrupol*. Es wäre endlich noch denkbar, daß auch das dritte Glied gleich Null wäre. Wir wollen uns aber auf die drei aufgezählten Fälle beschränken und die Rechnungen in allen genau durchführen. Wir wollen diese drei Fälle bezeichnen als:

1. Ein geladenes Ion,
2. ein Dipol,
3. ein Quadrupol.

In allen drei Fällen haben wir das skalare Produkt $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F})$ als Funktion von unabhängigen Koordinaten zu bestimmen, wo $\mathfrak{s}$ ein fester Bezugsvektor und $\mathfrak{F}$ die Feldstärke ist.

§ 6. *a) Feld des geladenen Ions.*

Wir haben hier

$$\Phi = \frac{\Sigma e_i}{r} = \frac{e}{r}$$

und

$$\mathfrak{F} = \operatorname{grad} \Phi = -\frac{e}{r^3} \cdot \mathfrak{r},$$

also

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F}) = -\frac{e}{r^3} \cdot (\mathfrak{r}, \mathfrak{s}) = -\frac{e}{r^3}\, \varrho \cos \vartheta, \tag{11}$$

wo ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ bedeutet und ϱ der Absolutwert von $\mathfrak{s}$ ist.

§ 7. *b) Feld des Dipols.*

Beim Dipol ist

$$\Phi = \frac{(\mathfrak{r}, \Sigma e_i \mathfrak{r}_i)}{r^3} = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{m}}{r^3}, \tag{12}$$

$\mathfrak{m}$ bedeutet das Moment des Dipols.

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{F} = \operatorname{grad} \Phi &= \operatorname{grad}\left(\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{m}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} \operatorname{grad} (\mathfrak{r}\,\mathfrak{m}) - \frac{3}{r^5}\, \mathfrak{r}(\mathfrak{r}, \mathfrak{m}) \\ &= \frac{\mathfrak{m}}{r^3} - \frac{3\mathfrak{r}(\mathfrak{r}, \mathfrak{m})}{r^5}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Wir bilden wieder das skalare Produkt mit dem Vektor $\mathfrak{s}$

$$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F}) = \frac{1}{r^3}\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}) - \frac{3}{r^5}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{m})\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}), \tag{14}$$

und es gilt, dieses Produkt als Funktion von nur unabhängigen

Größen darzustellen. Das ist sofort zu erreichen, wenn wir für die drei skalaren Produkte schreiben:

$$(15)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}) = \varrho\, m\, \cos\alpha, \\ (\mathfrak{r}\,\mathfrak{m}) = r\, m\, \cos\beta, \\ (\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}) = \varrho\, r\, \cos\gamma. \end{cases}$$

α bedeutet dann den Winkel zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{m}$ usw. Wir tragen die drei Vektoren $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{r}$ in ein Koordinatensystem ein und betrachten ihre Durchstoßpunkte mit der Einheitskugel um den Anfangspunkt (vgl. Fig. 1). Da die Richtung

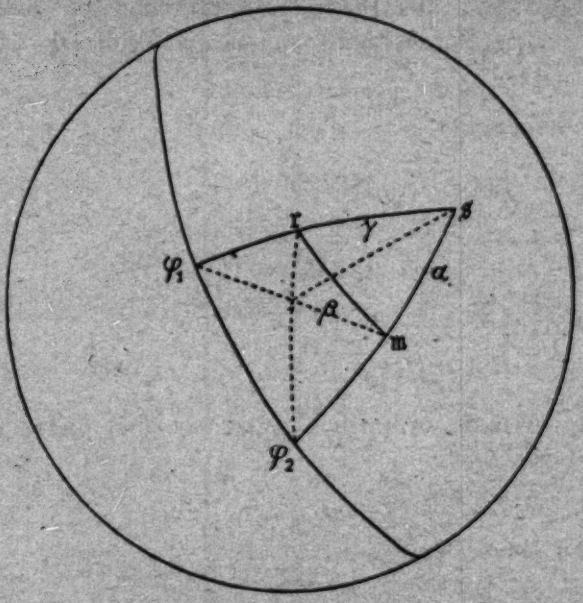


Fig. 1.

von $\mathfrak{s}$ beliebig ist, so können wir sie als Polachse des Koordinatensystems wählen und Polarkoordinaten r, ϑ und φ einführen.

Aus der Figur ist dann sofort zu ersehen, daß α und γ die Breitenwinkel ϑ_1 und ϑ_2 der Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{m}$ sind. Nennen wir ihre Längenwinkel φ_1 und φ_2, so ist nach einem bekannten Satze

$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\cos\alpha = \cos\vartheta_1$$

oder $$\cos\beta = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\cos\gamma = \cos\vartheta_2.$$

Dies in unseren Ausdruck für $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F})$ eingeführt, ergibt:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{s}\,\mathfrak{F}) = \frac{1}{r^3}\cdot \varrho\, m \,(\cos\vartheta_1 - 3\cos\vartheta_2 \cdot (\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) . \end{aligned} \right.$$

Damit haben wir erreicht, das skalare Produkt $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F})$ als Funktion der unabhängigen Veränderlichen $r, \vartheta_1\, \vartheta_2, \varphi_1$ und φ_2 darzustellen.

§ 8. *c) Feld des Quadrupols.*

In dem Fall des Quadrupols haben wir allgemein für das Potential:

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = -\frac{1}{2r^5}\Big\{ &\sum e_\nu x_\nu^2\Big(1-\frac{3x^2}{r^2}\Big) + \sum e_\nu y_\nu^2\Big(1-\frac{3y^2}{r^2}\Big) \\ &+ \sum e_\nu z_\nu^2\Big(1-\frac{3z^2}{r^2}\Big) - 6\sum e_\nu x_\nu y_\nu \frac{xy}{r^2} - 6\sum e_\nu y_\nu z_\nu \frac{yz}{r^2} \\ &- 6\sum e_\nu z_\nu x_\nu \frac{zx}{r^2}\Big\} . \end{aligned} \right.$$

Es ist nun zweckmäßig, das Koordinatensystem x, y, z, das vorhin beliebig orientiert war, fest mit dem Atom zu verbinden. Wir können es dann so drehen, daß die Summen

$$\sum e_\nu x_\nu y_\nu = \sum e_\nu y_\nu z_\nu = \sum e_\nu z_\nu x_\nu = 0$$

werden und nur die rein quadratischen Glieder in Φ übrig bleiben. Zur Abkürzung führen wir ein:

$$(18)\quad \sum e_\nu x_\nu^2 = \Theta_1,\quad \sum e_\nu y_\nu^2 = \Theta_2,\quad \sum e_\nu z_\nu^2 = \Theta_3 .$$

Θ_1, Θ_2 und Θ_3 sind dann Konstanten, welche den Quadrupol charakterisieren. Wenn das Atom symmetrisch um eine Achse ist, so sind zwei von den Konstanten gleich, ein Fall, der z. B. bei N_2, O_2 usw. mit großer Wahrscheinlichkeit zutrifft. Wir machen diese vereinfachende Annahme und setzen also:

$$(19)\quad \Theta_1 = \Theta_2 .$$

Man könnte auch ohne besondere Schwierigkeiten diese Annahme entbehren, das Resultat würde aber dadurch unnötig kompliziert werden, die meisten Moleküle und viele Atome werden auch der Bedingung genügen. Es bleibt dann für das Potential

$$(20)\quad \Phi = -\frac{1}{2r^5}\Big[\Theta_2\Big(1-\frac{3x^2}{r^2}\Big) + \Theta_3\Big(1-\frac{3y^2}{r^2}\Big) + \Theta_3\Big(1-\frac{3z^2}{r^2}\Big)\Big] .$$

Eine leichte Umformung ergibt:

$$(21)\quad \begin{cases} \Phi = \frac{1}{2r^5}(\Theta_3 - \Theta_2)(-x^2 - y^2 + 2z^2) = \frac{A}{2r^5}(-x^2 - y^2 + 2z^2), \\ \text{wo } A = \Theta_3 - \Theta_2. \end{cases}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$-x^2 - y^2 + 2z^2 = \beta^2$$

und bilden

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{Ax}{2r^5}\left(2 - 5\frac{\beta^2}{r^2}\right) = F_x, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{Ay}{2r^5}\left(2 - 5\frac{\beta^2}{r^2}\right) = F_y, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = +\frac{Az}{r^5}\left(2 - 5\frac{\beta^2}{r^2}\right) = F_z. \end{cases}$$

F_x, F_y, F_z sind hier ausgedrückt in einem Koordinatensystem, das mit dem Atom fest verbunden ist. Die Koordinaten von $\mathfrak{s}$ seien in demselben System

$$\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z.$$

Wir haben dann das skalare Produkt

$$\varrho_x F_x + \varrho_y F_y + \varrho_z F_z = (\mathfrak{s}, \mathfrak{F})$$

zu bilden und auf eine Anzahl unabhängiger Koordinaten zurückzuführen. Tragen wir wieder die Vektoren $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{c}$ in ein Koordinatensystem ein, wo $\mathfrak{c}$ die Atomachse angibt. Dann ist $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F})$ abhängig von den relativen Lagen von $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{c}$ zueinander. Um diese Lagen anzugeben, halten wir einen von den Vektoren fest und wählen ihn als Polachse eines Polarkoordinatensystems. Dieser Vektor sei $\mathfrak{c}$. Dann sind die Lagen von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ gegeben durch die Winkel $\vartheta_1 \varphi_1$ bzw. $\vartheta_2 \varphi_2$ (vgl. Fig. 2), und es wird

$$(23)\quad \begin{cases} \varrho_x = \varrho \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1, & x = r \sin\vartheta_2 \cos\varphi_2, \\ \varrho_y = \varrho \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1, & y = r \sin\vartheta_2 \sin\varphi_2, \\ \varrho_z = \varrho \cos\vartheta_1, & z = r \cos\vartheta_2. \end{cases}$$

Wenn diese Werte in das skalare Produkt $(\mathfrak{s}\,\mathfrak{F})$ eingeführt werden, erhält man

$$(24)\quad \left\{ (\mathfrak{s}\,\mathfrak{F}) = \frac{A\varrho}{2r^4}\left\{2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right\} \right.$$
$$\left. (7-15\cos^2\vartheta_2). \right.$$

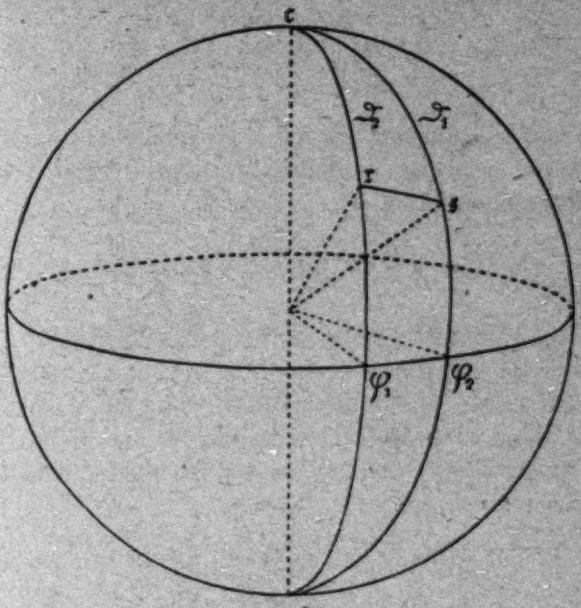


Fig. 2.

Der elektrische Zustand des Atoms wird durch die Konstante A bestimmt.

Fassen wir unsere Resultate zusammen, so sehen wir, daß in allen drei Fällen das skalare Produkt $(\mathfrak{s}, \mathfrak{F})$ sich darstellen läßt in der Form

$$(25)\qquad (\mathfrak{s}, \mathfrak{F}) = \frac{\varrho}{r^p} \cdot w_p,$$

wo w_p Funktionen von nur Winkelgrößen bedeuten, und p die Werte 2, 3 und 4 annimmt. Wir können also unser Problem allgemein behandeln, indem wir für $(\mathfrak{s}, \mathfrak{F})$ eine Funktion vom Typus (25) einsetzen.

4. **Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(X_0, Y_0, Z_0)$.**

§ 9. Wir greifen zurück auf die Gleichung (8)

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} W(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{-i(\xi X_0 + \eta Y_0 + \zeta Z_0)} \\ \qquad \left[\frac{1}{V}\int_V \cdots \int e^{i(\xi X + \eta Y + \zeta Z)}\, \sigma\, dx_1 \ldots dx_\nu\right]^N \end{array}\right.$$

und wir wollen zunächst an die Auswertung des Integrals in der Klammer schreiten. Indem wir den obigen Wert von $(\xi, \mathfrak{F})$ einführen, erhalten wir:

$$(26)\quad J = \frac{1}{V}\int_V \cdots \int e^{i\cdot\frac{\varrho w_p}{r^p}}\, \sigma\, dx_1\, dx_2\, dx_\nu.$$

Die Koordinaten $x_1 \ldots x_\nu$ sind in diesem Falle $r_1\, \vartheta_1\, \vartheta_2\, \varphi_1$ und φ_2, weil wir die Funktion (25) in diesen Koordinaten ausgedrückt haben. [Vgl. Gleichungen (24), (16) und (11)]. Ist nun jede Lage des Molekülmittelpunktes im Raume, sowie jede Richtung eines fest mit dem Molekül verbundenen Pfeiles gleichberechtigt, so ist:

$$(26\,a)\quad \sigma\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu = r^2\, dr \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2,$$

wobei

$$(27)\quad V = \frac{16\pi^2}{3} R^3$$

zu wählen ist. Die Grenzen für $\vartheta_1\, \vartheta_2\, \varphi_1\, \varphi_2$ sind nämlich ohne weiteres angebbar, sie sind:

ϑ_1 und ϑ_2 von 0 bis π,
φ_1 und φ_2 von 0 bis 2π.

Den Abstand r wollen wir gehen lassen von 0 bis zu einem großen Werte R. Wir tun also so, als ob das störende Gas in einer kugelförmigen Hülle vom Radius R eingeschlossen wäre. Offenbar ist diese Annahme ohne Einfluß auf das Endresultat, da die Form des Gefäßes, in dem der Versuch ausgeführt wird, bei den großen Dimensionen desselben keine Rolle spielen kann. Mit Benutzung dieser Integrationsgrenzen erhält der Nenner V den angegebenen Wert, dies folgt unmittelbar aus unserer Definitionsgleichung für V:

$$(28)\quad V = \int_V \cdots \int \sigma\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu$$

das Integral über die Kugel vom Radius R und die obigen Grenzen erstreckt.

Wir schreiben zur Abkürzung in (26a):

$$d\Omega = \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1,$$
$$d\Omega' = \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, d\varphi_2,$$

und führen dies in (26) ein. Es ergibt sich so

$$J = \frac{1}{V}\int_{\Omega}\dots\int_{\Omega'} d\Omega\, d\Omega' \int_0^R r^2 e^{i\frac{\varrho w_p}{r^p}}\, dr. \tag{26b}$$

In diesem Ausdruck führen wir die Substitution aus

$$\frac{\varrho w_p}{r^p} = u, \quad r^2 dr = \left(\frac{\varrho w_p}{p}\right)^{3/p} du,$$

wodurch das Integral die Form annimmt

$$J = \frac{8R^3}{16\pi^2}\int_{\Omega}\dots\int_{\Omega'} d\Omega\, d\Omega' \left(\frac{\varrho w_p}{p}\right)^{3/p}\int_a^{\infty} e^{iu}\, u^{-\left(\frac{3+p}{p}\right)}\, du. \tag{29}$$

Die untere Grenze des inneren Integrals ist dabei

$$\alpha = \frac{\varrho w_p}{R^p}. \tag{30}$$

Wir müssen für das Weitere eine getrennte Behandlung der drei Fälle $p = 2$, 3 und 4, vornehmen, und wollen daher zunächst den Fall $p = 2$ berechnen. Es handelt sich also darum, den Wert von

$$J^N$$

in der Grenze für große N und große R, d. h. kleine α zu bestimmen. Es ist vorteilhaft, das Integral über u zunächst zu berechnen, obwohl man im Falle des einfachen Ions auch umgekehrt verfahren könnte. Um die Analogie mit den zwei anderen Fällen besser hervortreten zu lassen, wählen wir aber den ersten Weg.

§ 10. *Berechnung von J^N bei $p = 2$.*

In diesem Falle lautet unser Integral über u

$$\int_a^{\infty} e^{iu} u^{-\frac{5}{2}}\, du = \frac{2}{3}\alpha^{-\frac{3}{2}} e^{i\alpha} + \frac{4}{3} i\alpha^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha} + \frac{4}{3} i^2 \int_a^{\infty} e^{iu} u^{-\frac{1}{2}}\, du,$$

wie die partielle Integration sofort ergibt. Das letztere Integral schreiben wir

$$(31)\quad \begin{cases} \int_a^\infty e^{iu}u^{-\frac{1}{2}}du = \int_0^\infty e^{iu}u^{-\frac{1}{2}}du - \int_0^a e^{iu}u^{-\frac{1}{2}}du = e^{i\frac{\pi}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ \qquad - \int_0^a \left(1 + iu + \frac{1}{2}i^2u^2 + \dots\right)u^{-\frac{1}{2}}du \\ \qquad = \sqrt{\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\alpha^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot i^2\alpha^{\frac{5}{2}}\dots \end{cases}$$

Wenn wir dies einführen, und den Wert von α berücksichtigen, erhalten wir für J

$$J = \frac{3}{16\pi^3 R^3}\int d\Omega\, d\Omega' \cdot \frac{\alpha}{2}^{\frac{3}{2}} \cdot R^3\left[\frac{2}{3}\alpha^{-\frac{3}{2}}e^{i\alpha} + \frac{4}{3}i\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{i\alpha} + \frac{4}{3}i^2\left(\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\alpha^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}} - \dots\right)\right].$$

Da $\alpha = \frac{\varrho w_2}{R^2}$ eine kleine Größe ist, können wir $e^{i\alpha}$ entwickeln; eine leichte Rechnung ergibt dann

$$(32)\quad J = \frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\, d\Omega'\left[1 + i\alpha + 2i^2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}\alpha^{\frac{3}{2}} + \dots\right],$$

wo die weiteren Glieder mit α^2 usw. nicht aufgeführt sind, da sie, wie sofort gezeigt wird, nichts beitragen. Das α enthält noch die Winkelfunktion w_2. Von dieser Winkelfunktion ist zu bemerken, daß ihr Mittelwert, das Integral

$$\int d\Omega\, d\Omega'\, w_p$$

über alle Ω gleich Null sein muß. Dies erhellt sofort aus der physikalischen Bedeutung von w_p, und läßt sich auch leicht verifizieren, indem man die früher gefundenen Werte von w_p einsetzt und die Integration ausführt. Wir können also J schreiben

$$(33)\qquad J = 1 + 2i^2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\, d\Omega'\,\alpha^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Dies ist nun zur Potenz N zu erheben, wo N die Gesamtzahl der Moleküle bedeutet. Ist n die Zahl pro Volumeneinheit, so ist

$$(34)\qquad N = \frac{4\pi}{3}R^3\cdot n$$

und weiter

$$\alpha^{3/2} = \frac{(\varrho w_2)^{3/2}}{R^3} = (\varrho w_2)^{3/2} \cdot \frac{3n\,4\pi}{4\pi R^3 \cdot 3n} = (\varrho w_2)^{3/2} \frac{n \cdot 4\pi}{3N} . \tag{35}$$

Das Glied α^2 würde

$$\alpha^2 = \frac{\varrho^2 w_2^2}{R^4} = \varrho^2 w_2^2 \cdot \frac{n \cdot 4\pi}{3NR}$$

lauten, und also im Nenner R haben, bei der Erhebung zur N^{ten} Potenz ist es für $R = \infty$ daher als unendlich klein höherer Ordnung wegzulassen. Wir schreiben noch zur Abkürzung

$$\frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega\, d\Omega'\, w_2^{3/2} = \bar{w}_2 \tag{36}$$

und führen (35) und (36) in (33) ein.

$$J = 1 - 2\sqrt{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \bar{w}_2 \cdot \varrho^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{n}{N} . \tag{33a}$$

Dies soll zur N^{ten} Potenz erhoben werden und da N eine sehr große Zahl ist, können wir wegen des N im Nenner in (33a) die Exponentialfunktion schreiben

$$J^N = e^{-\sqrt{\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varrho^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4\pi n \bar{w}_2} . \tag{37}$$

Nach der Bedeutung von w_2 [Gl. (11)] ist

$$w_2 = -\varepsilon \cos\vartheta_1 ,$$

also

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{16\pi^2} \int w_2^{3/2}\, d\Omega\, d\Omega' = \frac{1}{16\pi^2} \int \dots \int \varepsilon^{3/2} \cdot \cos^{3/2}\vartheta \\ &\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1\, d\Omega' = \varepsilon^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}\vartheta_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta \\ &+ \varepsilon^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{3/2}\vartheta_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1 = \varepsilon^{3/2} \cdot \frac{1}{5}(1 - i) . \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Dies in J^N eingeführt, ergibt unter gleichzeitiger Berücksichtigung von

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$$

$$J^N = e^{-\frac{8\sqrt{2\pi}}{15} \cdot \pi n \cdot \varrho^{3/2} \varepsilon^{3/2}} = e^{-4{,}21\, n \varrho^{3/2} \varepsilon^{3/2}} . \tag{39}$$

Wir haben damit für den Fall des Ions den Wert von J^N ermittelt. Ehe wir an die weitere Berechnung der Wahrscheinlichkeit schreiten, wird es zweckmäßig sein, auch J^N beim Dipol und beim Quadrupol zu berechnen. Wegen der Ähnlichkeit der Ausdrücke, die wir dabei erhalten werden, wird die spätere Behandlung der drei Fälle unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt erleichtert.

§ 11. *Berechnung von J^N bei $p = 3$.*

In dem Falle des Dipols lautet der Ausdruck für J

$$J = \frac{1}{V}\int_{\Omega}\cdots\int_{\Omega'}\frac{m\varrho w_3}{3}\int_{\alpha}^{\infty} e^{iu}u^{-2}\,du\,d\Omega\,d\Omega', \tag{40}$$

wobei

$$\alpha = \frac{\varrho w_3 m}{R^3}. \tag{41}$$

Wir führen hier wieder eine partielle Integration aus und erhalten

$$\left\{\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\infty} e^{iu}u^{-2}\,du &= -\left[e^{iu}u^{-1}\right]_{\alpha}^{\infty} + i\int_{\alpha}^{\infty} e^{iu}u^{-1}\,du\\ &= \alpha e^{i\alpha} + i\int_{\alpha}^{\infty} e^{iu}u^{-1}\,du.\end{aligned}\right. \tag{40a}$$

Um den Wert des letzteren Integrales zu bestimmen, wollen wir einen kleinen Kunstgriff verwenden, indem wir es zerlegen in ein Integral von 0 bis ∞ und ein Integral von 0 bis α. Beide Integrale werden unendlich groß, ihre Differenz muß aber wegen ihrer Bedeutung einen endlichen Wert haben. Wir schreiben also

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{iu}u^{-1}\,du = \int_{0}^{\infty} e^{iu}u^{-1}\,du - \int_{0}^{\alpha} e^{iu}u^{-1}\,du. \tag{42}$$

Weiter schreiben wir anstatt des Exponenten -1, $-1+\lambda$, wo λ eine kleine Zahl bedeutet, die wir in der Grenze gleich Null setzen werden. Es ist dann

$$\int_{0}^{\infty} e^{iu}u^{-1+\lambda}\,du - \int_{0}^{\alpha} e^{iu}u^{-1+\lambda}\,du = f(\alpha,\lambda) \tag{43}$$

eine endliche Größe, die in der Grenze für $\lambda = 0$ zu bestimmen ist.

Wir führen wieder die Gammafunktion ein und entwickeln im zweiten Integral e^{iu}. Dann erhalten wir

$$(44)\quad \begin{cases} f(\alpha,\lambda) = \dfrac{\Gamma(\lambda)}{i^\lambda} - \displaystyle\int_0^\alpha u^{-1+\lambda}\left[1 + iu + \tfrac{1}{2}i^2u^2 + \ldots\right] du \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(\lambda)}{i^\lambda} - \left[\dfrac{\alpha^\lambda}{\lambda} + i\,\dfrac{\alpha^{1+\lambda}}{1+\lambda} + \dfrac{i^2}{2}\cdot\dfrac{\alpha^{2+\lambda}}{2+\lambda} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Um den Grenzwert für $\lambda = 0$ zu finden, benutzen wir die Relationen

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}$$

und

$$\Gamma(1-\lambda) = \Gamma(1) - \lambda\Gamma'(1),$$

weiter ist

$$i^{-\lambda} = i^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} = \left(1 - i\frac{\pi}{2}\lambda\right),$$

so daß

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{i^\lambda} = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\,\frac{\left(1 - i\frac{\pi}{2}\lambda\right)}{\Gamma(1) - \lambda\Gamma'(1)} + \frac{1}{\lambda}\left[\Gamma'(1) - \frac{\pi}{2}i\right].$$

Es ist ferner

$$\frac{\alpha^\lambda}{\lambda} = \frac{1 + \lambda\log\alpha + \ldots}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \log\alpha + \ldots$$

Hieraus ergibt sich endlich für $f(\alpha,\lambda)$, indem wir den Grenzübergang ausführen

$$(45)\quad f(\alpha,\lambda) = \Gamma'(1) - i\frac{\pi}{2} - \log\alpha - i\alpha - \frac{i^2}{2}\frac{\alpha^2}{2} - \ldots$$

und wir erhalten

$$(46)\quad \begin{cases} J = \dfrac{1}{V}\int\ldots\int d\Omega\, d\Omega' \dfrac{w_2 m}{3}\left[\alpha^{-1}e^{i\alpha} + i\left(\Gamma'(1) - i\,\dfrac{\pi}{2}\right.\right. \\ \qquad \left.\left. - \log\alpha - i\alpha - \dfrac{i^2}{2}\,\dfrac{\alpha^2}{2} - \ldots\right)\right], \end{cases}$$

ganz ähnlich wie im Falle des einfachen Ions. Analog wie früher, setzen wir die Werte für V und

$$(47)\quad m\varrho w_2 = \alpha R^2$$

ein und entwickeln $e^{i\alpha}$ nach Potenzen von α. Bei der Ausführung der Integration über $d\Omega\, d\Omega'$ fällt aus Symmetriegründen wieder

$$\int\ldots\int \alpha\, d\Omega\, d\Omega'$$

weg und es bleibt

$$J = 1 - i\,\frac{8R^3}{16\pi^2 R^3 \cdot 8}\int\ldots\int d\Omega\, d\Omega'\,[\alpha\log\alpha + (i+\tfrac{1}{2})\,\alpha^2 + \ldots].$$

Hier wird der Wert von α wieder eingeführt und berücksichtigt, daß das Glied mit α^2 und die folgenden unendlich klein von höherer Ordnung sind. Es wird dann

$$J = 1 - \frac{i}{16\pi^2}\int\ldots\int \frac{m\varrho w_2}{R^3}\,(\log w_2 - \log R^3)\, d\Omega\, d\Omega', \tag{48}$$

wo der zweite Teil wegen der Symmetrie von w_2 verschwindet. Führen wir die *Zahl der Atome pro Volumeinheit* n ein, so ist wieder

$$N = \frac{4\pi}{3}\cdot R^3\cdot n, \tag{49}$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{16\pi^2}\int\ldots\int w_2\,\log w_2\, d\Omega\; d\Omega' = \bar{w}_2 \tag{50}$$

nennen, so wird

$$J = 1 - m\varrho i\cdot\frac{4\pi\cdot 3n}{4\pi\cdot 3R^3 n}\cdot\bar{w}_2 = 1 - \frac{m\varrho i n\bar{w}_2 4\pi}{3N},$$

und

$$J^N = e^{-\frac{4\pi}{3}\cdot m\varrho i n\bar{w}_2}. \tag{51}$$

Wir sind somit zu einem ähnlichen Ausdruck gelangt, wie im Falle des einfachen Ions. $\bar{w}_2$ ist dabei eine reine Zahl, die aus dem früher abgeleiteten Wert von w_2 zu bestimmen ist. Nach (16) lautete dieser:

$$\left\{\begin{aligned} w_2 = \{&\cos\vartheta_1 - 3\cos\vartheta_2\,[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ &+ \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)]\}. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Wir brauchen

$$\bar{w}_2 = \frac{1}{16\pi^2}\int w_2\log w_2\, d\Omega\, d\Omega'. \tag{53}$$

Bei der Auswertung dieses Integrals ist zu beachten, daß w_2 innerhalb des Integrationsgebietes ebenso oft und mit

gleichem Gewicht positiv wie negativ ist. Es wird daher zu jedem $w_3 \log w_3$ ein $-w_3 \log(-w_3)$ existieren, und das gesamte Integral ist die Summe dieser beiden Teile über positive und über negative w_3. Bezeichnen wir die Integration über positive w_3 durch ein r, und die Integration über negative w_3 durch ein i, so ist

$$(54)\quad \bar{w}_3 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\int_r w_3 \log w_3 \, d\Omega \, d\Omega' + \int_i -w_3 \log(-w_3)\, d\Omega \, d\Omega'\right].$$

Da

$$\log(-w_3) = \log w_3 + i\pi,$$

so sind

$$(55)\quad \bar{w}_3 = -\frac{1}{16\pi^2} i\pi \int_i |w_3| \, d\Omega \, d\Omega',$$

wo das Integral nur über die Gebiete zu nehmen ist, wo w_3 negativ ist, oder was auf dasselbe herauskommt, über die Gebiete wo w_3 positiv ist. Ich habe es vorgezogen, das Integral auf graphischem Wege auszuwerten, es wurde so gefunden:

$$\bar{w}_3 = -\pi i \cdot 0{,}345.$$

Dadurch erhalten wir

$$(56)\quad J^N = e^{-\frac{4\pi^2}{3}\cdot \varrho \cdot 0{,}345\, n\pi} = e^{-4{,}54\, \varrho\, n\pi}.$$

Wir werden dann zum Quadrupol übergehen.[1])

---

1) Die graphische Integration wurde in der folgenden Weise gemacht. Zunächst wurden die Koordinaten etwas transformiert, indem

$$\sin\vartheta_1 = y_1, \quad \cos\vartheta_1 = x_1, \quad \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 = -dx_1,$$
$$\sin\vartheta_2 = y_2, \quad \cos\vartheta_2 = x_2, \quad \sin\vartheta_2 \, d\vartheta_2 = -dx_2,$$

gesetzt wurde. (52) lautet dann:

$$w_3 = x_1 - 3x_2\,[x_1 x_2 + y_1 y_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Bei einem bestimmten Wert von $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ist dieser Ausdruck eine Funktion von den Koordinaten x_1 und x_2. Wir können sie zur Darstellung bringen, wenn wir die „Äquiskalarkurven" von w_3 in einer $x_1 x_2$-Ebene zeichnen, d. h. die Kurven, längs denen w_3 einen konstanten Wert hat. Die Konstruktion der Äquiskalarkurven geschah, indem zunächst ähnliche „Karten" für die einzelnen Glieder von w_3 gezeichnet wurden, die dann graphisch addiert wurden. Man braucht dabei fast gar nicht zu rechnen, weil alle Operationen graphisch ausgeführt werden können. Denkt man sich die Äquiskalarkurven als Höhenkurven, wie in einer topographischen Karte, so ist das Integral von w_3 über die Fläche gleich dem Inhalt des von der durch die Höhenkurven gelegenen

§ 12. *Berechnung von J^N bei $p = 4$.*

In diesem Falle hatten wir für J gefunden:

$$J = \frac{1}{V}\int_{\Omega}\dots\int_{\Omega'}\frac{(A\varrho w_4)^{3/4}}{2^{3/4}\cdot 4}\int_{a}^{\infty} e^{iu}u^{-3/4}\,du\,d\Omega\,d\Omega'. \tag{57}$$

Das Integral über u berechnen wir in genau analoger Weise wie im Falle des einfachen Ions, $p = 2$. Da die Rechnung gegenüber diesem nichts Neues bietet, werden wir sie hier nur kurz angeben. Es wird

$$\int_{a}^{\infty} e^{iu}u^{-3/4}\,du = \tfrac{4}{3}e^{ia}\alpha^{-3/4} + \tfrac{4}{3}i\int_{0}^{\infty} e^{iu}u^{-3/4}\,du - \tfrac{4}{3}i\int_{0}^{a} e^{iu}u^{-3/4}\,du$$

$$= \tfrac{4}{3}\left[e^{ia}\alpha^{-3/4} + ie^{i\frac{\pi}{8}}\Gamma(\tfrac{1}{4}) - 4i\alpha^{3/4} - \frac{4i^3}{5}\alpha^{3/4} - \dots\right].$$

Den Wert von α

$$\alpha = \frac{A\varrho w_4}{2\cdot R_0^4} \tag{58}$$

berücksichtigt, und mit Unterdrückung der unendlich kleinen Größen höherer Ordnung erhalten wir

$$J = \frac{1}{16\pi^2}\int\dots\int d\Omega\,d\Omega'\left[1 + e^{i\frac{5\pi}{8}}\Gamma(\tfrac{1}{4})\cdot\left(\frac{A\varrho w_4}{2}\right)^{3/4}\cdot\frac{1}{R_0^3}\right].$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\overline{w}_4^{3/4} = \frac{1}{16\pi^2}\int\dots\int d\Omega\,d\Omega' w_4^{3/4} \tag{59}$$

und erheben wir zur N^{ten} Potenz, so wird

$$J^N = e^{i\frac{5\pi}{8}\cdot N}\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\cdot\frac{4\pi}{8}\cdot n\left(\frac{A\varrho}{2}\right)^{3/4}\cdot\overline{w}_4. \tag{60}$$

Fläche abgeschlossenen Volumens. Dieser Volumeninhalt wurde so gefunden, daß man den Flächeninhalt sämtlicher Höhenkurven planimetrierte. Die Flächeninhalte wurden mit den zugehörigen Höhen wieder in ein Koordinatensystem eingetragen und der Inhalt der sich daraus ergebenden Kurve planimetriert. Der letztere Inhalt gibt dann das Integral von w_3 über x_1 und x_2 bei dem bestimmten $(\varphi_1 - \varphi_2)$, wo die Zeichnung ausgeführt war. Für mehrere Werte von $(\varphi_1 - \varphi_2)$ wurde dasselbe wiederholt und die erhaltenen Werte dazu benutzt um, eine neue Kurve zu zeichnen mit $(\varphi_1 - \varphi_2)$ als Abszisse und die zugehörigen Integrale als Ordinaten. Der Flächeninhalt dieser letzteren Kurve gibt dann das gesuchte Integral.

Da wir oben das Integral $w_3 \gtrless 0$ haben wollen, so kann das leicht geschehen, indem man nur diese Teile der x_1x_2-Ebene berücksichtigt.

Zur Berechnung von $\bar{w}_4^{3/4}$ verwenden wir den früher berechneten Ausdruck für w_4 [vgl. Gl. (24)]:

$$(61)\quad \begin{cases} w_4 = \{2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\} \\ \qquad\qquad (7-15\cos^2\vartheta_2). \end{cases}$$

Das Integral wurde graphisch ausgewertet, es ergab sich so:

$$\bar{w}_4^{3/4} = 1{,}66\,(1+i^{3/4}).$$

Dadurch wird der Exponent in J^N:

$$e^{i\frac{5\pi}{8}}\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\cdot\frac{4\pi}{8}\cdot 1{,}66\cdot\left(1+e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\cdot n\left(\frac{A\varrho}{2}\right)^{3/4}.$$

Hier ist:

$$e^{i\frac{5\pi}{8}}\cdot\left(1+e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) - e^{i\frac{5\pi}{8}} + e^{-i\frac{5\pi}{8}} = 2\cos\frac{5\pi}{8} = -0{,}7665.$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right) = 3{,}626$$

und also der Exponent:

$$-11{,}49\,n\,(A\varrho)^{3/4}$$

$$(62)\qquad J^N = e^{-11{,}49\,n\,(A\varrho)^{3/4}}.$$

Mit der Aufstellung von J^N ist der erste Teil der Berechnung von der Wahrscheinlichkeitsfunktion erledigt. Wir können dann zum zweiten Teil übergehen und die Funktion selbst finden.

5. Fortsetzung der Berechnung von $W(X_0\,Y_0\,Z_0)$.

§ 13. Die Gleichung für W lautete nach (8):

$$(8)\quad \begin{cases} W(X_0\,Y_0\,Z_0)\,dX_0\,dY_0\,dZ_0 \\ \quad = dX_0\,dY_0\,dZ_0\,\dfrac{1}{8\pi^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int d\xi\,d\eta\,d\zeta\,e^{-i(\xi X_0+\eta Y_0+\zeta Z_0)}J^N. \end{cases}$$

Dabei ist für das einfache Ion:

$$J^N = e^{-4{,}21\,n\varrho^{3/4}z^{3/4}},$$

für den Dipol:

$$J^N = e^{-4{,}54\,\varrho\,m\,n}$$

und für den symmetrischen Quadrupol:

$$J^N = e^{-11{,}49\,n\,A^{3/4}\varrho^{3/4}}.$$

Man bemerkt, daß nur beim Dipol ϱ mit dem Exponenten 1 auftritt, in den beiden anderen Fällen ist der Exponent von ϱ gebrochen. Aus diesem Grunde wollen wir zunächst den Fall des Dipols untersuchen, die beiden anderen Fälle werden sich dann als Modifikationen davon ergeben. Beim Dipol lassen sich die Gleichungen vollkommen ausintegrieren.

§ 14. *Dipol*, $p = 3$.

Es ist:

$$W(X_0\, Y_0\, Z_0) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{-i(\xi X_0 + \eta Y_0 + \zeta Z_0)} \cdot e^{-c_3 \varrho},$$

wo

$$c_3 = 4{,}54\, m\, n.$$

Wir bemerken, daß in diesem Ausdruck X_0, Y_0, Z_0 einen Vektor darstellt, der vollkommen unabhängig ist von dem Vektor ξ, η, ζ. Wir haben daher bei der Integration über ξ, η, ζ den Vektor $X_0\, Y_0\, Z_0$ als feststehend zu betrachten und können ihn zur Z-Achse des ξ, η, ζ-Koordinatensystems machen. Dann wird:

$$\xi X_0 + \eta Y_0 + \zeta Z_0$$

das skalare Produkt der beiden Vektoren oder:

$$(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{s}) = F_0\, \varrho \cos\vartheta,$$

wo:

$$F_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2},$$
$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

und $\cos\vartheta$ den Winkel zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{F}_0$ bedeutet oder mit unserer Festsetzung den Polarwinkel. Wir führen dann statt der rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ Polarkoordinaten ein, ϱ, ϑ und φ, wobei:

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \varrho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho$$

zu setzen ist. Dadurch wird das Integral:

$$(63)\quad W(X_0\, Y_0\, Z_0) = \frac{1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \cdot \varrho^2\, d\varrho \cdot e^{-iF_0\varrho\cos\vartheta} e^{-c_3\varrho}.$$

Die Integration nach ϑ und φ kann sofort ausgeführt werden, sie ist von 0 bis π bzw. 2π zu erstrecken und ergibt:

$$(64)\quad W(X_0\, Y_0\, Z_0) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \varrho^2\, d\varrho\, e^{-c_3\varrho} \cdot \frac{2}{F_0\varrho}\sin(F_0\varrho).$$

Wir schreiben hier statt $\sin(F_0\varrho)$ die Exponentialfunktion und nehmen nachher den imaginären Teil:

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^3}\Im\int_0^\infty \frac{\varrho}{F_0}\cdot e^{(-c_3+F_0 i)\varrho}\,d\varrho\,. \tag{65}$$

Durch die Substitution:

$$(-c_3 + F_0 i)\varrho = -t$$

wird dieses Integral eine Gammafunktion, da das Integral im Unendlichen überall gleich ist, und wir erhalten:

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^3}J\cdot\frac{\Gamma(2)}{(-c_3+F_0 i)^2}\cdot\frac{1}{F_0} = \frac{1}{\pi^3}\,\frac{c_3}{(c_3^2+F_0^2)^2}\,. \tag{66}$$

Damit sind wir fertig. Die Gleichung (66) gibt uns in geschlossener Form die Wahrscheinlichkeit als Funktion der Feldstärke F_0. Es wird zweckmäßig sein, (66) etwas umzuformen, indem wir eine „Normalfeldstärke" F_n einführen, welche gleich c_3 zu setzen ist:

$$F_n = c_3 = 4{,}54\,m\,n\,, \tag{67}$$

wo m das Moment und n die Anzahl pro ccm der Dipole bedeuten. Weiter wollen wir das Verhältnis der wirklichen Feldstärke zur Normalfeldstärke mit einer besonderen Bezeichnung versehen und schreiben:

$$\frac{F_0}{F_n} = \beta. \tag{68}$$

Um nun weiter anstatt $W(X_0\,Y_0\,Z_0)\,dX_0\,dY_0\,dZ_0$, die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Feldstärke F_0 zu finden, haben wir für das Volumenelement $dX_0\,dY_0\,dZ_0$ das Element zu nehmen:

$$4\pi F_0^2\,dF_0.$$

Es wird dann mit den obigen Bezeichnungen nach einer leichten Rechnung:

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\beta^2\,d\beta}{(1+\beta^2)^3}\,. \tag{69}$$

β ist als die Feldstärke aufzufassen, in einer Einheit gemessen die charakteristisch für die betreffenden Atome und für die Gasdichte ist. Es ist diese Einheit:

$$F_n = 4{,}54\cdot n\cdot m, \tag{70}$$

also proportional zur Dichte des Gases, weil n die Atomzahl pro ccm bedeutet, und zum elektrischen Moment der Dipole m.

Diese Beziehung wird noch später von Bedeutung sein, wenn wir die Abhängigkeit der Verbreiterung von der Gasdichte und von der Art der störenden Atome untersuchen werden.

Die Gleichung (69) gibt eine Kurve wie in Fig. 3, wo als Abszisse β und als Ordinate $W(F)$ verwendet sind. Das Charakteristische bei der Form der Kurve ist der steile Anstieg zum Maximum bei $\beta = 1$, $(F_0 = F_s)$ und der relativ langsame Abfall nach größeren Werten von β. Wir werden dasselbe auch beim Ion und beim Quadrupol finden. Die Wahrscheinlichkeit für die Feldstärke 0 ist gleich Null. Dies heißt, daß eigentlich niemals eine ganz unverbreiterte Linie ausgesandt wird, immer herrscht ein stärkeres oder schwächeres Feld am Ort des emittierenden Atoms, welches eine Verbreiterung bewirkt.

Wir wollen dann noch das einfache Ion und den symmetrischen Quadrupol behandeln und zur Aufstellung von ähnlichen Kurven wie (69) gelangen.

§ 15. $p = 2$. *Einfaches Ion.*

Wir verwenden dieselbe Methode wie beim Dipol und setzen also in (8)

$$(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}) = F_0 \varrho \cos \vartheta,$$

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \varrho^2 \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho.$$

Weiter ist:

$$J^N = e^{-4{,}21 n \varrho^{3/2}} e^{\beta \varrho^{3/2}} = e^{-\alpha_2 \varrho^{3/2}}.$$

Die Integration nach ϑ und φ liefert dann an Stelle von (64) die Gleichung:

$$W(X_0 Y_0 Z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \varrho^2\, d\varrho\, e^{-\alpha_2 \varrho^{3/2}} \cdot \frac{2}{F_0 \varrho} \sin (F_0 \varrho). \tag{71}$$

Da das Integral nicht in geschlossener Form auszurechnen ist, müssen wir auf eine Reihenentwicklung zurückgreifen. Um zunächst eine Reihenentwicklung für kleine Werte von F_0 zu erhalten, schreiben wir in (71):

$$\left\{ \begin{aligned} F_0 \varrho &= v^{3/2}, \\ d\varrho &= \frac{2}{3} \frac{1}{F_0} \cdot dv\, v^{-1/2}, \\ \beta &= \frac{F_0}{c_2^{3/2}}. \end{aligned} \right. \tag{72}$$

Eine kleine Zwischenrechnung ergibt dann:

$$(73)\quad W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{F_0^{\,3}}\int_0^\infty e^{-\frac{c_2}{F_0^{3/2}}\cdot v}\cdot v^{3/2}\sin v^{3/2}\,dv.$$

Für $\sin v^{3/2}$ schreiben wir die Reihe:

$$\sin v^{3/2} = v^{3/2} - \frac{1}{6}v^{9/2} + \frac{1}{120}v^{15/2} - \frac{1}{5040}v^{21/2} + \ldots,$$

also

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} W(X_0\,Y_0\,Z_0) &= \frac{1}{3\pi^2 F_0^{\,3}}\int_0^\infty e^{-\frac{c_2}{F_0^{3/2}}\cdot v} \\ &\quad\left[v - \frac{1}{6}v^{9/2} + \frac{1}{120}v^{15/2} - \frac{1}{5040}v^{21/2} + \ldots\right]dv. \end{aligned}\right.$$

Jedes einzelne Glied ist hier eine Gammafunktion, und läßt sich sofort angeben. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$(75)\quad \frac{c_2}{F_0^{3/2}} = \frac{1}{\beta^{3/2}} = \left(\frac{F_n}{F_0}\right)^{3/2},$$

d. h. wir verwenden als Einheit für die Feldstärke eine „Normalfeldstärke"

$$(76)\quad F_n = c_2^{\,2/3}.$$

Es bedeutet hier:

$$c_2 = 4{,}21\,n\,\varepsilon^{2/3},$$

wo n die Anzahl der Moleküle pro ccm und ε die Ladung des Ions bedeuten. Es wird somit

$$(76a)\quad F_n = 2{,}61\,n^{2/3}\varepsilon.$$

Daß sie wirklich die Dimension einer Feldstärke hat, ist daraus zu ersehen, daß n die Dimension $[l^{-3}]$ hat, also

$$F_n = [e^{-2}\varepsilon],$$

wie es sein muß.

Wir messen wie früher die Feldstärke durch das Verhältnis der wirklichen und der normalen Feldstärke

$$(77)\quad \beta = \frac{F_0}{F_n}.$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt die Integration von (74):

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} W(X_0\,Y_0\,Z_0) &= \frac{1}{3\pi^2 F_0^{\,3}}\cdot\left[\Gamma(2)\beta^3 - \frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)\beta^5\right. \\ &\quad\left. + \frac{1}{120}\Gamma\left(\frac{14}{3}\right)\beta^7 - \frac{1}{5040}\Gamma(6)\beta^9 + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Es ist nun bekanntlich:

$$\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$
$$\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{11}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),$$
$$\Gamma(2) = 1,$$
$$\Gamma(6) = 5!$$

weiter ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2{,}678, \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1{,}355.$$

Die Ausrechnung der Zahlen liefert:

$$W(X_0\, Y_0\, Z_0) = \frac{1}{3\pi^2 F_0^3}\cdot \left[\beta^3 - 0{,}4628\,\beta^5 + 0{,}1227\,\beta^7 - 0{,}02325\,\beta^9 + \ldots\right].$$

Wir multiplizieren beiderseits mit $F_0^2 dF_0 \cdot 4\pi$, um die Wahrscheinlichkeit für F_0 zu finden:

$$(79)\quad \begin{cases} W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{3\pi}\cdot\beta^2 d\beta \\ \qquad \left[1 - 0{,}4628\,\beta^3 + 0{,}1227\,\beta^4 - 0{,}02325\,\beta^6 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Wir haben somit eine Reihenentwickelung gewonnen, die für kleine Feldstärken, β klein, gut konvergiert. Die Ähnlichkeit mit (69) ist sofort zu sehen, wir kommen darauf noch zurück.

Wir wollen noch eine Entwickelung für große β geben. Zu diesem Zweck schreiben wir in (71) statt der Exponentialfunktion ihre Reihenentwickelung, statt des Sinus schreiben wir die Exponentialfunktion und nehmen nachher den imaginären Teil. Dies gibt:

$$W(X_0\, Y_0\, Z_0) = \frac{1}{4\pi^2 F_0}\,\Im\int_0^\infty d\varrho\;\varrho\, e^{iF_0\varrho}$$
$$\left[1 - c_2\,\varrho^{3/2} + \frac{c_2^2}{2}\varrho^3 - \frac{c_2^3}{6}\varrho^{9/2} + \frac{c_2^4}{24}\varrho^6 - \ldots\right].$$

Mit Hilfe der Substitution

$$iF_0\varrho = -t, \quad d\varrho = -\frac{dt}{iF_0}$$

läßt sich jedes einzelne Glied auf eine Gammafunktion reduzieren und wenn wir noch nach (75) die Größe β einführen,

erhalten wir die Reihe

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{4\pi^3 F_0}\,\Im\left[\frac{\Gamma(2)}{(i\,F_0)^2} - \frac{c_3}{(i\,F_0)^{7/2}}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{c_3^2}{(i\,F_0)^5}\,\Gamma(5)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{6}\,\frac{c_3^3}{(i\,F_0)^{12/2}}\,\Gamma\left(\frac{13}{2}\right) + \frac{1}{24}\,\frac{c_3^4}{(i\,F_0)^8}\,\Gamma(8) + \ldots\right]$$

und

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{dF_0}{\pi F_0}\,\Im\left[\Gamma(2) - \frac{1}{i^{7/2}\beta^{7/2}}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\beta^5 i^5}\,\Gamma(5)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{6}\,\frac{1}{\beta^{7/2} i^{7/2}}\,\Gamma\left(\frac{13}{2}\right) + \frac{1}{24}\,\frac{1}{i^8\beta^8}\,\Gamma(8) + \ldots\right].$$

Nach einer kleinen Rechnung erhalten wir endlich hieraus die Reihe:

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{d\beta}{\pi\beta}\cdot\left[\frac{15}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\beta^{7/2}} + 12\,\frac{1}{\beta^5}\right.$$
$$\left. - \frac{99\cdot 35}{16\cdot 8}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\beta^{9/2}} + 0\cdot\frac{1}{\beta^6} + \ldots\right]$$

oder etwas umgeformt und die Zahlenwerte hereingesetzt:

$$(80)\quad \begin{cases} W(F_0)\,dF_0 = \dfrac{d\beta}{\pi\beta^{7/2}}\cdot 2{,}350 \\ \qquad \left[1 + 5{,}106\,\dfrac{1}{\beta^{7/2}} - 7{,}4375\,\dfrac{1}{\beta^5} + 0\cdot\dfrac{1}{\beta^{9/2}} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Auch diese Reihe ist im wesentlichen analog zu der Kurve beim Dipol. Der hauptsächliche Unterschied ist, daß $W(F_0)\,dF_0$ bei Dipol wie $1/\beta^2$ verschwindet, während beim einfachen Ion

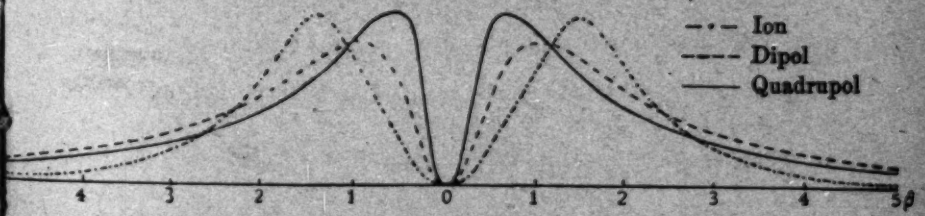


Fig. 3.

der Abfall etwa stärker ist, nämlich wie $1/\beta^{7/2}$. Nach den beiden Darstellungen (79) und (80) wurde die Kurve berechnet, es ergab sich so die strichpunktierte Kurve in Fig. 3. Da die Reihe (80) semikonvergent ist, dürfen wir sie nur für genügend kleine Werte von $1/\beta$ verwenden, im besonderen ist sie wichtig, um den Abfall im Unendlichen zu zeigen.

§ 16. $p = 4$, *Quadrupol.*

Beim Quadrupol lautet die Gleichung (8)

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{8\pi^3}\int\int\int \varrho^2\,d\varrho\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,e^{-iF_0\varrho\cos\vartheta}\cdot e^{-c_4\varrho^{3/4}},$$

wo die Konstante c_0 den Wert hat

$$c_4 = 11{,}49\cdot n\cdot A^{3/4}.$$

Integration nach ϑ und φ ergibt wieder

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^3}\int_0^\infty \varrho^2\,d\varrho\,e^{-c_4\varrho^{3/4}}\frac{\sin(F_0\varrho)}{F_0\varrho}.$$

Wir führen als neue Variabele ein

$$F_0\varrho = v$$

und definieren die Normalfeldstärke

$$\beta = \frac{F_0}{c_4^{4/3}}.$$

Es wird dann

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^3 F_0^3}\int_0^\infty e^{-(v/\beta)^{3/4}} v\sin v\,dv. \tag{81}$$

Für das Integral läßt sich eine gut konvergierende Reihe angeben, wenn β groß ist. Wir führen zu diesem Zweck statt der Exponentialfunktion die Entwickelung nach Potenzen von $(v/\beta)^{3/4}$ ein und schreiben anstatt $\sin v$

$$\sin v = \Im\cdot e^{iv},$$

wo $\Im$ den imaginären Teil bedeutet. Damit wird unser Integral

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^3 F_0^3}\,\Im\int_0^\infty v\,e^{iv}\left\{1-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/4}+\frac{1}{2!}\left(\frac{v}{\beta}\right)^{6/4}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3!}\left(\frac{v}{\beta}\right)^{9/4}+\frac{1}{4!}\left(\frac{v}{\beta}\right)^{12/4}-\ldots\right\}.$$

Jedes einzelne Glied ist hier eine Gammafunktion; wie eine leichte Rechnung ergibt, wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$W(X_0\,Y_0\,Z_0) = \frac{1}{2\pi^3 F_0^3}\left[\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)\cos\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/4}\right.$$
$$-\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{14}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{6/4}-\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{17}{4}\right)\sin\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{9/4}$$
$$\left.+\frac{1}{24}\Gamma\left(\frac{20}{4}\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{12/4}-\frac{1}{120}\cdot\Gamma\left(\frac{23}{4}\right)\sin\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{15/4}\right].$$

Die Einsetzung der Zahlenwerte ergibt mit

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3{,}626, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}772, \quad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1{,}225$$

die Reihe

$$W(F_0)\,dF_0 = \frac{2\,dF_0}{\pi F_0} \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/4} \cdot 1{,}610 \left[1 - 0{,}730\left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/4} - 0{,}328\left(\frac{1}{\beta}\right)^{6/4} + 0{,}621\left(\frac{1}{\beta}\right)^{9/4} - 0{,}163\left(\frac{1}{\beta}\right)^{12/4} + \ldots\right].$$

Wir können hier statt F_0/F_∞ β einführen:

$$\frac{dF_0}{F_0} = \frac{d\beta}{\beta}$$

und wollen noch zur besseren Vergleichung mit der früheren Formel beim Dipol den Faktor

$$\frac{4}{\pi}$$

vorstellen.

$$(82)\quad \begin{cases} W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{\pi}\,\frac{d\beta}{\beta^{3/4}} \cdot 0{,}805 \left[1 - 0{,}730\,\frac{1}{\beta^{3/4}} \right. \\ \qquad\qquad \left. - 0{,}328\,\frac{1}{\beta^{6/4}} + 0{,}621\,\frac{1}{\beta^{9/4}} - 0{,}163\,\frac{1}{\beta^{3}} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Diese Reihe wurde zur Berechnung von $W(F_0)\,dF_0$ für β zwischen 1 und ∞ benutzt. Zur Berechnung von $W(F_0)\,dF_0$ im übrigen Gebiet $0 < \beta <$ habe ich das Integral graphisch ausgewertet. Die Reihe, die man in ähnlicher Weise erhalten kann wie im Falle $p = 2$, ist nämlich so wenig konvergent, daß sie schlecht zu benutzen ist. Zum Vergleich führe ich sie hier an, ohne die Ausrechnung, die genau analog dem früheren geschieht:

$$(83)\quad W(F_0)\,dF_0 = \frac{4}{3}\,\frac{4}{\pi}\,\beta^3\,d\beta\left[1 - 2{,}44\,\beta^2 + 11{,}25\,\beta^4 - 72\,\beta^6 + \ldots\right].$$

Das Resultat der Berechnungen ist in der Fig. 3 angegeben. Die Kurve hat im wesentlichen denselben Verlauf wie früher, nur liegt das Maximum näher am Anfang. Wie wir sehen werden, bedingt dies, daß die Linien durch die Verbreiterung nicht so flach werden wie in den anderen Fällen, die Verbreiterung tritt sozusagen weniger leicht ein.

6. Die Verbreiterung der Spektrallinien durch den Starkeffekt.

§ 17. Wir wollen im folgenden dazu übergehen, die Verbreiterung zu berechnen, welche eine emittierte Spektrallinie wegen des wechselnden Feldes der umliegenden Atome erfährt. Wir haben uns dabei das Zustandekommen der Verbreiterung folgendermaßen vorzustellen. In jedem Augenblick existiert am Ort des Atoms ein bestimmtes Feld, welches im Laufe der Zeit fortwährend wechselt. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Feld im gegebenen Moment gerade den Wert F hat[1]), haben wir mit $W(F)$ bezeichnet, und wir haben die Größe $W(F)\,dF$ angegeben. In dem Moment, wo das Feld F herrscht, wird nun eine Linie emittiert, die in der bekannten Weise aufgespalten ist. Die Intensitätsverteilung in dieser aufgespaltenen Linie wollen wir durch

$$d\nu\, J = J(F,\nu)\cdot d\nu \tag{84}$$

bezeichnen. J ist dann die Intensität in irgendeinem relativen Maße bei der Schwingungszahl ν und der Feldstärke F. Wir müssen nun diese Intensitätsverteilung mit der Wahrscheinlichkeit für eben die Feldstärke F multiplizieren und über alle F integrieren. Das Resultat gibt uns dann die Intensitätsverteilung in der verbreiterten Linie. Es ist also

$$J\,d\nu = d\nu \int_0^\infty J(F,\nu)\cdot W(F)\,dF \tag{85}$$

das Intensitätsverteilungsgesetz.

Im allgemeinen Falle ist nun $J(F,\nu)$ eine sehr komplizierte Funktion von ν und F. Auf Grund eines genauen Beobachtungsmaterials könnte man die obige Integration graphisch ausführen, es wäre allerdings eine mühsame Arbeit, die kaum lohnen würde. Wir können aber zu einer vollkommen genügenden Darstellung gelangen, wenn wir die genaue Intensitätsverteilung im Starkeffekt ersetzen durch eine ganz einfache, die etwa als ein Mittelwert der richtigen anzusehen ist. Dadurch erreichen wir, daß das Integral leicht auszuführen ist, ev. graphisch. Die einfachste Annahme, die auch recht gut

1) Wir wollen den Index 0 an der Feldstärke weglassen, da er nunmehr überflüssig ist.

mit den Beobachtungen stimmt, ist die, daß die Linie durch den Starkeffekt in ein breites Band ausgezogen wird. Die Intensität sei überall im Band dieselbe und falle an den Rändern scharf zu Null ab. Eine solche Intensitätsverteilung ist also durch ein Rechteck darzustellen, mit einer Höhe gleich der Intensität und einer Breite gleich dem Abstand der äußersten Komponenten im Starkeffekt. Es ist ohne weiteres klar, daß es gleichgültig ist, ob diese parallel oder senkrecht zum Feld polarisiert sind. Den gesamten Flächeninhalt des Rechtecks wollen wir bei allen Feldstärken konstant annehmen, es entspricht dies, daß die gesamte Lichtenergie der Linie bei allen Feldstärken konstant ist. Diese letztere Annahme wird vielleicht nicht ganz zutreffend sein, vielmehr ist es wahrscheinlich, daß die Gesamtenergie der Linie mit der Feldstärke variiert.[1]) Da jedoch über diese Änderung nichts Genaues bekannt ist, so müssen wir auf ein Eingehen auf diese Frage verzichten. Daß es berechtigt ist, den Starkeffekt durch ein solches Rechteck darzustellen, sieht man sofort aus den Figuren von Stark, welche die Feinzerlegung der Wasserstofflinien zeigen, in der Tat ist hier der ganze Raum zwischen den äußeren Komponenten ziemlich gleichmäßig mit Linien erfüllt. Ihre Schwärzungen schwanken in unregelmäßiger Weise, so daß wir sehr wohl eine mittlere Schwärzung verwenden können.

Es sei nun der gesamte Flächeninhalt der unzerlegten Linie gleich f. Wenn nun beim Starkeffekt im Felde F eine Zerlegung von der Größe ν_m eintritt, wobei $2\nu_m$ die Frequenzdifferenz der äußersten Komponenten darstellt, so muß die Höhe h des Rechtecks dadurch gegeben sein, daß

$$2\nu_m \cdot h = f. \tag{86}$$

Die unzerlegte Linie mag die Schwingungszahl ν_0 haben. h stellt dabei die Intensität bei der Frequenz ν dar, es ist also das, was wir mit $J(F, \nu)$ bezeichnet haben. Nur müssen wir erinnern, daß $J(F, \nu)$ gleich Null zu setzen ist für alle ν, die außerhalb des Gebietes $2\nu_m$ liegen. Es ist also

$$\begin{cases} J(F,\nu) = \dfrac{f}{2\nu_m} \text{ innerhalb } 2\nu_m, \\ J(F,\nu) = 0 \text{ außerhalb } 2\nu_m. \end{cases} \tag{87}$$

1) Vgl. J. Stark, l. c.

Zu einer Intensität bei der Frequenz ν werden nun alle diejenigen Rechtecke einen Beitrag liefern, für die $\nu_m \geqq |\nu - \nu_0|$ ist, alle kürzeren Rechtecke liefern keinen Beitrag. Der Beitrag, den ein Rechteck liefert, ist durch obige Gleichung (87) gegeben. Wir erhalten demnach die gesamte Intensität, indem wir über alle Rechtecke integrieren, die länger sind als $2\nu_m$ oder

$$J d\nu = d\nu \int_{F'}^{\infty} \frac{f}{2\nu_m} \cdot W(F)\, dF. \tag{88}$$

Es ist hier ν_m noch als Funktion von F zu denken, F' ist diejenige Feldstärke, welche die Aufspaltung $2(\nu - \nu_0)$ hervorbringt.

Über die Abhängigkeit zwischen ν_m und F sind genaue Versuche von Stark[1]) und von Wilsar[2]) bekannt. Beide finden für Wasserstoff, daß ν_m genau proportional zu F ist. Der Proportionalitätsfaktor ist bei den verschiedenen Serienlinien verschieden, mit steigender Gliednummer der Linie wächst die Aufspaltung für eine bestimmte Feldstärke sehr stark. Bei Wasserstoff ist die Aufspaltung bedeutend größer als bei den anderen untersuchten Elementen, so ist sie z. B. bei Na D-Linien nur ein Bruchteil von der Aufspaltung der H_α-Linie.

Wir können demnach ansetzen:

$$2\nu_m = c F, \tag{89}$$

wodurch aus (88) wird:

$$J d\nu = d\nu \int_{F}^{\infty} \frac{f}{c \cdot F} \cdot W(F)\, dF. \tag{90}$$

Wenn wir dieses Integral ausgewertet haben, ist unsere Aufgabe gelöst. Da im Fall des Dipols das Integral sich direkt angeben läßt, wollen wir damit anfangen.

§ 18. *Berechnung der Verbreiterung beim Dipol.*

In diesem Falle lautet das Integral (90)

$$W(F)\, dF = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 d\beta}{(1+\beta^2)^2},$$

wo

$$\beta = \frac{F}{F_0}. \tag{91}$$

1) J. Stark, l. c.
2) H. Wilsar, Gött. Nachr. 1914.

Dies eingesetzt, ergibt aus (90)

$$(92)\quad J\,d\nu = d\nu\,\frac{4}{\pi}\int_{\beta'}^{\infty}\frac{f}{c\,F_n}\,\frac{\beta\,d\beta}{(1+\beta^2)^2} = d\nu\cdot\frac{f}{2\,c\,F_n}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+\beta'^2)}.$$

Der Wert von der unteren Grenze β' ist hier wegen (91) und der zu (89) entsprechenden

$$2(\nu-\nu_0) = c\,F'$$

$$(93)\quad \beta' = \frac{2(\nu-\nu_0)}{c\,F_n}.$$

Die Gleichung (92) ist in der Fig. 4 graphisch dargestellt (ausgezogene Linie), man erkennt sofort die gewöhnliche Gestalt der verbreiterten Spektrallinien. Was besonders interessiert, ist nun die Halbwertsbreite oder die Breite der Linie an der Stelle, wo J die Hälfte der maximalen Intensität hat. Bezeichnen wir diese Halbwertsbreite mit $2\nu'$, so ist bei dieser Frequenz [vgl. (92)]

$$\frac{1}{(1+\beta'^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\beta' = \frac{2(\nu-\nu_0)}{c\,F_n} = 1,$$

d. h.

$$(94)\quad 2\nu' = c\,F_n.$$

Wir können hier für F_n den früher schon berechneten Wert einsetzen [nach (70)]

$$(70)\quad F_n = 4{,}54\cdot n\cdot m,$$

wo n die Anzahl der störenden Atome pro ccm und m das elektrische Moment eines Dipols bedeuten. Wir erhalten somit

$$(95)\quad 2\nu' = c\cdot 4{,}54\cdot n\cdot m$$

für die Halbwertsbreite.

Zunächst bemerken wir aus dieser Gleichung, daß die Halbwertsbreite proportional zur Zahl n der Atome pro ccm ist, also auch proportional zur Dichte des Gases. Dies gilt nur, wenn das störende Gas aus Dipolen besteht; wie wir sehen werden, ist die Dichteabhängigkeit in den zwei anderen Fällen anders. Ehe wir zur Diskussion der Gleichung übergehen, wollen wir noch die Fälle $p = 2$ und $p = 4$ untersuchen. In beiden Fällen gilt die Gleichung (88). Aus (89) und (91) entnehmen wir

(96) $$2\nu_m = c \cdot F_n \cdot \beta,$$

und dies in (88) eingesetzt, ergibt

(97) $$J d\nu = d\nu \cdot \frac{f}{c F_n} \int_{\beta'}^{\infty} \frac{W(\beta)\, d\beta}{\beta},$$

wo wir an Stelle von $W(F)\,dF$ geschrieben haben $W(\beta)\,d\beta$, β' hat dieselbe Bedeutung wie in (93).

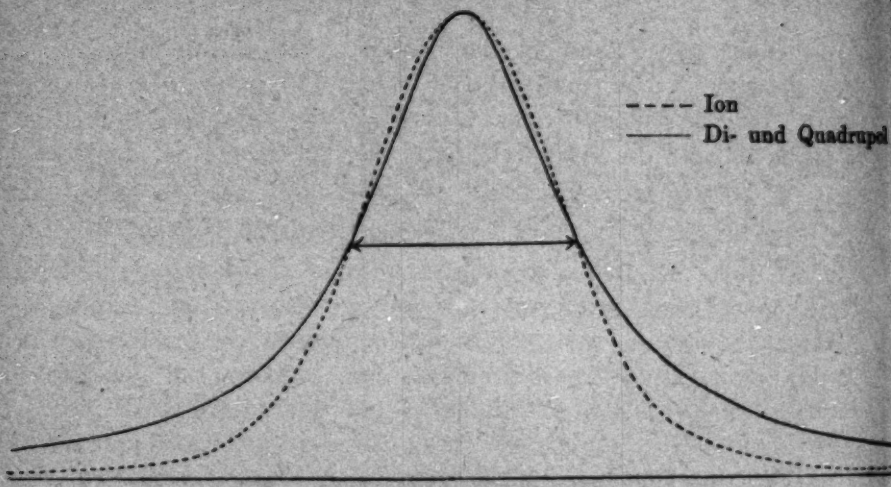


Fig. 4.

§ 19. *Berechnung der Verbreiterung bei $p = 2$ und $p = 4$.*

Die Integrale wurden für $p = 2$ und $p = 4$ graphisch ausgewertet. In der Fig. 4 sind sie als Funktion von β' aufgetragen.[1]) Über die Bedeutung von β' siehe Gleichung (93). Man sieht, daß nur die Kurve für das Ion sich von der Kurve bei $p = 3$ ein wenig unterscheidet, während bei $p = 4$ der Verlauf merkbar gleich ist. Was uns aber besonders interessiert, ist die Halbwertsbreite. Aus den Kurven kann man sofort den Wert von β entnehmen, der zu der Halbwertsbreite gehört. Dieser Wert ist bei

(98) $$\begin{cases} p = 2, & \beta = 1{,}25, \\ p = 4, & \beta = 0{,}67. \end{cases}$$

1) Der Abszissenmaßstab ist für jede Kurve so gewählt, daß die Halbwertsbreite dieselbe wird.

Daraus erhalten wir für die Halbwertsbreiten in ν ausgedrückt:

$$(99)\quad \begin{cases} 2\nu_h = 1{,}25\, c F_n \text{ beim Ion}, \\ 2\nu_h = 0{,}67\, c F_n \text{ beim Quadrupol}. \end{cases}$$

Maßgebend für die Breite wird also auch hier in erster Linie die „Normalfeldstärke" des Gases, F_n. Da aber F_n in den drei Fällen von der Dichte verschieden abhängig ist, so tritt dadurch auch eine verschiedene Dichteabhängigkeit der Breiten auf.

Wir führen die früher abgeleiteten Ausdrücke für F_n nach (70) ein und erhalten beim

$$(100)\quad \begin{cases} \text{1. Ion:} & 2\nu_h = 1{,}25 \cdot c \cdot (4{,}21)^{2/3} \cdot n^{2/3} \varepsilon = 3{,}25\, c n^{2/3} \cdot \varepsilon, \\ \text{2. Dipol:} & 2\nu_h = 4{,}54\, c n m \\ \text{3. Quadrupol:} & 2\nu_h = 0{,}67\,(11{,}49)^{4/3} \cdot c \cdot n^{4/3} \cdot A = 17{,}2\, c n^{4/3} \cdot A. \end{cases}$$

Wir haben somit:

Wenn die störenden Atome Ionen sind, so ist die Halbwertsbreite proportional zur $^2/_3$-Potenz ihrer Dichte, sind die störenden Atome Dipole, so ist die Breite proportional zur Dichte, und wenn sie Quadrupole sind, so ist die Breite proportional zur $^3/_4$-Potenz der Dichte.

Im ersten Falle wird die Breite langsamer wachsen als die Dichte, im letzten Falle rascher.

Außerdem sind die Breiten proportional zu c, der Konstante des Starkeffekts, was auch unmittelbar einleuchtet.

Die Gleichungen (100) geben uns die Möglichkeit, die Theorie an der Erfahrung zu prüfen. Einerseits wollen wir sie dazu benutzen, um die Verbreiterung in dazu geeigneten Fällen auszurechnen, andererseits, um aus der gemessenen Verbreiterung Schlüsse auf das Atom ziehen zu können.

7. Anwendungen der Theorie.

§ 20. Als erstes Beispiel unserer Theorie wollen wir die Verbreiterung durch das Feld geladener Ionen behandeln und eine Aufnahme von Stark[1]) verwerten. Man findet hier reproduziert eine Anfnahme der Lithiumlinien im Lichtbogen bei Atmosphärendruck und daneben eine Aufnahme von Li-

1) J. Stark, Elektr. Spektralanalyse chem. Atome. Leipzig 1914. Tafel IV, Fig. 2.

thium in Kanalstrahlen bei einem Felde von 27000 Volt/cm. Bei der Linie λ 4602 ist die verbreiterte Lichtbogenlinie ca. dreimal so breit wie der Abstand der äußersten Komponenten der zerlegten Linie. Nach unserer Theorie ist dann die Normalfeldstärke, die durch die Ionisation hervorgebracht wird

$$F_n = \frac{3 \cdot 17000}{1{,}25} \text{ Volt/cm} = 212 \text{ ESE}.$$

Unter der Annahme, daß dieses Feld lediglich durch die Ionen hervorgebracht wird, findet man dann für die Konzentration der letzteren

$$(4{,}21)^{1/3} \cdot n^{2/3} \cdot 4{,}67 \cdot 10^{-10} = 212,$$
$$n = 7{,}1 \cdot 10^{16}.$$

Für ε habe ich dabei den Wert $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ ESE verwendet. Diese Anzahl von Ionen pro cm^3 müßte nun im Lichtbogen vorhanden sein. Nehmen wir nun an, der Bogen werde durch 10 Amp. erzeugt, seinen Querschnitt wollen wir zu rund 1 cm^2 schätzen. Die Geschwindigkeit der stromleitenden Ionen sei v cm/sec, dann ist die Raumladung

$$\frac{3 \cdot 10^{10}}{1 \cdot v} \text{ ESE/cm}^3$$

oder mit dem obigen Wert von ε

$$n = \frac{3 \cdot 10^{11}}{v \cdot 4{,}67 \cdot 10^{-10}} = \frac{1}{v} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{20}.$$

Damit die beiden Werte von n übereinstimmen, muß

$$v = 900 \text{ cm/sec}$$

sein. Wenn der Lichtbogen 5 mm lang ist und 50 Volt Spannungsabfall besitzt, entspricht dies einer Beweglichkeit von 9 cm/sec, wobei wir die Besonderheiten des Kathodenfalls u. dgl. nicht berücksichtigt haben. Dieser Wert der Beweglichkeit liegt in Anbetracht der rohen Schätzungen, die wir gemacht haben, durchaus im Bereich der Möglichkeit, so daß man wohl dieses Beispiel als eine gute Stütze der Theorie ansehen darf.

Die sehr vielen Versuche über Verbreiterung und Verschiebung von Spektrallinien im Lichtbogen unter verschiedenen Drucken sind für unsere Zwecke kaum verwertbar, da die Verbreiterung durch Ionisation ebenso stark gewesen ist wie

die Verbreiterung durch Druck, und diese beiden Ursachen nicht getrennt waren. Um verwertbare Versuche zu erhalten, müßte man Lichterregung ohne starke Ionisation, oder umgekehrt starke meßbare Ionisation ohne großen Gasdruck haben. Von vielen ist Proportionalität zwischen Druck und Verbreiterung konstatiert. Die Messungen wurden aber nie photometrisch und genau gemacht, so daß die Proportionalität in keinerlei Weise bewiesen ist. Übrigens dürfte man eine solche ungefähr erwarten, wenn sowohl Gasdruck wie Ionisation gleichzeitig wirken, denn der erste wirkt proportional zur $^4/_3$-Potenz der Dichte und die letztere proportional zur $^2/_3$-Potenz der Ionendichte, die im Lichtbogen proportional zur Gasdichte ist (wegen der Abnahme der Beweglichkeit mit der Dichte). Die beiden Ursachen zusammen müssen also eine Wirkung, die etwa proportional zur Dichte ist, ergeben. Wie oben hervorgehoben, darf man aber nichts Sicheres schließen aus Versuchen, wo gleichzeitig Ionisation und großer Gasdruck in nicht kontrollierbarer Weise vorhanden sind. Genaue Versuche an Linien, bei denen der Starkeffekt bekannt ist, wären hier von großem Interesse. Auch müßte man bei solchen Versuchen darauf achten, daß die Absorption im Gas keine Rolle spielt. Dies dürfte im Lichtbogen niemals der Fall sein.

§ 21. *Die Verbreiterung durch Stickstoff und Schlüsse auf das Stickstoffmolekül.* Die Verbreiterung der Cäsium- und Natriumlinien wurde sehr genau untersucht von Füchtbauer und Hoffmann.[1]) Diese Versuche sind möglichst frei von den Fehlern, die den Lichtbogenversuchen anhaften. Erstens ist die Ionisation sicher ohne jede Bedeutung, wenn überhaupt vorhanden, und zweitens kommen derartige Absorptionserscheinungen, wie im Lichtbogen, nicht vor. Das ist so zu verstehen. Wegen der geringen Dampfdichte des Cäsiums war die Absorption des Cäsiumdampfes ohne Stickstoff auf eine ganz scharfe Linie beschränkt, die als unendlich schmal relativ zu der verbreiterten Linie anzusehen war. Die Absorptionskurve gibt daher ein richtiges Bild der verbreiterten Absorptionslinie, wie sie nur von der Einwirkung des Stickstoffs herrührt. Die

1) Chr. Füchtbauer und W. Hoffmann, Ann. d. Phys. 43. p. 96. 1914.

Messungen wurden sehr genau ausgeführt zu dem Zwecke, die bestehenden Theorien der Dämpfung von Spektrallinien zu prüfen. Namentlich kam da in Betracht die Lorentzsche Stoßdämpfungstheorie, die bekanntlich die Verbreiterung der Linien dadurch zustande kommen läßt, daß die Wellenzüge der schwingenden Elektronen wegen der Zusammenstöße der Gasmoleküle abgeschnitten werden. Dies wirkt so, als ob die unendlich scharfe Frequenz des schwingenden Elektrons verbreitert wird. Es zeigte sich nun bei dem Versuch, diese Theorie auf die gewonnenen Zahlen anzuwenden, daß die Zahl der Zusammenstöße, die nötig waren, um die beobachtete Verbreiterung zu erklären, etwa 32mal so groß war wie die gaskinetisch berechnete Zahl, und meines Wissens hat man diese Schwierigkeit nachher nicht umgehen können.

Im folgenden soll die Starkeffekttheorie auf die Versuche von Füchtbauer und Hoffmann angewandt werden. Dabei ist nun leider der Mangel, daß der Starkeffekt bei den angewandten Cäsiumlinien nicht gemessen worden ist. Indessen ist von Stark und seinen Mitarbeitern[1]) der Starkeffekt bei verschiedenen anderen Linien der Alkalimetalle gemessen worden, so daß es einstweilen und für eine schätzungsweise Behandlung genügen wird, aus diesen Messungen auf die Cäsiumlinie zu extrapolieren. Die Messungen von Füchtbauer und Schall bzw. von Füchtbauer und Hoffmann beziehen sich auf die Na-Linie $\lambda = 5890$ Å.-E. und die Cs-Linie $\lambda = 4555$ Å.-E. Außerdem wurde einmal die CS-Linie λ 3877 Å.-E. untersucht. Alle diese Linien gehören zu der Hauptserie des betreffenden Elements, und zwar ist die NaD-Linie die erste Hauptserienlinie, während die Cs-Linien bzw. die zweite und die dritte Hauptserienlinie sind. Von Stark ist nun der Starkeffekt an keiner der Hauptserienlinien gemessen, bei der NaD-Linie geben Stark und Kirschbaum[1]) an, daß auf der langwelligen Seite eine Komponente aufzutreten scheint, die bei 30000 Volt/cm gerade deutlich zu sehen war. Später macht Stark darauf aufmerksam, daß dieses Resultat vielleicht nicht ganz sicher ist, die Unsymmetrie könnte auch durch Temperatureinflüsse im Spektrographen oder dgl. bewirkt sein. Bei

1) J. Stark, l. c.

der entsprechenden Linie der Li-Hauptserie λ 6103,8 findet Stark eine vollständig sichere Aufspaltung in einem Abstand, der als „klein" bezeichnet wird, und zwar nach der langwelligen Seite hin. Bei der zweiten Linie der Li-Nebenserie λ 4602 ist die Aufspaltung schon 4,5 Å.-E. bei 38000 Volt/cm. Um eine Zahl zu wählen, nehmen wir daher an, die Aufspaltung in den fraglichen Linien wäre rund 0,3 Å.-E. bei 40000 Volt/cm. Falls sich bei genaueren Messungen zeigen sollte, daß diese Zahl korrigiert werden muß, so ist unsere Rechnung leicht dahin abzuändern. Da es uns aber zunächst nur darauf ankommt, zu sehen, ob der berechnete Verbreiterungseffekt die richtige Größenordnung hat, können wir wohl die obige Zahl benutzen.

Aus der Abhandlung von Füchtbauer und Hoffmann entnehmen wir die Zahlen. Bei einem Stickstoffdruck von $p = 1600$ mm und einer Temperatur von 129,76° wurde für die blaue Cäsiumlinie λ 4555 die Halbwertsbreite $\nu = 4 \cdot 10^{11}$ gefunden, während die Frequenz[1]) dieser Linie $4{,}1 \cdot 10^{15}$ beträgt. In Å.-E. ausgedrückt, ist dann die Halbwertsbreite 0,45 Å.-E. Nach unserer Annahme über die Aufspaltung entspricht dies einem Felde

$$F = 0{,}45 \cdot \frac{40000}{0{,}3} \text{ Volt/cm} = 200 \text{ ESE.}$$

Das störende Gas war Stickstoff. Da der Stickstoff keine Dipole hat[2]), liegt hier der Fall 3 vor, und die Halbwertsbreite ist

$$2(\Delta\lambda)_h = 0{,}67\, c \cdot F_a.$$

Da

$$c = \frac{2(\Delta\lambda)}{F} = \frac{0{,}3 \cdot 800}{40000},$$

wird

$$F_a = \frac{1}{0{,}67} \cdot 200 \text{ ESE.}$$

Andererseits ist

$$F_a = (11{,}49)^{4/3} \cdot n^{4/3} \cdot A,$$

wo A die Konstante des Quadrupols bedeutet, $A = \Theta_1 - \Theta_2$. Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für F_a ergibt

1) Frequenz = Schwingungszahl in 2π sec.

2) Weil $n^2 = \varepsilon$, vgl. z. B. Landolt-Börnsteins Tabellen.

$$A = \frac{200}{0{,}67\, n^{4/3}\,(11{,}49)^{4/3}}.$$

n ist die Molekülzahl bei $p = 1600$ mm Druck und 130° C. Wenn wir für die Loschmidtsche Zahl $N_0 = 2{,}77 \cdot 10^{19}$ verwenden, kommt $n^{4/3} = 133 \cdot 10^{24}$

$$A = 8{,}6 \cdot 10^{-26} \text{ ESE}.$$

Um einen Anhaltspunkt darüber zu gewinnen, was diese Zahl bedeutet, können wir das von Sommerfeld[1]) berechnete Modell des Stickstoffmoleküls annehmen. Wenn auch dieses Modell u. a. wegen der auftretenden Quadratwurzeln aus den Quantenzahlen weniger wahrscheinlich ist, so müssen wir doch voraussetzen, daß das wirkliche Stickstoffmolekül nicht allzu weit davon entfernt ist. Darauf deutet schon die Tatsache, daß das Molekül aus zwei Atomen besteht und außerdem noch die chemische Wertigkeit.

Das Sommerfeldsche Modell besteht aus zwei Stickstoffkernen mit je 7 Ladungen, die von je 4 Elektronen in sehr kleinem Abstand irgendwie umkreist werden. Nach außen wirken diese beiden Kerne, als ob sie dreifach geladen wären. Die beiden Kerne werden in einem gewissen Abstand voneinander gehalten durch einen zwischen ihnen kreisenden Ring von 6 Elektronen. Den Abstand der beiden Kerne wollen wir mit $2d$ bezeichnen, den Radius des Kreises mit $2a$. Dann können wir $A = \Theta_1 - \Theta_2$ für dieses Modell berechnen. Da die d-Achse Symmetrieachse ist, so haben wir für sie Θ_1 zu berechnen. Nach der Definition ist $\Theta_1 = \Sigma e_n x_n^2$, also:

$$\Theta_1 = 6\varepsilon d^2.$$

Da $\Theta_2 = \Theta_3$ ist, so ist

$$\Theta_2 = \tfrac{1}{2}(\Theta_2 + \Theta_3) = \tfrac{1}{2}\Sigma e_n (x_n^2 + y_n^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma e_n a^2,$$

$$\Theta_2 = -3\varepsilon a^2$$

wegen der negativen Ladung der Elektronen. Es wird somit

$$A = \Theta_1 - \Theta_2 = \varepsilon(6d^2 + 3a^2).$$

Setzen wir hier $\varepsilon = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ und für A den gefundenen Wert, so erhalten wir

$$6d^2 + 3a^2 = 1{,}81 \cdot 10^{-16}.$$

---

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 1917.

Wenn das Modell im Gleichgewicht sein soll, so ergibt eine einfache Rechnung, daß $d = 1/\sqrt{8} = a$ sein muß. Wir erhalten dann für den halben Abstand der Kerne

$$a = 0{,}60 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Sommerfeld berechnet für sein Modell, wenn alle Elektronen in der innersten Bahn mit einem Quantum[1]) laufen,

$$a = 0{,}587 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Die Übereinstimmung zwischen beiden Zahlen ist recht gut; jedoch darf man nicht allzuviel Gewicht auf die mehr zufällige genaue Koinzidenz der Zahlen legen, weil ja unsere Schätzung über den Starkeffekt noch leicht 100% Fehler haben kann. Es ist aber als befriedigend für die Theorie zu betrachten, daß man durchaus die richtige Größenordnung für den Moleküldurchmesser findet.

In Anbetracht dieser guten Übereinstimmung wäre es für die genaue Prüfung der Theorie von großem Interesse, den Starkeffekt der betreffenden Cäsiumlinien genau zu messen.

Für die nächste Gliednummer der Cs-Hauptserie haben Füchtbauer und Hoffmann eine größere Halbwertsbreite beobachtet. Dies würde ausgezeichnet dadurch zu erklären sein, daß der Starkeffekt in den Serien gewöhnlich mit wachsender Gliednummer zunimmt.

Bei der Natriumlinie Na λ 5890 haben Füchtbauer und Schell die Halbwertsbreite $\nu' = 3{,}5 \cdot 10^{11}$ gefunden beim Druck $p = 1733$ mm und bei der Temperatur $t = 174{,}8°$. In Anbetracht der ungenauen Kenntnis des Starkeffekts für diese Linie hat es keinen Zweck, auch in diesem Falle den Wert von A zu berechnen. Da die Zahlen alle ungefähr dieselben wie bei der Cs-Linie sind, so ist es sofort klar, daß nahezu dasselbe herauskommen muß, und daß der Unterschied, den man finden wird, viel kleiner ist als die durch die einigermaßen willkürliche Festsetzung des Starkeffektes bedingte Unsicherheit.

---

1) A. Sommerfeld hat für die innerste Bahn $\sqrt{8}$ Quanten. Diese Annahme würde auch gut mit den Beobachtungen stimmen. Ich habe ein Quantum gewählt, um zu zeigen, daß auch dann die Füchtbauer und Hoffmannschen Versuche sich gut erklären lassen.

Eine weitere wichtige Stütze der Theorie ist wohl auch, daß Füchtbauer und Hoffmann eine unsymmetrische Verteilungskurve fanden, und zwar so, daß auf der kurzwelligen Seite der Absorptionsindex stärker abfällt. Dies kann nur daher rühren, daß der Starkeffekt für diese Linie unsymmetrisch ist. Nach den Angaben von Stark scheint das nun wirklich der Fall zu sein, die Aufspaltung ist auf der langwelligen Seite am deutlichsten festzustellen. Die Unsymmetrie blieb nach der Stoßdämpfungstheorie völlig unerklärt. Wir dürfen somit das Resultat der Anwendung der Theorie auf die Verbreiterung durch Stickstoff für recht befriedigend ansehen. Ich werde im folgenden noch den Wasserstoff behandeln, man hat hier den Vorteil, daß sowohl der Starkeffekt wie das Modell des Wasserstoffs genügend bekannt sind.

§ 22. *Anwendung der Theorie auf Wasserstoff.*

Wir verwenden das Debyesche Wasserstoffmodell[1]), das auch keine Dipole hat und wollen erst die Größe A berechnen. Das Modell besteht bekanntlich aus zwei positiven Kernen im Abstand $2d$ und zwei um ihre Verbindungslinie kreisenden Elektronen. Der Radius des Kreises ist a und die Stabilität des Systems erfordert, wenn jedes Elektron ein Quantum besitzt:

$$a = \sqrt{3} \cdot d.$$

Genau wie beim Stickstoff berechnen wir dann

$$\Theta_1 - \Theta_2 = (2d^2 + a^2)\varepsilon = \frac{5}{3} a^2 \varepsilon = 2{,}0 \cdot 10^{-26}$$

mit $a = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm.

Aus den Angaben von Stark[2]) entnehmen wir die folgenden Konstanten des Starkeffekts. Um eine Aufspaltung von 1 Å.-E. zu erhalten, braucht man die Feldstärken

bei	H_α : 15	ESE
	H_β : 11	„
	H_γ : 8	„
	H_δ : 5,5	„

Wir wollen mit Hilfe von diesen Zahlen und dem oben berechneten Wert für $\Theta_1 - \Theta_2$ beim Wasserstoff die Breite

1) P. Debye, Münch. Ber. Math. phys. Kl. 1915. p. 1.
2) J. Stark, l. c.

der Linien bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur berechnen. Die Normalfeldstärke ist mit $n = 27{,}7 \cdot 10^{18} \cdot 273/293$.

$$F_n = (11{,}49)^{4/3} \cdot (27{,}7)^{4/3} \cdot (273/293)^{4/3} \cdot 10^{24} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-36} \text{ESE}$$

oder

$$F_n = 40 \text{ ESE}.$$

Die Breiten der Linien ergeben sich dann als der Starkeffekt der zu 0,67 mal diese Feldstärke gehört. D. h.

bei H_α 1,8 Å.-E.
H_β 2,4 „
H_γ 3,3 „
H_δ 4,7 „

Diese Zahlen stimmen durchaus mit den wirklichen Verhältnissen überein. Leider war bei den meisten Versuchen nicht dafür gesorgt, daß die Ionenwirkung klein war, so daß man sogar noch größere Breiten gefunden hat. So hat z. B. Rossi[1]) im Wasserstofflichtbogen die folgenden Breiten gefunden:

H_α (8) geschätzt
H_β 30
H_γ 50
H_δ 58

Zweifelsohne sind diese höheren Zahlen durch die Ionen verursacht, die Breiten wurden auch nicht photometrisch genau gemessen, sondern nur geschätzt.

Bei kleineren Drucken liegen ältere Messungen vor von Michelson.[2]) Er mißt mit dem Interferometer nach der Methode der Bestimmung der Sichtbarkeit von Interferenzfransen. Es ist klar, daß diese Methode keine zuverlässigen Werte für die Breiten liefern kann, wenn die Intensitätsverteilung in der Linie von der theoretisch angesetzten abweicht. Dies scheint, wie Michelson bemerkt, bei den höheren Drucken der Fall zu sein, die Linie besteht dann anscheinend aus einem scharfen Kern mit darübergelagerter Verbreiterung. Michelson findet die Halbw.-Breiten der Linie H_α wie in der folgenden Tabelle:

1) A. Rossi, Astrophys. Journ. **34.** p. 299. 1911.
2) A. Michelson, Phil. Mag. (5) **34.** p. 289. 1892.

Druck (cm)	Halbw.-Breite in Å.-E.	Berechnete Halbw.-Breite
20	0,2	0,30
9	0,128	0,11
7·1	0,116	0,08
4·7	0,095	0,04
2·3	0,071	0,016
1·3	0,056	0,007
0·9	0,053	0,004
0·5	0,050	
0·3	0,048	

Aus den Zahlen ist zu ersehen, daß bei den kleinsten Drucken bis zu etwa 1 cm Druck die Breite von H_α sich kaum ändert, von dort an fängt sie an zu wachsen. Man muß wohl annehmen, daß die Breite bei kleinem Druck vom Dopplereffekt herrührt, erst die Zunahme von diesem Werte aus rührt vom Starkeffekt her. In der dritten Kolonne habe ich die Halbwertsbreiten aufgeführt, die sich aus unserer Theorie ergeben. Es ist deutlich, daß das Wachsen der Michelsonschen Zahlen gerade bei den Drucken anfängt, wo die elektrische Verbreiterung mit dem Dopplereffekt vergleichbar wird. Die berechnete Zahl ist bei dem höchsten Drucke größer als die von Michelson beobachtete, was wahrscheinlich davon herrührt, daß die Intensitätsverteilung in der Linie nicht mit der exponentiellen, von Michelson vorausgesetzten übereinstimmt. Daß dieses letztere der Fall ist, kann man mit großer Wahrscheinlichkeit in der folgenden Weise schließen.

Die Starkeffektaufspaltung der H_α-Linie ist nach Stark so, daß zu beiden Seiten je eine starke Komponente auftreten, während in der Mitte die Linie unverschoben oder sehr wenig verschoben zurückbleibt. Diese letztere bleibt nun in jedem Felde vorhanden und also auch bei jeder Verbreiterung der Linie. D. h. man erhält genau die Intensitätsverteilung, die Michelson vermutet, in der Mitte die scharfe Linie und darauf eine flache Verbreiterung. Infolgedessen bleibt die Sichtbarkeit der Fransen zu groß, man findet eine zu kleine Breite der Linie.

Alle diese Überlegungen können nur gelten, wenn die Ionisation im Gase genügend klein ist. Weil die Ionen sehr viel stärker wirken als Gasmoleküle oder Atome, braucht ihre Konzentration nur eine geringe zu sein, damit sie sich bemerk-

bar machen. Um dies direkt zu zeigen, wollen wir die Ionenkonzentration berechnen, die ausreicht, um eine Verbreiterung gleich der Dopplereffektverbreiterung zu erzeugen. Z. B. bei H_β braucht man dazu eine Feldstärke

$$8 \cdot 0{,}04\,\text{Å} = 0{,}32\,\text{ESE},$$

indem der Dopplereffekt ca. 0,04 Å ist. Diese Feldstärke muß gleich 1,25 mal die Normalfeldstärke sein, oder

$$0{,}32 = 1{,}25 \cdot (4{,}21)^{1/3} \cdot n^{2/3} \cdot \varepsilon.$$

Daraus berechnet sich die Ionendichte zu

$$n = 3{,}8 \cdot 10^{13}\ \text{Ionen/cm}^3.$$

Verglichen mit der Loschmidtschen Zahl $n_0 = 27{,}7 \cdot 10^{18}$ erweist sich dies als eine sehr geringe Dichte, indem auf 7 Millionen Moleküle ein Ion kommt.

Bei der Verwertung von Versuchen muß man die Absorption im leuchtenden Gas berücksichtigen. Diese kann in verschiedener Weise wirken, im allgemeinen wird sie wohl die Intensität in der Mitte der Linie am stärksten herunterdrücken, so daß diese flacher wird. Die bekannte Erscheinung der Selbstumkehr rührt bekanntlich von Absorption her, jedenfalls in den weitaus meisten Fällen. Es ist aber auch möglich, daß die elektrische Verbreiterung Selbstumkehr erzeugen kann. Dies würde z. B. dann der Fall sein, wenn der Starkeffekt der betreffenden Linie nur aus zwei seitlichen Komponenten bestände, während die Linie selbst im Feld verschwände. Die Intensitätsverteilung in der verbreiterten Linie würde dann gleich der Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(F_0)$ sein, also umgekehrt. Ob derartig einfache Starkeffekte existieren, ist wohl sehr fraglich, möglich wäre es doch, daß eine Linie einen Starkeffekt zeigt, die in der Mitte keine Intensität hat, es müssen sich dann elektrisch verbreiterte Linien ergeben, die in der Mitte mehr oder wenig herabgedrückt sind.

§ 23. *Die Verbreiterung in Helium und das Heliumatom.* Über die durch Heliumdruck verursachte Verbreiterung liegen interessante Beobachtungen von A. Dempster[1]) vor. Auch diese sind interferometrisch gemacht und die Breiten aus Sichtbarkeitskurven nach der Methode von Michelson

1) A. Dempster, Ann. d. Phys. 47. p. 791. 1915.

erschlossen. Es wurden die Wasserstofflinien bei 21,4 und 42,8 cm Heliumdruck mit den Wasserstofflinien bei Wasserstoffdruck verglichen. Für H_α ergab sich, daß die Breite bei 21,4 cm Heliumdruck kleiner war als die Breite bei 6 cm Wasserstoffdruck. Dies würde darauf deuten, daß das Heliumatom eine kleinere Konstante $\Theta_1 - \Theta_2$ besitzt als das Wasserstoffmolekül. Jedoch weist Dempster darauf hin, daß der Spannungsabfall in der Röhre in beiden Fällen eine verschiedene war, so daß die schon dadurch bewirkte Verbreiterung mitgewirkt haben kann. In Anbetracht der sehr geringen Breiten, die Dempster mit Helium gefunden hat, würde man doch geneigt sein, wirklich auf ein sehr kleines $\Theta_1 - \Theta_2$ beim Helium zu schließen. Besonders lästig ist es aber beim Wasserstoff, daß die Intensitätsverteilung nicht der theoretischen entspricht, Dempster macht hier dieselbe Beobachtung wie Michelson, daß eine scharfe Linie scheinbar auf der verbreiterten aufliegt. Infolgedessen sehen die Linien zu schmal aus.

Das Modell des Heliumatoms ist zwar nicht so sicher bekannt, wie dasjenige des Wasserstoffmoleküls, wir wollen aber zusehen, wie weit das von Bohr vorgeschlagene Modell mit der Dempsterschen Messung in Übereinstimmung steht. Das Modell von Bohr besteht aus einem positiven Kern mit zweifacher Ladung und zwei darum in gleichem Abstand kreisenden Elektronen. Jedes Elektron besitzt ein Wirkungsquantum. Ob dieses Modell genau richtig ist, wissen wir zwar nicht, es ist aber klar, daß genaue Messungen über die Breite von Spektrallinien im Helium dazu helfen kann, einen Aufschluß über die Wahrscheinlichkeit des Modells zu geben. Eine Berechnung des Radius der Kreisbahn im Verhältnis zum Radius der Elektronenbahn im Wasserstoffatom ergibt

$$a_{He} : a_H = 1 : \tfrac{1}{4},$$

$2\,a_H$ ist $1{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm.

Wir wollen bei der Berechnung des Quadrupolmomentes nun so rechnen, als ob die Ladung der beiden Elektronen gleichmäßig auf ihrer ganzen Bahn verteilt wäre, was wegen der schnellen Rotation der Elektronen wohl das Plausibelste ist. Diese Berechnungsart stimmt auch mit unserer Berechnung des Quadrupolmomentes beim Wasserstoffmolekül überein.

Legen wir die Rotationsebene in die xy-Ebene, dann wird

$$\Theta_1 = \Sigma e x^2 = \Theta_2 = \Sigma e y^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma(e x^2 + e y^2) = -\tfrac{1}{2}\Sigma e a^2,$$

wo a_1 den Radius der Bahn bedeutet.

Weiter ist

$$\Theta_3 = \Sigma e z^2 = 0,$$

also da $\Sigma e = 2\varepsilon$

$$A_{He} = -\varepsilon a_1^2.$$

Aus dem Modell von Bohr für das Heliumatom berechnet sich das Verhältnis der Radien des Wasserstoffatoms und des Heliumatoms zu 7:4. Außerdem hatten wir für die Größe A beim Wasserstoffmolekül gefunden:

$$A_{H_2} = \tfrac{4}{3} a_{H_2}^2 \varepsilon.$$

Es ist

$$a_H = 1{,}1 \cdot 10^{-8}\text{ cm},$$
$$a_{H_2} = 1{,}00 \cdot 10^{-8}\text{ cm nach Debye}$$

und also

$$a_{He} = 0{,}63 \cdot 10^{-8}\text{ cm}.$$

Dadurch wird

$$\frac{A_{He}}{A_{H_2}} = \frac{0{,}63^2}{\frac{4}{3} \cdot 1{,}00^2} = 0{,}238.$$

Das Quadrupolmoment des Heliumatoms ist also ungefähr der vierte Teil von dem Quadrupolmoment des Wasserstoffmoleküls. Demnach müßte Wasserstoff ungefähr viermal so stark verbreiternd wirken, wie Helium. Das stimmt auch recht gut mit den Angaben von Dempster, daß die H_ε-Linie bei 6 cm Wasserstoffdruck noch etwas breiter war wie dieselbe Linie bei 21,4 cm Heliumdruck. Einen Beweis darf man aber, wie oben schon hervorgehoben, nicht in diesen Angaben erblicken, da der Spannungsabfall in der Entladung in beiden Fällen ein verschiedener war.

Dempster hat auch Messungen von der Breite der Quecksilberlinie λ 5461 bei 21 und bei 41 cm Druck von Helium gemacht. Er findet

bei 21 cm Druck 0,084 Å.-E.,
„ 42 „ „ 0,053 Å.-E.

Nach Wendt[1]) hat diese Linie einen Starkeffekt kleiner als

$$1 \text{ Å.-E. bei } 200 \text{ ESE}.$$

Bei 42 cm Druck ist z. B.:

$$n = \frac{42}{76} \cdot \frac{273}{293} \cdot 27{,}7 \cdot 10^{18} = 14{,}2 \cdot 10^{18},$$

es wird

$$F_n = (11{,}49)^{5/3} \cdot (14{,}2)^{5/3} \cdot 10^{24} \cdot A \text{ ESE}$$

oder

$$F_n = 756 \cdot 10^{24} \cdot A \text{ ESE}.$$

Nach der angegebenen Breite muß

$$0{,}67\, F_n = 200 \cdot 0{,}053,$$

d. h.

$$F_n = 15{,}8 \text{ ESE sein.}$$

Hieraus findet sich

$$A = 2{,}1 \cdot 10^{-26}.$$

Dies ist viel mehr, als wir aus dem Modell berechnet haben, demnach wäre

$$A_{He} \text{ ber.} = 0{,}48 \cdot 10^{-26},$$

also ungefähr viermal so klein. Ob diese Unübereinstimmung durch Überlagerung der Trabanten verursacht worden ist oder ob noch andere Ursachen dazu mitgewirkt haben können, läßt sich einstweilen nicht entscheiden. Etwas Bestimmtes hierüber läßt sich erst sagen, wenn Messungen der Breite im Helium vorliegen, die von den Nachteilen der interferometrischen Methode frei sind, und wo die wirkliche Intensitätsverteilung in der Linie gefunden werden kann.

§ 24. Über die Verbreiterung durch Dipole habe ich keine brauchbaren Angaben finden können. Sie müßte stärker sein als die Verbreiterung durch Quadrupole. Vereinzelt finden sich Angaben, daß die Linien im Lichtbogen in Kohlensäure breiter sind als in Luft, was gut damit übereinstimmen könnte. Es wäre in dieser Weise möglich, das Moment der Dipole zu bestimmen, weshalb derartige Versuche sehr interessant sein würden. Man müßte dann Momente finden, die mit den aus der Dielektrizitätskonstante berechneten übereinstimmen.

1) G. Wendt, Ann. d. Phys. 45. p. 1257. 1914.

§ 25. Man muß annehmen, daß Linien, die keinen Starkeffekt zeigen, auch keine Druckverbreiterung zeigen oder nur eine geringe. Das scheint auch der Fall zu sein, denn Füchtbauer und Hoffmann haben die Breiten von Jodabsorptionslinien im Stickstoffdruck gemessen und sie sehr viel kleiner gefunden wie die Cs-Linien beim selben Stickstoffdruck. Der Starkeffekt dieser Linien ist nicht bekannt, es ist wohl nach dem übrigen Verhalten der Jodabsorptionslinien mit Sicherheit anzunehmen, daß sie keinen Starkeffekt besitzen. Einen Zeemaneffekt konnte man nicht nachweisen.

Eine Untersuchung solcher Linien, die keinen Starkeffekt zeigen, wäre natürlich sehr erwünscht; falls sich dann auch wirklich bedeutende Verbreiterungen zeigen sollten, würde man noch auf andere Ursachen als den Starkeffekt schließen müssen. Möglich ist es vielleicht, daß ein schnell wechselndes Feld verbreiternd wirken kann, selbst wenn ein konstantes Feld keinen Starkeffekt hervorbringt. Wir haben in unserer Theorie darauf keine Rücksicht genommen, da es nur eine Möglichkeit ist, über die sonst nichts bekannt ist.

Zusammenfassung.

1. Die Lorentzsche Theorie der Verbreiterung durch Stoßdämpfung kann nach den Versuchen von Füchtbauer und Hoffmann und nach der neuesten Quantentheorie der Lichtemission nicht aufrecht erhalten werden. Dagegen wies Stark darauf hin, daß die Verbreiterung eine Folge der elektrischen Felder der umliegenden Atome sein könnte, die durch Starkeffekt verursacht wäre.

2. Es wird gezeigt, wie sich eine quantitative Theorie dieser „elektrischen“ Verbreiterung aufstellen läßt, und die Theorie wird für die drei Fälle durchgeführt; die umliegenden Atome oder Moleküle sind 1. Ionen, 2. Dipole, 3. Quadrupole. Diese drei Fälle kommen praktisch vor.

3. Die Halbwertsbreite der Linien wird bei Verbreiterung durch Ionen proportional zur $^2/_3$-Potenz der Ionendichte, bei der Verbreiterung durch Dipole oder Quadrupole proportional zur 1. bzw. zur $^4/_3$-Potenz ihrer Dichte.

4. Die Halbwertsbreite ist ebenfalls abhängig von den elektrischen Konstanten der verbreiternden Atome, es lassen

sich diese Konstanten aus den beobachteten Breiten erschließen, sobald man den Starkeffekt der betreffenden Linie kennt. Man erhält so eine Methode zur Bestimmung des Moments von Dipolen und eine Methode zur Bestimmung der Konstante eines Quadrupols, was bislang nicht möglich war.

5. Die Theorie wird auf eine Reihe von Versuchen angewendet, wobei sich gute Übereinstimmung zeigt. Die berechnete Konstante des Stickstoffmoleküls stimmt mit derselben Konstante des von Sommerfeld angegebenen Stickstoffmolekülmodells überein. Ebenfalls sind die berechneten Breiten der Wasserstofflinien etwa gleich den beobachteten.

6. Aus Messungen von Dempster über die Breite der Wasserstofflinien in Helium wird das Quadrupolmoment des Heliumatoms berechnet und in naher Übereinstimmung mit dem aus dem Heliummodell von Bohr berechneten Wert gefunden. Messungen der Breite von Quecksilberlinien in Helium ergeben einen viermal zu großen Wert des Quadrupolmoments, was vielleicht auf eine Störung durch Überlagerung der Trabanten zurückgeführt werden kann.

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Göttingen.)

Christiania, Oktober 1918.

(Eingegangen 30. Oktober 1918.)

2. *Über die Beziehungen zwischen mechanischer und chemischer Verdrehung der Struktur flüssiger Kristalle;*
von O. Lehmann.

In einer früheren Experimentaluntersuchung[1]) habe ich nachgewiesen, daß planparallele, erzwungen homogene Schichten tropfbar-kristallinischer Flüssigkeiten nach Verdrehung der orientierend auf ihre Moleküle wirkenden anisotropen Wandflächen, welchen sie anliegen, ganz dieselben optischen Erscheinungen zeigen wie in gleicher Art verdrehte Sätze paralleler Glimmerblättchen. Senkrecht hindurchgehendes, linearpolarisiertes Licht zerfällt in zwei elliptischpolarisierte Strahlen entgegengesetzter Drehrichtung, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, so daß das austretende Licht durch deren Wiedervereinigung infolge des Gangunterschiedes im allgemeinen elliptisch- oder zirkularpolarisiert wird, also durch den Analysator nicht ausgelöscht werden kann. Immerhin gibt es zwei zueinander senkrechte Azimute der Polarisationsebene des eintretenden Lichtes, für welche das austretende wieder linearpolarisiert ist, doch mit gedrehter Polarisationsebene. Beim Drehen zwischen gekreuzten Nicols wird deshalb die verdrillte Schicht im allgemeinen nicht mehr bei einem Umgange viermal völlig schwarz; es tritt nur eine mehr oder minder starke *Verdunkelung* auf (im Minimum *bis zur Hälfte der ursprünglichen Lichtstärke*); man kann aber bei Drehung des Analysators immer eine Stellung desselben finden, bei welcher ganz so wie vor der Verdrehung bei Kreuzung zum Polarisator bei jedem Umgange viermalige *vollkommene Auslöschung* eintritt.[2]) Wird nur *ein* Nicolsches Prisma an-

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 51. p. 353. 1916.

2) Bei dem Glimmerblättchensatz ist die Auslöschung keine ganz vollkommene; es tritt schwache Rotationsdispersion ein, die bei den bekannten Reuschschen Präparaten zur Nachahmung der Drehung der Polarisationsebene des Quarzes so weit gesteigert ist, daß das Verhalten dem

gewandt, so erweist sich die dichroitische Färbung verschieden, je nachdem dieses *unter* oder *über* dem Präparate eingeschaltet wird, wie im folgenden näher dargelegt wird.

Bei Paraazoxyphenetol ist der Dichroismus weißgelb. Wird eine kreisrunde Schicht der tropfbar-flüssigkristallinischen Masse zwischen zwei parallele, gleichorientierte, in gleicher Weise wirkende durchsichtige, anisotrope, feste Platten eingeschlossen, so verhält sich dieselbe bekanntlich optisch ebenso wie eine homogene, feste Kristallplatte.[1]) Die Stellung des polarisierenden Nicols werde durch einen den Querschnitt desselben darstellenden kleinen Rhombus mit dem Zusatze „unten", die des Analysators in gleicher Weise mit dem Zusatze „oben" angedeutet. Bei der in Fig. 1a [2]) angenommenen Stellung des Polarisators allein (oder des Analysators allein) erscheine das Präparat infolge des Dichroismus *gelb*, dagegen bei der um 90° gedrehten Stellung des Nicols (Fig. 1 b) *weiß*. Bei einer

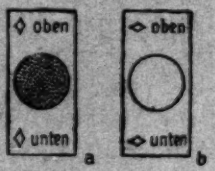


Fig. 1.

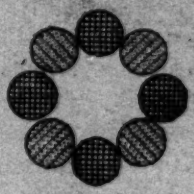


Fig. 2.

ganzen Drehung im polarisierten Lichte wird das Präparat dann in zwei Lagen gelb, in zwei dazu senkrechten weiß und dazwischen gelbweiß erscheinen (Fig. 6). Zwischen gekreuzten Nicols tritt bei einmaliger Drehung viermalige Auslöschung und Aufhellung mit halber Intensität des einfallenden Lichtes in weißgelber Farbe ein [Fig. 2[3])].

Werden nun aber die beiden rechteckigen Platten gegeneinander gedreht, so daß die flüssigkristallinische Schicht

---

des Quarzes ähnlich wird. Bei flüssigen Kristallen konnte ich Rotationsdispersion bisher nur dann beobachten, wenn die Verdrehung der Struktur durch Beimischungen, also auf chemischem Wege, bewirkt wird.

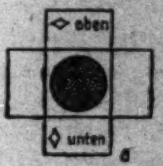
1) O. Lehmann, Wied. Ann. 41, p. 525. 1890; Flüssige Kristalle 1904, p. 58.

2) Gelb ist durch dichte Punktierung dargestellt, weißgelb durch dünne.

3) Kreuzschraffierung bedeutet schwarz, einfache Schraffierung grau.

Schraubenstruktur annehmen muß, so ist es, falls *nur* der Polarisator allein oder *nur* der Analysator allein (in paralleler Stellung) eingeschaltet wird, *nicht mehr gleichgültig, welcher von beiden gebraucht wird.*

Wird die untere feste Platte festgehalten und die obere um 90° nach rechts gedreht, so bleiben die Erscheinungen des Dichroismus, wie die Figg. 3 a u. b veranschaulichen, dieselben wie zuvor, wenn nur der Polarisator, und zwar in der früheren Stellung, gebraucht wird. Um aber bei Benutzung des Analysators allein denselben Anblick zu erhalten, muß man diesen ebenfalls um 90° nach rechts drehen wie die obere feste Platte, wie wenn für den Dichroismus bei *unten* eingeschaltetem Nicol nur die *untere* anisotrope Platte maßgebend



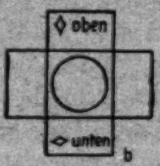


Fig. 3.

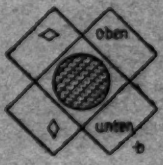


Fig. 4.

wäre, bei *oben* eingeschaltetem nur die *obere*. Ich habe diese Erscheinung als *Drehung der Richtung stärkster Absorption* bezeichnet.[1]) Sie folgt dem einfachen Gesetze, daß *sowohl Größe wie Sinn der Drehung gleich dem der schraubenförmigen Verdrehung der flüssigkristallinischen Schicht sind.* Für eine Verdrehung um 180° werden also wieder die Figg. 1 a u. b maßgebend sein, für 270° Fig. 3, für 360° Fig. 1.

Benutzt man bei der Verdrehung um 90° sowohl den Polarisator in der ursprünglichen Stellung (Fig. 1), wie auch den dazu gekreuzten Analysator, so muß das Präparat, da beide Nicols dieselbe Färbung hervorbringen, gelb erscheinen (Fig. 3a), bei parallelem Analysator dagegen weiß (Fig. 3b), vorausgesetzt, daß keine Auslöschung erfolgt. Diese tritt tatsächlich wegen der schraubenförmigen Verdrehung nicht ein. Infolge dieser tritt *linearpolarisiertes Licht mit um 90° gedrehter Polarisationsebene* aus, welches also ungehindert durch den zum Polarisator gekreuzten Analysator hindurchgeht, so

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 18. p. 808. 1905.

daß die Schicht vollkommen hell erscheinen muß, und zwar aus dem oben erwähnten Grunde *gelb* (wie bei Fig. 4a). Dreht man das Präparat um 45°, so tritt *zirkularpolarisiertes* Licht aus, welches vom Analysator nicht ausgelöscht werden kann. Da aber die eine der beiden Komponenten desselben ausgelöscht wird, sinkt die Lichtintensität auf die Hälfte und die weißgelbe Farbe erscheint deshalb graugelb (wie bei Fig. 4b).

Würde man das Präparat nochmals um 45° drehen, so entstände wieder volle Helligkeit; da aber die Stellung des Polarisators nun der Fig. 3b entspricht, wäre die Farbe rein weiß. Der Verlauf bei weiterer Drehung läßt sich leicht übersehen. Er ist in Fig. 5 entsprechend Fig. 2 dargestellt. Bei einmaliger Drehung der um 90° verdrillten Schicht wird dieselbe also *viermal hell und dunkel*; es findet aber keine Auslöschung statt, sondern *nur Verdunkelung in gelbgrauer Farbe*. In den beiden Hellstellungen ist die Schicht nicht weißgelb, sondern in der einen gelb, in der anderen weiß. Für eine Verdrillung um 270° sind die beiden Stellungen, in welchen die Schicht gelb bzw. weiß erscheint, miteinander vertauscht.

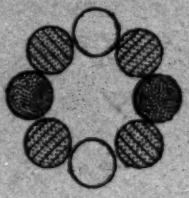


Fig. 5.

Würde man Sektoren aus der verdrehten Schicht ausschneiden und diese zu einer Kreisscheibe zusammenlegen, so würde ein solches Präparat[1]) bei den Verdrehungen 0° und 180° ein *schwarzes Kreuz auf weißgelbem Grunde* zeigen, bei den Verdrehungen um 90° und 270° ein *graugelbes Kreuz, welches ein gelbes und ein weißes Quadrantenpaar scheidet*, und zwar ist in beiden Fällen *die Lage der gelben und weißen Quadranten vertauscht*, wie bei den Figg. 15, 17, 19 u. 21, Das graue Kreuz entspricht den Stellungen der Sektoren, in welchen das austretende Licht zirkularpolarisiert ist.

Die Betrachtung einer solchen aus Streifen aller möglichen Orientierungen zusammengesetzten Schicht ist notwendig, um den Vergleich mit den Erscheinungen zu ermöglichen, welche auftreten, wenn schraubenförmige *Verdrehung der Struktur durch Beimischung fremder Moleküle*[2]) hervorgebracht wird.

---

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 51. p. 384. Fig. 24a—d. 1916.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 2. p. 667. 1900; Flüssige Kristalle 1904, p. 62. 78; Ann. d. Phys. 18. p. 808. 1905; Die scheinbar lebenden Kristalle 1907, p. 37; Flüssige Kristalle und Theorien des Lebens, 2. Aufl.

Der Vorgang entspricht ganz dem von mir schon früher beobachteten der stetigen Verdrehung fester Kristalle durch geeignete Beimischungen[1]) und der durch Mischung zweier Modifikationen erzeugten [in Schillerfarben[2]) zum Ausdruck kommenden] Verdrillung der schleimigflüssigen Kristalle der Cholesterylverbindungen.

Auf Grund einer von Mauguin[3]) beobachteten Tatsache kann man die Verdrehung als eine rein mechanische auffassen. Derselbe fand nämlich, daß, wenn flüssigkristallinisches Parazoxyphenetol in einen frisch hergestellten engen Spalt eines Glimmerkristalles eingebracht wird, die beiden einander gegenüberstehenden Spaltflächen in verschiedener Weise orientierend wirken, wie gegeneinander verdrehte anisotrope Platten, so daß die flüssigkristallinische Schicht Schraubenstruktur annimmt.

Denkt man sich übereinander zahlreiche derartige Spalten, welche mit flüssigkristallinischer Masse ausgefüllt sind und nur sehr dünne Lamellen zwischen sich lassen, so kann man das Ganze als eine einzige flüssigkristallinische Masse betrachten, in welche zahlreiche dünne Glimmerlamellen in paralleler Stellung eingelagert sind. Die Verdrehung wird überall gleichmäßig und somit die Verdrehung der äußersten Endflächen gegen-

---

1908, p. 40; Das Kristallisationsmikroskop 1910, p. 88; Die neue Welt der flüssigen Kristalle 1911, p. 228; Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. 1912. Nr. 13. Taf. 3. Figg. 63 u. 64; Ann. d. Phys. **52**. p. 536. 1917; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 403, Fig. 298; Physik. Zeitschr. **19**. p. 94. 1918.

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Krist. **1**. p. 479. 1877; Progr. der Mittelschule Mülhausen i. E. 1877, p. 10, Fig. 8; Molekularphysik **1**. p. 375, Figg. *D* u. *E*, 1888; Flüssige Kristalle 1904, p. 123; Die scheinbar lebenden Kristalle 1907, p. 48, Fig. 83; F. Wallerant, Compt. rend. **143**. p. 555, 1169. 1906; P. Gaubert, l. c. **153**. p. 683. 1911; **156**. p. 1161. 1913; O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen p. 272. 1918.

2) O. Lehmann, Molekularphysik **2**. p. 510. 1888; Zeitschr. physik. Chem. **4**. p. 472. 1889; Ann. d. Phys. **2**. p. 669. 684. 1900; **52**. p. 527. 1917; D. Vorländer, Ber. d. D. Chem. Ges. **41**. p. 2036, 2045. 1908; D. Vorländer u. Fr. Janecke, Zeitschr. physik. Chem. **85**. p. 697. 1913; M. Ed. Huth, Diss. Halle 1909; O. Lehmann, Physik. Zeitschr. **11**. p. 575. 1910; F. Giesel, l. c. **11**. p. 192. 1910; Physik. Zeitschr. **17**. p. 73. 1916; **19**. p. 88. 1918; W. Voigt, Gött. Nachr. 1911; O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, 349.

3) Ch. Mauguin, Compt. rend. **156**. p. 1246. 1913.

einander der *Dicke der Schicht proportional sein.* Statt der feinen Glimmerlamellen kann man sich auch einzelne in paralleler Stellung eingelagerte Glimmermolekeln denken, d. h. eine Lösung von Glimmer in der flüssigkristallinischen Masse, wobei die molekulare Richtkraft der letzteren die Glimmermoleküle in paralleler Stellung erhält. Daß solche Richtkräfte auftreten können, geht schon daraus hervor, daß die Kristalltropfen des Paraazoxyphenetols durch Farbstoffe, z. B. Paraazophenetol, *dichroitisch* gefärbt werden.[1]) Glimmer ist allerdings in den genannten Kristalltropfen nicht löslich. Die zu erwartende Verdrehung wird aber erhalten, wenn an Stelle von Glimmer Kolophonium oder dessen Hauptbestandteil, die Abietinsäure, benutzt wird, obschon auch diese sich nur in geringer Menge in dem Paraazoxyphenetol lösen.[2]) Die drehende Kraft geht also aus von den beigemischten fremden Molekülen, welche gleichmäßig verteilt zu denken sind, so daß *die Mittelebene der flüssigkristallinischen Schicht als feststehend betrachtet werden kann*, während die untere Grenzfläche sich nach der einen Richtung dreht, die obere nach der entgegengesetzten.

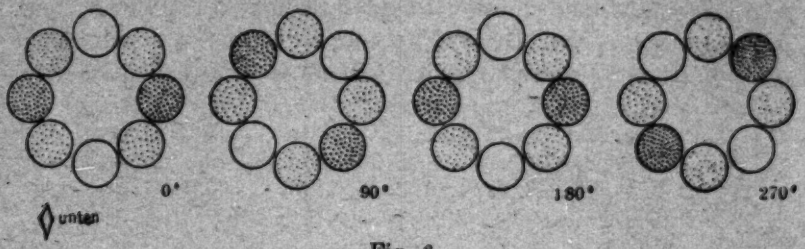


Fig. 6.

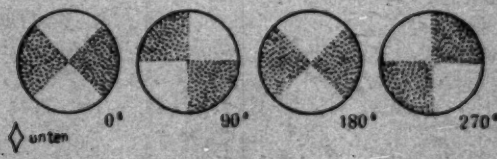


Fig. 7.

Nehmen wir also beispielsweise an, die Gesamtverdrehung der Schicht betrage 90°, welche sich zusammensetzt aus Verdrehung der Oberseite um 45° nach rechts und Verdrehung der Unterseite um 45° nach links, so wird man dieselbe Er-

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 8. p. 908. 1902.
2) Derselbe, Ann. d. Phys. 2. p. 667. 1900.

scheinung wie bei der oben besprochenen direkten mechanischen Verdrehung erhalten, wenn man bei letzterer die Unterseite nicht festhält, sondern um 45° nach links dreht.

Nehmen wir an, es sei nur der Polarisator, d. h. ein Nicolsches Prisma, *unter* dem Präparate vorhanden, und seine kurze Diagonale sei von links nach rechts gerichtet, so werden hiernach für die Verdrehungen um 0°, 90°, 180° und 270° die Farbenänderungen einer homogenen Schicht bei einer vollständigen Drehung um die Mitte des Gesichtsfeldes die in Fig. 6 dargestellten sein.

Homogene verdrehte Schichten dieser Art von größerer Ausdehnung zu erhalten, ist nicht möglich, weil immer Gruppierung der Moleküle um Fäden eintritt, die, falls sie (wie gewöhnlich) in der Sehrichtung liegen, als *Kern-* und *Konvergenzpunkte* erscheinen. Kleine Flächenelemente einer solchen Schicht können natürlich als homogen betrachtet werden, und auf solche lassen sich die vorigen Betrachtungen direkt anwenden. Man gelangt so zu der besprochenen Zusammenstellung von Sektoren zu einer Kreisscheibe. Die Anordnung der weißen und gelben Quadranten *für einen Kernpunkt* ergibt sich deshalb so, wie Fig. 7 zeigt. Wird das Nicolsche Prisma statt unter dem Präparate darüber eingeschaltet, so sind die Erscheinungen die in Figg. 8 u. 9 dargestellten.

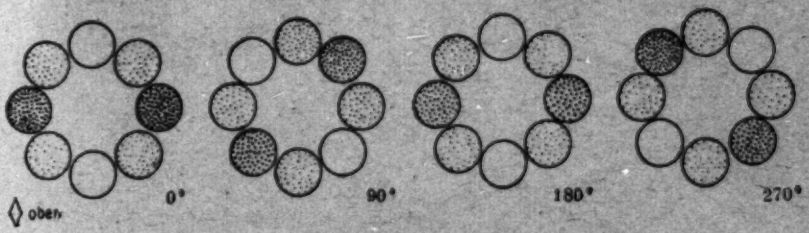


Fig. 8.

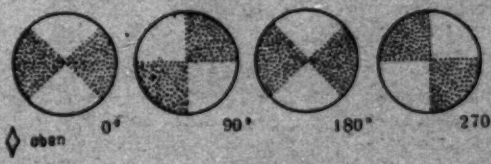


Fig. 9.

Wird nur der Polarisator, aber in um 90° verdrehter Stellung benutzt, d. h. so, daß seine kurze Diagonale die

Richtung unten—oben in der Figur hat, so wird der Anblick der von Figg. 10 u. 11 und bei Vertauschung des Polari-

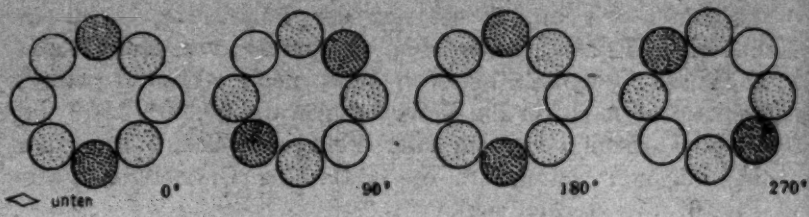


Fig. 10.

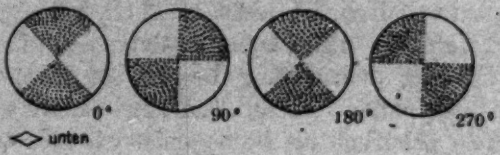


Fig. 11.

sators mit einem gleichgerichteten Analysator der von Figg. 12 u. 13.

Sind Polarisator und Analysator gleichzeitig vorhanden, so erhält man natürlich Übereinanderlagerung der Bilder,

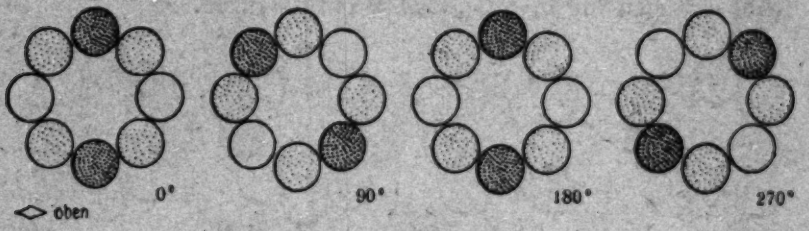


Fig. 12.

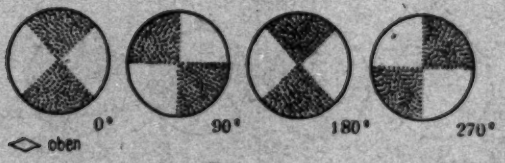


Fig. 13.

welche jeder für sich geben würde, und außerdem die bekannten Auslöschungen oder Verdunkelungen. So ergibt sich für *gekreuzte Nicols*, falls die kurze Polarisatordiagonale

rechts—links gerichtet ist, die in Figg. 14 u. 15 dargestellte Farben- und Helligkeitsverteilung; falls sie die Richtung unten—oben hat, die von Figg. 16 u. 17.

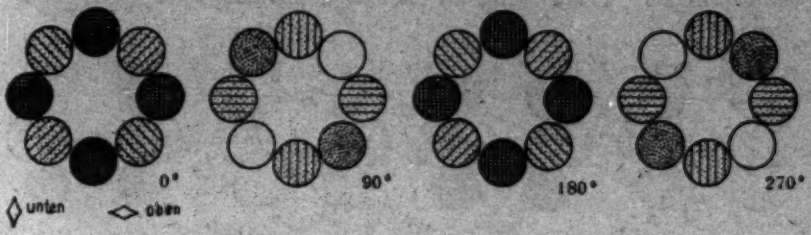


Fig. 14.

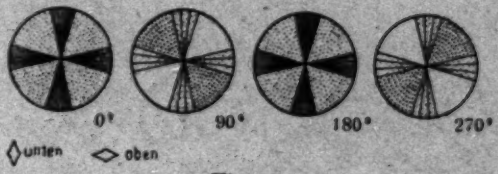


Fig. 15.

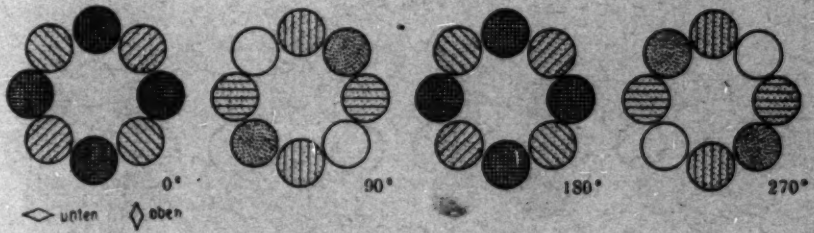


Fig. 16.

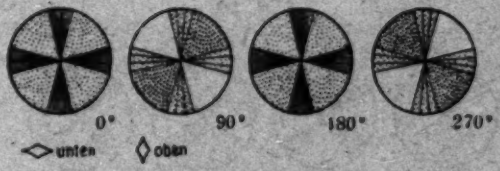


Fig. 17.

Sind Polarisator und Analysator *parallel*, so ist der Anblick für die Richtung rechts—links der kurzen Diagonale der von Figg. 18 u. 19 und für die Richtung unten—oben der von Figg. 20 u. 21. Man kann also auch *bei parallelen Nicols schwarze Kreuze* erhalten, wie ohne Verdrillung bei

gekreuzten, speziell bei den Verdrillungen 90° und 270°, *die Kreuze erscheinen aber um 45° gedreht.*

Die Lage der optischen Achsen auf Ober- bzw. Unterseite für 90° Verdrillung ist in den Figg. 22a u. b dargestellt,

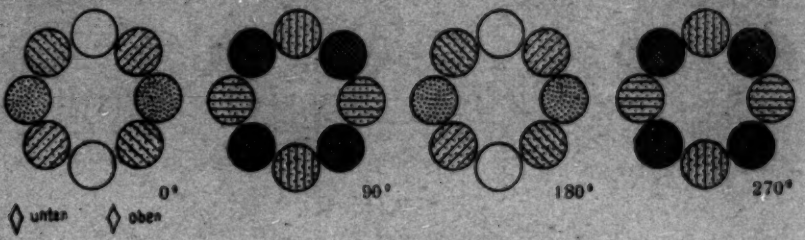


Fig. 18.

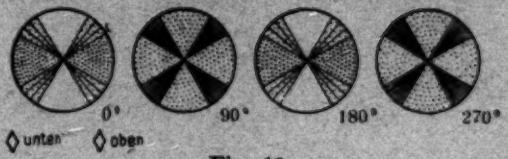


Fig. 19.

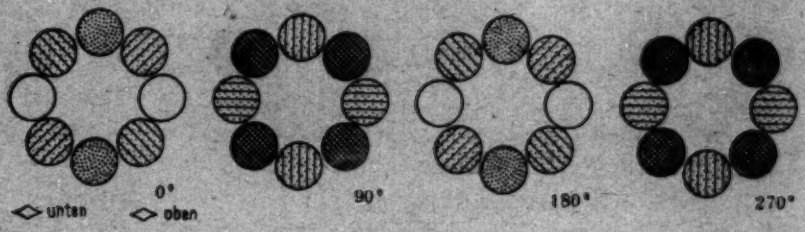


Fig. 20.

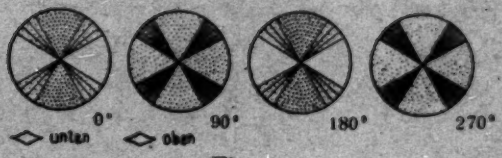


Fig. 21.

die aus dem einfachen, für die unverdrehte Schicht gültigen Strahlenbüschel (Fig. 23a) hervorgehen, indem man an jeder Stelle die optische Achse um 45° nach rechts bzw. links dreht. Für 270° würde eine Verdrehung um 135° vorzunehmen sein,

so daß der Windungssinn der Spiralen der umgekehrte wird. Für 180° resultiert wieder ein einfacher Strahlenbüschel, weshalb die Erscheinungen mit den bei 0° übereinstimmen.

Wie sich die Erscheinungen für andere ausgezeichnete Punkte gestalten, ist nach dem Gesagten leicht zu übersehen, wenn man den Verlauf der optischen Achsen berücksichtigt, welcher für den unverdrillten Zustand durch die Figg. 23a—d dargestellt ist, nämlich in Fig. 23a für einen ganzen Kernpunkt, in Fig. 23b für einen ganzen Konvergenzpunkt, in Fig. 23c für einen halben Kernpunkt und in Fig. 23d für einen halben Konvergenzpunkt. Für einen ganzen Konvergenz-

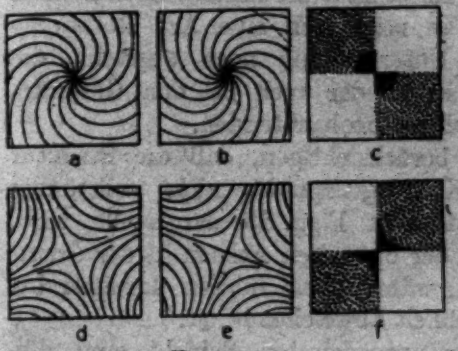


Fig. 22.

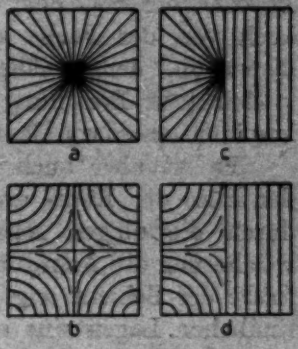


Fig. 23.

punkt ergibt sich hieraus bei Verdrillung um 90° die in Figg. 22a u. b veranschaulichte Struktur der Ober- bzw. Unterseite. Dementsprechend ist die Lage der gelben und weißen Quadranten, sowie die der schwarzen Sektoren bei oben eingeschaltetem Nicolschen Prisma für einen Kernpunkt bzw. Konvergenzpunkt die in den Figg. 23c bzw. f dargestellte.

Strukturbilder für Serien solcher Punkte und die sich daraus ergebenden optischen Erscheinungen habe ich bereits an anderer Stelle mitgeteilt, so daß es genügen möge, darauf zu verweisen.[1]) Die so vorauskonstruierten Erscheinungen stimmen mit den wirklich beobachteten im allgemeinen aufs

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 52. p. 468. 535 ff. 1917; Physik. Zeitschr. 19. p. 94. 1918; Die Lehre von den flüssigen Kristallen, p. 392. Wiesbaden 1918.

beste überein; somit läßt sich die chemische Strukturverdrehung als ein Spezialfall der mechanischen betrachten.[1])

In einzelnen Fällen lassen sich aber doch Abweichungen beobachten, die noch näherer Aufklärung bedürfen. So treten im Falle der mechanischen Verdrehung *nur* Verdunkelungen an Stelle von Auslöschungen, d. h. statt Schwarz erscheint Grau.

Bei der chemischen Strukturverdrehung beobachtet man häufig aber auch farbige Kreuze und Streifen, deren Farbe von der Dicke der Schicht abhängt und sich auch in der Nähe der Kern- und Konvergenzpunkte ändert, z. B. von Grün in Rot übergeht.[2]) Hier hängt also die Drehung der Polarisationsebene oder die Elliptizität des austretenden Lichtes auch von der Farbe ab; es zeigt sich eine Art Rotationsdispersion, deren nähere Untersuchung noch aussteht, die vielleicht in Beziehung steht zu der auch bei den Glimmerkombinationen von Reusch zu beobachtenden.

Es ist aber auch zu berücksichtigen, daß die Struktur der Höfe der Kern- und Konvergenzpunkte nicht vollständig durch die obigen schematischen Figg. 23 dargestellt wird, welche nur die Anordnung der optischen Achsen in der *Grenzfläche* der Schicht angeben, während sie in den darunter befindlichen Lagen eine erheblich abweichende ist.

Die Kernpunkte einer ausgedehnten Schicht sind dieselben, welche schon in den Kristalltropfen vorhanden waren,

---

1) Bei verdrehten, tropfbar-flüssigkristallinischen Schichten von Paraazoxyphenetol mit Olivenöl und etwas Kolophonium habe ich mich davon überzeugt, daß die Drehung der Polarisationsebene eine „*natürliche*" ist, d. h., daß, wenn der durchgegangene Strahl in seine Richtung reflektiert wird und die Schicht somit in entgegengesetzter Richtung nochmals durchläuft, die Drehung der Polarisationsebene verschwindet. Zu diesem Zwecke wurde das Präparat statt auf einen Objektträger, auf eine Quecksilberschicht in einer kleinen, flachen, eisernen Schale gebracht und durch einen Leitzschen Opakilluminator mit Polarisator von oben beleuchtet. Bei „magnetischer" Drehung der Polarisationsebene würde in diesem Falle die Drehung verdoppelt erscheinen.

2) Aus diesem Grunde sind bei Ausführung der Figuren bei meinen ersten Arbeiten über tropfbar-flüssige Kristalle (Wied. Ann. 40. p. 401. 1890; Ann. d. Phys. 2. p. 649. 1900) die Kreuze und dunklen Streifen in roter Farbe ausgeführt, und zwar beispielsweise, um ausdrücklich darauf hinzuweisen, in gesättigtem Rot. Richtiger wäre farbiges Grau (Rotgrau, Grüngrau usw.), indes sind eben jene Figuren nur schematisch.

durch deren Vereinigung sich die Schicht gebildet hat. Ein solcher Kristalltropfen besteht nach den bisherigen Ergebnissen[1]) aus einem spindelförmigen, isotropen Kerne und einem halbisotropen Mantel. In letzterem verlaufen auf der Oberfläche die optischen Achsen in Längekreisen, welche die Pole, die Faden des spindelförmigen Kernes, verbinden. Daraus folgt, daß die blättchenförmigen Moleküle, deren Fläche senkrecht zur optischen Achse ist, sich in konzentrischen, annähernd kugelförmigen Schalen um die Pole gruppieren. Da die optischen Erscheinungeu in der Nähe der Kernpunkte beim Zusammenfließen sich nicht ändern, folgt gleiches auch für diese Struktur, so daß also im Durchschnitt durch einen Kernfaden die Anordnung der Molekülblättchen in einer ausgedehnten flüssigkristallinischen Schicht die in Fig. 24 dargestellte wäre.

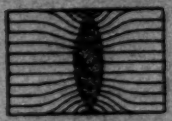


Fig. 24.

Da das Aussehen eines Konvergenzpunktes dem eines Kernpunktes außerordentlich gleicht, wird seine Struktur eine ähnliche sein müssen, insbesondere wird ein isotroper, spindelförmiger Kern nicht fehlen können, da sich sein Vorhandensein durch die Linsenwirkung kundgibt, welche die schwarzen Sektoren an den Spitzen der gelben Quadranten (Fig. 22 f) bedingt. Auffällig ist aber, daß niemals ein Konvergenzpunkt die Struktur des Mantels eines einfachen Kristalltropfens bestimmt, sondern immer nur ein Kernpunkt. Die Gruppierung der Moleküle muß also eine wesentlich andere sein, welche für sich allein nicht stabil ist, sondern nur bei gleichzeitiger Anwesenheit eines Kernpunktes. Ganz so wie die konzentrische Anordnung der Molekülblättchen um einen Kernpunkt an der Oberfläche sich als konzentrische Schalengruppierung sich in das Innere der Schicht hinein fortsetzt, wird man annehmen dürfen, daß die hyperbolische Gruppierung an der Oberfläche in der Nähe eines Konvergenzpunktes sich auch hyperbolisch ins Innere hinein fortsetzt. Unter Berücksichtigung aller dieser Momente gelangte ich zu der Vorstellung, die Struktur einer ausgedehnten Schicht in der Nähe eines Konvergenzpunktes müsse im Inneren die in Fig. 25 dargestellte sein.

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 410, 442; Physik. Zeitschr. 19. p. 95, Fig. 52. 1918.

Bei stärkerem Kolophoniumzusatz und Temperaturdifferenz zwischen Unter- und Oberseite treten zwischen Kern- und Konvergenzpunkten noch Trennungsflächen, verbunden mit Brennlinien, auf[1]), welche durch eine weitere Strukturstörung bedingt sind, nämlich, soweit sich dies aus dem optischen Verhalten erkennen läßt, durch eine Aufrichtung der Molekülblättchen, wie sie in Fig. 26 skizziert ist. Bei einfachen

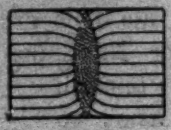


Fig. 25.

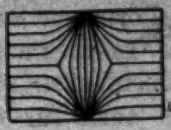


Fig. 26.

Kristalltropfen in I. Hauptlage, welche zu kreisförmigen Scheiben gepreßt sind, tritt die Störung am Rande auf (Fig. 27) und veranlaßt durch die entstehende Brennlinie, daß derselbe scharf hervortritt.[2]) Man könnte in diesem Falle von halber Störung sprechen, ebenso wie bei Kern- und Konvergenzpunkten, die an den Rand rücken.

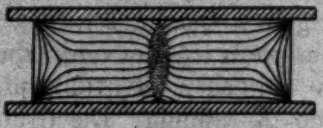


Fig. 27.

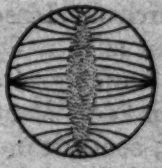


Fig. 28.

Im Grunde ist diese Störung identisch mit der Trennungsfläche, die sich schon bei einfachen Kristalltropfen zeigt, die ich auch „Zwillingsfläche" genannt habe (da vermutlich Zwillingsstellung der Moleküle Anlaß zu ihrer Entstehung gibt).[3]) Ist obige Auffassung zutreffend, so wäre also das Strukturschema eines einfachen, nicht verdrehten Kristalltropfens mit Trennungsfläche das in Fig. 28 gegebene. Bei schwacher Verdrehung krümmt sich der spindelförmige isotrope Kern

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 2. p. 682. 1900; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 17—19; Ann. d. Phys. 39. p. 105. 1912; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 440.

2) Vgl. Flüssige Kristalle 1904, Taf. 10, Fig. 2.

3) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 35. p. 213. 1911; Physik. Zeitschr. 12. p. 540. 1911; Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. 1911. Nr. 22 u. 25.

und trennt sich vom Faden, der an die Oberfläche wandert. Bei zylindrischen Säulen kristallinischer Flüssigkeit in Kapillaren nimmt er gar Korkzieherform an und sowohl der Faden wie die Trennungslinie winden sich als Spiralen von gleicher Ganghöhe um ihn herum[1]) (Fig. 29), so daß im Durchschnitt durch die Achse die Struktur die in Fig. 30 dargestellte wäre.

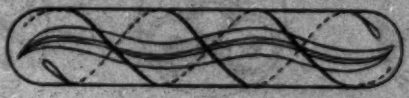


Fig. 29.

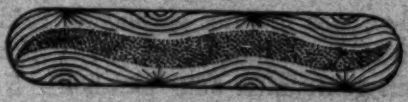


Fig. 30.

Konvergenzpunkte entstehen beim Zusammenfließen von Tropfen; die früher ausgesprochene Ansicht, daß ihre Zahl immer um Eins kleiner sei als die der Kernpunkte, hat sich indes bei weiteren Beobachtungen nicht als zutreffend erwiesen. Fig. 31 stellt den besonders einfachen Fall dar, daß

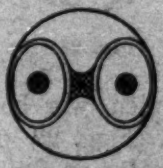


Fig. 31.

Fig. 32.

ein Tropfen durch Zusammenfließen von zwei Tropfen in I. Hauptlage entstanden ist, wobei ein Konvergenzpunkt mitten zwischen zwei Kernpunkten auftritt, welche von Trennungslinien umgeben sind, die den Hof des Kernpunktes berühren. Im Vertikaldurchschnitt wäre nach Obigem die Struktur die in Fig. 32 skizzierte. Bei der häufig zu beobachtenden Anordnung Fig. 33 sind an Stelle eines ganzen Konvergenzpunktes zwei halbe am Rande des Tropfens getreten. Figg. 34 u. 35 zeigen Tropfen mit drei bzw. vier Kern- und ebensovielen Konvergenzpunkten; Fig. 36 ein unregelmäßiges Aggregat

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 52. p. 736. 1917; Physik. Zeitschr. 19. p. 96. 1918.

mit vier ganzen Kernpunkten und drei ganzen, sowie drei halben Konvergenzpunkten. Im polarisierten Lichte erscheinen die Trennungs- oder Grenzlinien da stark schattiert, wo sie auf gelben Feldern verlaufen, während sie auf weißen fast

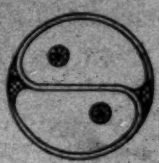


Fig. 33.

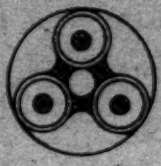


Fig. 34.

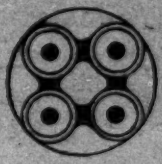


Fig. 35.

unsichtbar werden, was mit der gegebenen Erklärung übereinstimmt. Ebenso stimmt damit, daß der Verlauf der dunklen Streifen zwischen gekreuzten oder parallelen Nicols durch die Anwesenheit der Trennungs- und Brennlinien nicht wesentlich gestört wird.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Bei stark verdrehten Tropfen[1]) verlaufen wie bei den erwähnten zylindrischen Flüssigkeitssäulen (Figg. 29 u. 30) Faden und Trennungslinie in Form von Spiralen an der Oberfläche, wie die Figg. 37 (I. Hauptlage, Fadenenden in der Mitte) und Fig. 38 (II. Hauptlage, Fadenenden oben) andeuten. Vermutlich ist das Innere des Tropfens von einem kugeligen, isotropen Kerne ausgefüllt. Bei starker Verdrehung erscheint die Oberfläche der Tropfen fein schraffiert. Ihre Struktur entspricht der Fig. 30.

Bei den feinschraffierten *ellipsoidischen Mischkristalltropfen* von Paraazoxyphenetol und Cholesterylbenzoat[2]) ist der *Kern*

1) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 12. p. 540. 1911; 17. p. 241. 1916; Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. 1911. Nr. 22; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 30—35; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 450.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 2. p. 689. 1900; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 468.

ein im wesentlichen aus letzterer Substanz bestehender *schleimig-flüssiger Kristall*; die tropfbar-flüssigkristallinische, an der ersteren Substanz reichere, schraffierte Masse bildet nur einen *dünnen Überzug darauf*, so daß die Kristalle richtiger als Schichtkristalle oder *geschichtete Mischkristalle* zu bezeichnen wären, entsprechend einem Alaunkristall, der während des Wachstums mehr und mehr Chromalaun aufgenommen hat, somit nach außen hin reicher an letzterer Substanz ist. Durch die noch nicht ganz aufgeklärte Lichtbrechung wird bewirkt, daß die in Fig. 38 gezeichneten Spiralen nicht als solche erscheinen, sondern als parallele, gebogene oder hutförmige Schichten. Daß aber die Struktur tatsächlich eine spiralige ist, erkennt man namentlich beim Einbringen solcher Tropfen in eine Kapillare und Drehen derselben um ihre Achse, wobei die Schichten je nach dem Sinne der Drehung in der einen oder anderen Richtung wandern wie die Windungen einer zylindrischen Spirale, welche um ihre Achse rotiert.[1])

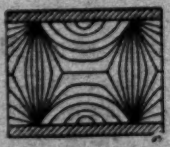


Fig. 39.

Fig. 40.

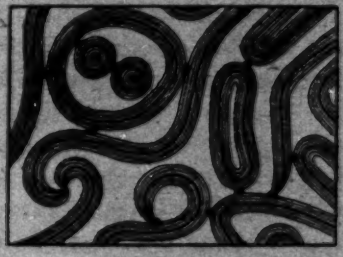


Fig. 41.

Eine merkwürdige Verbreiterung durch Umgebung mit einem Hofe erfahren die Trennungslinien bei den Mischkristalltropfen von Dibenzalbenzidin mit Äthoxybenzalazin und Kolophonium, wenn sich diese infolge chemischer Änderung durch längere Erhitzung an das Glas anschmiegen. Die Höfe der Kernpunkte und Konvergenzpunkte (d. h. die isotropen Spindeln) verschwinden ganz, und die zu „Bändern" verbreiterten Trennungslinien kommen in direkte Berührung mit den ganzen oder halben Kern- und Konvergenzpunkten, wie die Figg. 39 u. 40 andeuten. Der Anblick solcher Streifen in natürlichem Lichte ist in Fig. 41 dargestellt. Die Trennungslinie wird als

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 52. p. 736. 1917.

feine Linie in der Mitte des grauen, bandförmigen Streifens (Hofes) gesehen, die Kern- und Konvergenzpunkte erscheinen als einfache schwarze (eventuell bei anderer Tubusstellung als helle) Punkte. Außerhalb dieser Bänder ist die Masse an das Glas angeschmiegt, erscheint also schwarz, die Bänder selbst treten hell hervor, da sie in keiner Stellung auslöschen, sondern nur je nach der Orientierung weiß oder gelb werden, wie wenn sie Gebiete wären, in welchen die Struktur um 90° verdrillt ist.[1]) Da, wo sie gelb erscheinen, treten neben der Trennungslinie zu beiden Seiten noch breitere dunkle Linien auf (Fig. 42).

Fig. 42.

Die Bänder haben so Ähnlichkeit mit den öligen Streifen bei angeschmiegten schleimigflüssigen Kristallen, wenn auch ihre Struktur eine etwas andere ist. Aus diesem Grunde habe ich sie früher ebenfalls „ölige Streifen" genannt. Im natürlichen Lichte machen sie entweder den Eindruck von wirklichen Trennungsflächen[2]) oder den vertiefter Rinnen, zwischen welchen die nicht gestörten Teile, eventuell in Form schmaler Streifen, reliefartig erhaben hervortreten.[3]) Natürlich sind dies nur optische Täuschungen, bedingt durch die eigenartige Lichtbrechung. Kern- und Konvergenzpunkte pflegen schließlich ganz zu verschwinden, so daß nur noch die Streifen, eventuell als Schraffierung, zu sehen sind. Spiraliger Verlauf derselben wie bei der eben zitierten Fig. 27 entspricht der Fig. 37, wobei die Fäden wegzulassen sind.

Über Strukturverdrehung infolge einseitiger Anschmiegung und die dadurch bedingte Drehung der Polarisationsebene bei *10-Bromphenanthren-3- oder 6-sulfosäurehydrat* habe ich vor kurzem berichtet[4]), es genüge, hier darauf hinzuweisen.

Längst bekannt, aber noch nicht genügend aufgeklärt, ist die Drehung der Polarisationsebene in angeschmiegten Schichten von Mischungen *zweier schleimig-flüssigkristallinischer Modifikationen*, welche Schillerfarben zeigen.

---

1) Vgl. die Photographien in meinem Buche: Flüssige Kristalle 1904, Taf. 28—30.

2) Vgl. die Figg. 28 u. 29 in der Physik. Zeitschr. 17. p. 249. 1916.

3) Vgl. die Figg. 26 u. 27 l. c.

4) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 55. p. 90. 1918.

Die nach meiner Theorie der molekularen (physikalischen) Isomerie[1]) polymorpher Modifikationen zu erwartende Polymorphie bei flüssigkristallinischen Substanzen habe ich zuerst bei *Cholesterylcaprinat* aufgefunden.[2]) Beobachtet man die Umwandlung der bei höherer Temperatur, z. B. aus der Lösung in einem Gemische von Anilin und Amylalkohol sich ausscheidenden schleimigflüssigen, sehr kleinen Kriställchen der Modifikation I beim Erkalten unter 77,4° in solche der Modifikation II, so gibt sich dieselbe im wesentlichen nur kund durch das Auftreten von Interferenzfarben höherer Ordnung, entsprechend der stärkeren Doppelbrechung der letzteren Modifikation. Sehr auffällig wird aber der Vorgang bei sehr dünnen und infolgedessen *angeschmiegten* Schichten der reinen Substanz zwischen Objektträger und Deckglas. Die aus der isotropen Schmelze beim Abkühlen sich zuerst ausscheidende Modifikation I erscheint zunächst zwischen gekreuzten Nicols infolge der zahlreichen konischen Störungen als körnige, graue Masse. Durch Andrücken des Deckglases mit der Präpariernadel kann man bewirken, daß die konischen Störungen verschwinden und überall gleichmäßige Anschmiegung eintritt, die Schicht somit, da die optische Achse dann senkrecht zum Glase steht, schwarz erscheint. Tritt die Umwandlung in Modifikation II ein, so schmiegt sich auch diese alsbald dem Glase an, und zwar ganz von selbst, ohne daß Andrücken des Deckglases erforderlich wäre. Die Schicht bleibt also zwischen gekreuzten Nicols schwarz, und man könnte glauben, daß sich der Umwandlungsvorgang bei dieser Beobachtungsweise der Wahrnehmung vollständig entziehen müßte. Dem ist aber nicht so; man sieht vielmehr die Grenze der beiden Modifikationen deutlich fortwandern, langsam oder schnell, je nach dem Temperaturgefälle, doch nicht als scharfe Linie wie bei der Umwandlung fester polymorpher Modifikationen (z. B. von Ammoniumnitrat), sondern als *schmalen, farbigen Streifen* (Fig. 43)[3]), welcher *auf Seite der Modifikation I violett, auf*

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. p. 97. 1877; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 261 u. 346.

2) Derselbe, Zeitschr. physik. Chem. 56. p. 750. 1906; 73. p. 598. 1910; Die scheinbar lebenden Kristalle 1907, p. 49, Fig. 86; Physik. Zeitschr. 17. p. 243, Anm. 4, 1916.

3) Die verschiedenen Farben sind durch verschieden dichte Punktierung angedeutet.

Seite der Modifikation II rot gefärbt ist und dazwischen *alle übrigen Spektralfarben* zeigt. Drehung des Präparates bedingt keine Änderung der Farben, wohl aber Drehung des Analysators. Es handelt sich also um Drehung der Polarisationsebene, die von der Dicke der Schicht abhängt, wenigstens für einzelne Farben; andere treten unabhängig von der Schichtdicke als zirkularpolarisiertes Licht aus, andere als elliptischpolarisiertes. Die Farben treten auch ohne Nicols auf, wenn man die Schicht mit unbewaffnetem Auge im reflektierten Lichte betrachtet; die Intensität des reflektierten Lichtes in dem schmalen Streifen ist aber so groß, daß dieser *silberglänzend* oder überhaupt metallglänzend erscheint.

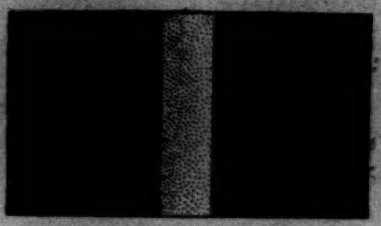


Fig. 43.

Die Breite des farbigen Streifens ist durch das Temperaturgefälle bedingt und wird um so größer, je kleiner dieses gemacht wird. Vielleicht würde es bei sorgfältiger Konstanthaltung der Temperatur, etwa unter Anwendung meines Ölbadkristallisationsmikroskops[1]), gelingen, die Farben, welche in dem Streifen nebeneinander erscheinen, nacheinander zu erhalten, derart, daß die ganze Schicht zunächst violett wird und dann alle Farben des Spektrums bis Rot durchläuft, womit dann der Übergang in die Modifikation II vollzogen ist.

Nach meiner Theorie der molekularen Isomerie, welche die Moleküle der beiden Modifikationen als verschieden betrachtet und in der Nähe der Umwandlungstemperatur Mischung der beiden Modifikationen in einem von der Temperatur abhängigen Verhältnis annimmt, derart, daß mit sinkender Temperatur die Konzentration der Modifikation II in ihrer Lösung in Modifikation I immer mehr zunimmt, bis schließlich Sätti-

1) O. Lehmann, Das Kristallisationsmikroskop, p. 71. Braunschweig 1910.

gung und infolgedessen Auskristallisieren (d. h. Umwandlung) eintritt, steht augenscheinlich die Farbenerscheinung in innigem Zusammenhange mit diesem stark von der Temperatur abhängigen Gleichgewichte der beiden Molekülarten.

Durch Beimischung fremder Stoffe, z. B. von Para-azoxyanisol, tritt ebenfalls eine Änderung des chemischen Gleichgewichtes der beiden Modifikationen ein, da sich unter gleichen Umständen die Breite des farbigen Streifens vergrößert (Fig. 44). Die Verbreiterung kann so weit gehen, daß die Modifikation II überhaupt nicht mehr auskristallisieren kann, weil zuvor Erstarrung eintritt. In diesem Falle

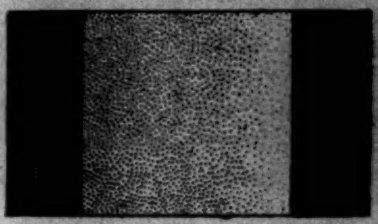


Fig. 44.

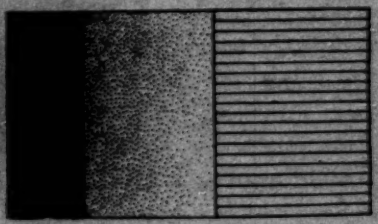


Fig. 45.

treten im allgemeinen nicht mehr alle Spektralfarben auf; dieselben können z. B., wie Fig. 45 andeutet, von Grün an infolge des Auftretens der festen Modifikation unterdrückt sein. Gleiches gilt für andere sich analog verhaltende Verbindungen des Cholesteryls, bei welchen auch ohne fremde Zusätze die Modifikation II nicht zu erhalten ist, da, bevor die Lösung derselben in der Modifikation I die Sättigungskonzentration beim Abkühlen erreichen würde, die ebenfalls an dem chemischen Gleichgewichte beteiligte feste Modifikation in solcher Konzentration auftritt, daß sie auskristallisiert. So beobachtet man bei Cholesterylbenzoat nach dem Auftreten der Modifikation I nur eine violette Farbenerscheinung, worauf alsbald Erstarrung eintritt; bei Cholesterylacetat folgt auf Violett noch Grün, bei Cholesterylcinnamylat treten alle Farben bis Rot auf, ohne daß aber die Modifikation II zur Ausscheidung gelangte.[1]) Bringt man die Schmelzen von Cholesterylcaprinat und -cinnamylat in dünner Schicht unter

1) O. Lehmann, Zeitschr. physik. Chem. 56, p. 750. 1906.

einem ebenen Deckglase in Berührung, so daß an der Grenze Mischung eintritt, so schreitet der farbige Streifen beim Eintritt der Umwandlung des Caprinats gleichmäßig bis zu dieser Mischzone fort, bleibt aber darin gewissermaßen stecken. Durch Mischung mehrerer solcher Cholesterylverbindungen (insbesondere auch Propionat) kann man Präparate erhalten, welche die Farbenerscheinung noch stundenlang zeigen, nachdem die Temperatur längst auf Zimmertemperatur heruntergesunken ist, da durch die Mischung die Konzentration der festen Modifikationen, also die Erstarrungstemperatur, bedeutend erniedrigt wird.

Wesentlich für das Auftreten dieser „*Schillerfarben*" ist *Anschmiegung der Schicht*, d. h. Einstellung der optischen Achse senkrecht zur Schichtfläche. Sie treten am vollkommensten auf, wenn das Licht senkrecht zur Schicht, also in der Richtung der optischen Achse, auftritt; die Farbe ändert sich erheblich bei schiefer Inzidenz oder wenn etwa durch Andrücken des Deckglases mit einer Präpariernadel lokal die Anschmiegung gestört, d. h. schiefe Richtung der optischen Achse hervorgebracht wird. Im Momente des Drückens blitzt die farbenschillernde Masse auf, indem z. B. blaue Farbe plötzlich in Grün und Rot übergeht. Gleiches beobachtet man im durchfallenden Lichte zwischen gekreuzten Nicols. Bei kräftigem Hin- und Herschieben des Deckglases wird die grünschillernde Masse weißlich seidenglänzend, weil sich zahlreiche, in rotgelber Farbe leuchtende ölige Streifen[1]) einstellen, deren Farbe sich bei Betrachtung mit freiem Auge mit dem Grün mischt. Die öligen Streifen löschen natürlich beim Drehen des Präparates zwischen gekreuzten Nicols aus, während das grüne Licht bestehen bleibt, weil es auf Drehung der Polarisationsebene beruht[2]) und rings um die optische Achse die Schicht symmetrisch ist.

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 335.

2) O. Lehmann, Molekularphysik 2. p. 510, 589. 1888; Zeitschr. physik. Chem. 4. p. 472. 1889; Ann. d. Phys. 2. p. 669, 684. 1900; Physik. Zeitschr. 7. p. 578. 1906; 11. p. 585. 1910; F. Giesel, Physik. Zeitschr. 11. p. 192. 1910; D. Vorländer, Ber. d. D. Chem. Ges. 41. p. 2036, 2045. 1908; M. Ed. Huth, Diss. Halle 1909; F. Stumpf, Diss. Gött. 1911; Ann. d. Phys. 37. p. 351. 1912; K. Frank, Diss. Halle 1912; D. Vorländer u. Fr. Janecke, Zeitschr. physik. Chem. 85. p. 697. 1913;

Davon, daß die Schillerfarben und die entsprechenden Farben zwischen gekreuzten Nicols ausbleiben, wenn die Strahlen die Schicht erheblich schief zur optischen Achse durchdringen, kann man sich überzeugen, wenn man die Masse in eine *feine Kapillarröhre* einsaugt. Bei 0,04 mm lichter Weite beobachtet man dann infolge der Anschmiegung[1]) in der Achse einen schwarzen Streifen und zu beiden Seiten das Hellgrau I 0, nachdem die Umwandlung in Modifikation II stattgefunden hat. Nach Rückumwandlung in Modifikation I durch Erwärmen zeigt sich die durch zahlreiche konische Störungen bedingte Aggregatpolarisation. Bei abermaliger Abkühlung stellen sich wieder die Interferenzstreifen wie zuvor ein; von Schillerfarben und den ihnen entsprechenden Farben im durchgehenden Lichte ist aber nichts zu sehen. In einer Kapillare von 0,588 mm lichter Weite folgten, nachdem sich die Modifikation II gebildet hatte, auf den schwarzen Streifen die Farben I. u. II. Ordnung, dann sehr breit das Rot III. Ordnung, sodann gegen den Rand wieder die Farben II. u. I. Ordnung. Bei Ausscheidung der Modifikation I aus der isotropen Schmelze bildete sich erst eine dünne angeschmiegte Schicht, ausgehend von Stellen, wo Luftblasen die Wand berührten; mit dem Dickerwerden derselben stellten sich aber wieder die zahlreichen konischen Störungen und damit Aggregatpolarisation ein.

Die Drehung der Polarisationsebene beim senkrechten Durchgang des Lichtes durch eine angeschmiegte Schicht kann man sich natürlich ebenso wie die bei anderen optisch-aktiven Stoffen und bei Glimmerkombinationen durch zirkulare Doppelbrechung hervorgebracht denken.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Glimmerkombinationen und den oben beschriebenen tropfbarflüssigen Kristallen mit verdrehter Struktur besteht scheinbar darin, daß die Moleküle *optisch einachsige* Blättchen sind. Dies ist indes wohl nur eine Täuschung, welche durch die halbisotrope Struktur der schleimigflüssigen Kristalle bedingt ist, d. h.

W. Voigt, Gött. Nachr. 1916; Physik. Zeitschr. 17. p. 133. 1916; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 52. p. 527. 1917; Physik. Zeitschr. 19. p. 73. 520. 1918; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 349.

1) O. Lehmann, Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. 1911. Nr. 22. p. 17; Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 301.

dadurch, daß sich nur die Hauptachsen der Moleküle parallel richten, während die Nebenachsen beständig wechselnde, regellose Lagen einnehmen.[1]) Die angeschmiegten Schichten dürfen nicht, wie es von Vorländer u. a. geschehen ist[2]), als optisch einachsige Platten mit Raumgitterstruktur betrachtet werden. Durch Nebeneinanderschichten solcher entstehen auch keine Schillerfarben.

Bei schiefer Durchsicht durch eine farbenschillernde Schicht zeigt sich eine Art *Dichroismus*, insofern sich die Farbe je nach der Lage der Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes ändert. Auch dieser Dichroismus ist wohl zu unterscheiden von wahrem Dichroismus, bei welchem Absorption des Lichtes, d. h. Umwandlung desselben in Wärme, eintritt.

W. Voigt[3]) ist der Ansicht, daß man die Erscheinungen mathematisch so behandeln könne, wie wenn wirklicher Dichroismus, verbunden mit molekularer, zirkularer Doppelbrechung vorläge. Die Zirkularpolarisation der Schillerfarben soll dadurch bedingt sein, daß der eine der beiden durch zirkulare Doppelbrechung entstandenen Strahlen vollkommen absorbiert wird. Der Umstand, daß diese Absorption und zirkulare Doppelbrechung nur in dem relativ kleinen Temperaturintervall, in welchem die beiden Modifikationen gleichzeitig in chemischem Gleichgewichte vorhanden sind, auftritt, scheint mir dafür zu sprechen, daß es sich lediglich um Interferenzerscheinungen handelt[4]), bedingt durch feine Lamellenstruktur infolge von Heterotropie (Selbstreinigungsvermögen), welche zur Folge hat, daß sich abwechselnd dünne Lamellen, welche mehr von der einen und anderen Modifikation enthalten, ausbilden und sich optisch derart verschieden verhalten, daß Lichtreflexion an der Grenze zweier Lamellen eintritt. Die Dicken der Lamellen müßten von der Größenordnung der Lichtwellenlängen sein. Jede einzelne Lamelle hätte Schraubenstruktur und würde infolgedessen zirkulare Doppelbrechung aufweisen. Der strenge Nachweis der Existenz solcher Lamellen ist mir freilich bisher nicht gelungen.

---

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen 1918, p. 283, 286.

2) D. Vorländer, Physik. Zeitschr. 15. p. 144. 1914.

3) W. Voigt, Gött. Nachr. 1916; Physik. Zeitschr. 17. p. 133. 1916.

4) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 11. p. 585. 1910.

Bei den angeschmiegten Schichten in sehr engen Kapillaren müßten sie da, wo der Übergang von Modifikation I in II stattfindet, als sehr feine Schraffierung erkennbar sein, wenn sie genügend große Ausdehnung hätten. Letzteres ist aber nicht der Fall; denn wie daraus hervorgeht, daß die Reflexion von schillernden Schichten keine regelmäßige, sondern eine diffuse ist, können die Lamellen nur sehr kleine, nicht in gleichen Ebenen befindliche Blättchen sein. Da die Modifikation I zahlreiche konische Störungen enthält und die Orientierung der neuen Moleküle gegen die früheren bei polymorpher Umwandlung eine gesetzmäßige zu sein pflegt (insbesondere auch bei Cholesterylcaprinat[1]), so wird im ersten Momente die Orientierung der Blättchen eine völlig unregelmäßige sein und erst mit fortschreitender Anschmiegung einigermaßen regelmäßig werden. Auch dann sind sie aber, wie die Farbenänderung beweist, in beständiger Umbildung begriffen und verschwinden ganz, wenn die Umwandlung in Modifikation II sich vollständig vollzogen hat. Da die Brechungsquotienten nicht sehr verschieden sein können, werden ihre Umrisse auch nur schwach sichtbar sein; die starke Lichtreflexion erklärt sich durch Summierung der Wirkungen infolge ihrer großen Anzahl. Tatsächlich beobachtet man an der Grenze der beiden Modifikationen in engen Kapillaren keine geordnete Struktur, wenn auch Bündel paralleler Blättchen aufzutreten scheinen. Es muß deshalb dahingestellt bleiben, ob meine Annahme zutreffend ist; sie scheint mir aber die einzige, welche die Tatsachen zu erklären vermag. W. Voigt glaubt allerdings, ohne dieselbe auskommen zu können und bringt das Phänomen der Schillerfarben in innige Beziehung zu der anfänglich behandelten Drehung der Polarisationsebene bei dichroitischen tropfbarflüssigen Kristallen, bei welchen durch Beimischungen Schraubenstruktur hervorgerufen wird, so daß sie in der Nähe von Kern- und Konvergenzpunkten Wechsel der Quadrantenfärbung zeigen. Da indes hier Schillerfarben nicht auftreten und bei den Cholesterylverbindungen wahrer, auf Absorption beruhender Dichroismus fehlt, genügen die bisherigen Ausführungen nicht, um die Erscheinungen ohne Hinzunahme der Lamellenhypothese verständlich zu machen.

1) O. Lehmann, Zeitschr. physik. Chem. 56. p. 750. 1906; 73. p. 598. 1910.

Es muß auch berücksichtigt werden, daß bei den verdrehten tropfbar-flüssigkristallinischen Schichten die optische Achse im allgemeinen quer oder schief zur Schichtung liegt, bei den schleimig-flüssigkristallinischen angeschmiegten Schichten mit Farbenschiller dagegen in der Schrichtung. Im ersten Falle entstehen die Quadranten im *parallelen* Lichte wegen radialer oder hyperbelartiger Gruppierung der optischen Achsen (Molekülachsen) um einen Punkt (Kern- oder Konvergenzpunkt), im letzteren Falle im *konvergenten* Lichte, während die optischen Achsen überall parallel sind.

Karlsruhe, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, Okt. 1918.

(Eingegangen 7. Oktober 1918.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

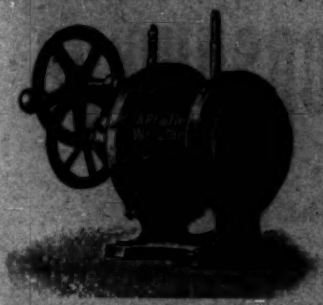
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

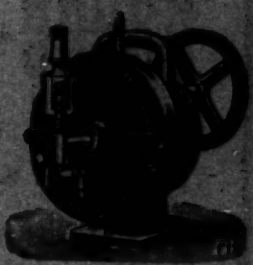
Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.



System Gaede, D.R.P. angemeldet

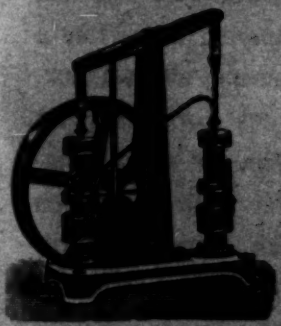


Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



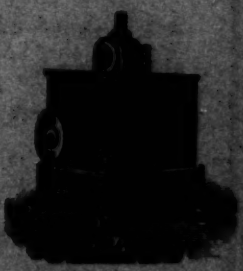
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

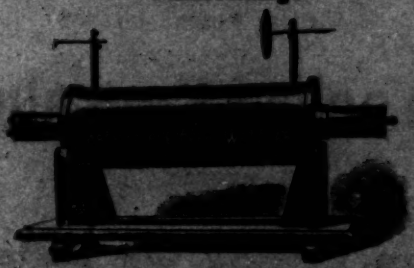
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. Fritz Reiche. Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs 657
2. M. v. Laue. Unter welchen Bedingungen kann man von einem Elektronengas reden? 695
3. J. Stark und O. Hardtke. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IX. Vergleich von Dupletserien 712
4. J. Stark. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. X. Zusammenhang der Serien eines Systems 723
5. E. Brose. Stärke des elektrischen Feldes und Zerlegung der Wasserstofflinien vor der Kathode des Glimmstroms 731
6. E. Grüneisen. Die thermische Ausdehnung regulär kristallisierender fester Körper. (Zweite Mitteilung.) 753

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. *Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs;* von *Fritz Reiche.*

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. § 1. Methoden zur Lösung des Problems. — § 2 Erste Lösungsmethode. Der Dipol im Magnetfeld. — § 3. Zweite Lösungsmethode. Der symmetrische Kreisel im Schwerefeld. — § 4. Der statistische Teil des Problems und die Lösung. — § 5. Der $n$te Quantenzustand hat das Gewicht $2n+1$. — § 6. Der $n$te Quantenzustand hat das Gewicht $n+1$. — § 7. Der nullte Quantenzustand der Kurve I verboten. — § 8. Der nullte Quantenzustand der Kurve II verboten. — § 9. Die Quantenzustände, für die $n_2 = 0$, sind verboten. — § 10. Die Kurve von Planck. — § 11. Zusammenfassung. — Anhang.

Einleitung.

Durch die Versuche von A. Eucken ist die Tatsache festgestellt, daß die Rotationswärme des gasförmigen Wasserstoffs (d. h. der Anteil seiner Molekularwärme, der von den zwei Rotations-Freiheitsgraden der Molekel herrührt) nicht für alle Temperaturen den von der klassischen Theorie geforderten Wert $R = 1{,}985$ cal. besitzt, sondern nach tiefen Temperaturen hin allmählich bis zum Wert 0 herabsinkt. Die Theorie dieses Abfalls der Rotationswärme zweiatomiger Gase, der auf Grund der Quantentheorie bereits im Jahre 1911 von Nernst vorhergesagt wurde, ist zuerst — allerdings in nicht einwandfreier Weise — von Einstein und Stern[1]), und in der Folgezeit von mehreren Seiten eingehend behandelt worden. Und zwar kann man die bisherigen Arbeiten, die sich mit diesem Thema befassen, nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren:

1. Nach den *benutzten Molekülmodellen.* Die meisten Autoren benutzen das bekannte Hantelmodell, eine starre gewichtslose Stange, die an ihren beiden Enden die Atommassen trägt. Epstein[2]) und Smekal[3]) dagegen führen die Rechnung am Bohr-Debyeschen Wasserstoffmolekülmodell durch.

1) Ann. d. Phys. 40. p. 551. 1913.
2) Ber. d. D. phys. Ges. 18. p. 398. 1916.
3) Noch nicht veröffentlicht.

2. Nach der *Zahl der Freiheitsgrade*. Die älteren Arbeiten haben hier, in Ermangelung einer Quantentheorie für mehrere Freiheitsgrade, einfach mit einem Freiheitsgrad gerechnet, während die neueren Behandlungen des Problems, auf die moderne Fortbildung der Quantentheorie gestützt, den zwei vorhandenen Rotationsfreiheiten Rechnung tragen.

3. Nach der *Art der benutzten Quantentheorie*, d. h. nach dem Unterscheidungsprinzip, ob die erste oder die zweite Planckschе Quantentheorie zugrunde gelegt wurde.

Die folgende kleine Tabelle gibt eine Übersicht über die Einteilung der bisherigen Arbeiten nach den genannten 3 Prinzipien.

A. Hantelmodell.

	I. Planck'sche Theorie	II. Planck'sche Theorie
1 Freiheitsgrad	Ehrenfest [1])	Holm [2]), Weyssenhoff [3])
2 Freiheitsgrade	Reiche	Planck [4]) (kohärent) Rotszayn [5]) (inkohärent)

B. Bohr-Debyesches Modell

2 Freiheitsgrade	Epstein	Smekal

Die folgende Arbeit legt das Hantelmodell und die erste Planckschе Theorie zugrunde, behandelt aber das Problem allgemein als ein Problem von 2 Freiheitsgraden. Sie stellt also eine Weiterbildung der Ehrenfestschen Rechnungen dar. Man gewinnt hierbei Kurven für die Rotationswärme des Wasserstoffs, die mit den nach der zweiten Planckschen Theorie berechneten Kurven von Planck und Rotszayn verglichen werden können. Dieser Vergleich sollte in möglichst allen lösbaren und experimentell prüfbaren Fällen angestellt werden, solange die eine Kernfrage der Quantentheorie noch unentschieden ist: Ob man nämlich nach der ersten Planckschen Theorie (der Punktgittertheorie) oder nach der zweiten (der Zellentheorie) zu rechnen hat.

1) Ber. d. D. phys. Ges. **15**. p. 451. 1913.
2) Ann. d. Phys. **42**. p. 1311. 1913.
3) Ann. d. Phys. **51**. p. 285. 1916.
4) Ber. d. D. phys. Ges. **17**. p. 407. 1915.
5) Ann. d. Phys. **57**. p. 81. 1918.

§ 1. Methoden zur Lösung des Problems.

Die Lösung des vorliegenden Problems besteht bekanntlich aus zwei Teilen, einem dynamischen und einem statistischen. Im dynamischen Teil werden die gequantelten Bewegungen der Wasserstoffmolekel, also eines Hantelmodells, aufgesucht, die nach der ersten Planckschen Theorie die allein möglichen Zustände der Molekel darstellen. Im statistischen Teil wird eine Gesamtheit von sehr vielen gleichartigen Molekeln im thermodynamischen Gleichgewicht bei einer festen Temperatur betrachtet, die Verteilung der Rotationsenergie in dieser Gesamtheit bestimmt und daraus die mittlere Rotationsenergie des ganzen Systems berechnet. Durch Differentiation nach der Temperatur folgt dann die Rotationswärme als Funktion der Temperatur.

Das benutzte Modell der Wasserstoffmolekel (Hantelmodell) besteht aus einer starren gewichtslosen Stange, an deren Enden die beiden Massen der Wasserstoffatome sitzen. Das Trägheitsmoment dieser Molekel bezüglich einer Symmetrieachse, die senkrecht zur Verbindungslinie der Atome steht, sei J. Die Rotation um die Verbindungslinie der Atome selbst spielt bekanntlich beim Energieaustausch keine Rolle. Man kann daher im Hinblick auf die statistische Behandlung von vornherein diese Rotation ausschalten, indem man sich etwa den Schwerpunkt festgehalten denkt und nur die beiden Freiheitsgrade berücksichtigt, die den Rotationen um Achsen senkrecht zur Verbindungslinie entsprechen.

Die freie Bewegung der Molekel ist dann bekanntlich eine Drehung um den Schwerpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einer raumfesten Ebene. Da also, trotz der zwei Freiheitsgrade, die Zustandswahrscheinlichkeit durch eine einzige Größe (die Energie) bestimmt ist, so haben wir es hier mit einem „entarteten" Problem zu tun. Bei derartigen Problemen stößt man aber, wenn man die erste Plancksche Theorie zugrunde legt, im statistischen Teil bei der Berechnung der Verteilungsfunktion auf eine Schwierigkeit, die darin besteht, daß man von vornherein die „Gewichte" der einzelnen Quantenzustände nicht anzugeben vermag. Stellt man sich dagegen auf den Boden der zweiten Planckschen Theorie, nach der alle Zustände im Phasenraum möglich sind und die quantenmäßig ausgezeichneten nur Phasengebiete konstanter

Wahrscheinlichkeit abgrenzen, so liegt hier die Sache einfacher. Denn die Verteilungsfunktion bezieht sich hier auf gleichmäßig erfüllte Phasengebiete, und die Gewichte sind daher durch die Größe dieser Phasengebiete gegeben.

Um die genannte Schwierigkeit bei der ersten Planckschen Theorie, die wir hier zugrunde legen, zu überwinden, gehen wir am zweckmäßigsten von einem *nicht entarteten* Problem aus und nehmen dann den geeigneten Grenzübergang vor. Man kann natürlich auf mehrere verschiedene Weisen das Problem zu einem nicht entarteten machen. Wir wählen hier die folgenden beiden Methoden:

1. Wir denken uns die beiden Atome der Molekel mit entgegengesetzt gleichen magnetischen Ladungen versehen, erzeugen also einen magnetischen Dipol, und bringen das so entstandene Gebilde in ein homogenes, konstantes, schwaches Magnetfeld. (An Stelle der magnetischen Ladungen und des Magnetfeldes können wir natürlich auch elektrische Ladungen und ein homogenes elektrisches Feld verwenden.) Der anzuwendende Grenzübergang besteht hier in dem Übergang zum verschwindenden äußeren Feld.

2. Wir gehen von dem Problem des *schweren symmetrischen Kreisels* aus, der zwei gleiche Trägheitsmomente $J = K$ senkrecht zur Figurenachse und ein davon verschiedenes Trägheitsmoment L bezüglich der Figurenachse besitzt. Hier muß man den Impuls parallel der Figurenachse (d. h. die Drehung um diese Achse) zu Null abnehmen lassen und zum Grenzfall verschwindenden Schwerefeldes übergehen.

§ 2. Erste Lösungsmethode. Der Dipol im Magnetfeld.

Das Problem, die Bewegungen eines frei drehbaren magnetischen Dipols im homogenen schwachen Magnetfeld zu berechnen und zu quanteln, ist im Hinblick auf die Quantentheorie des Paramagnetismus vom Verfasser[1]) und unabhängig davon von S. Rotszayn[2]) gelöst worden. Die Bewegung verläuft bei Anwesenheit des Magnetfeldes nicht mehr in einer Ebene und ist daher allgemein durch zwei Bestimmungsstücke charakterisiert: den Polarwinkel ϑ der Dipolachse mit der raumfesten-ζ-Achse und den Präzessionswinkel ψ, d. h. den Winkel, den die Projektion der Dipolachse auf die feste

1) Ann. d. Phys. 54. p. 401. 1918.
2) Ann. d. Phys. 57. p. 81. 1918.

ξ—η-Ebene mit der ξ-Achse bildet. Sind p_ϑ und p_ψ die entsprechenden Impulse, so lauten die Quantenbedingungen nach Sommerfeld-Epstein:

$$(1)\qquad \begin{cases} \oint p_\vartheta \, d\vartheta = n_1 h, \\ \int_0^{2\pi} p_\psi \, d\psi = 2\pi p_\psi = 2\pi\beta = n_2 h. \end{cases}$$

Dabei sind n_1 und n_2 ganze Zahlen, h ist die Plancksche Konstante, $p_\psi = \beta$ ist der konstante Präzessionsimpuls des Dipols.

Es ist hier zu beachten, daß die Präzession sowohl in positivem als in negativem Sinne um die Feldrichtung geschehen kann, daß also $p_\psi = \beta$ sowohl positiver wie negativer Werte fähig ist. Legt man, wie dies in der Literatur meist geschieht, die Integrationsrichtung der Phasenintegrale in die Bewegungsrichtung, so haben die Impulse und Koordinatendifferentiale stets dasselbe Zeichen, und es werden n_1 und n_2 *positiv oder 0*. In diesem Fall muß man für negative p_ψ die zweite Quantenbedingung in:

$$(1a)\qquad \int_0^{-2\pi} p_\psi \, d\psi = -2\pi p_\psi = -2\pi\beta = n_2 h$$

abändern. Für die Quantenwerte der Energie folgt dann:[1])

$$(2)\qquad W_{n_1 n_2} = \frac{(n_1 + n_2)^2 h^2}{8\pi^2 J} + m\mathfrak{H}; \qquad W_{0,0} = 0,$$

wobei m das Moment des Dipols, $\mathfrak{H}$ die Feldstärke des Magnetfeldes ist. Geht man zum Grenzfall verschwindender Feldstärke über, so folgt

$$(3)\qquad W_{n_1 n_2} = \frac{(n_1 + n_2)^2 h^2}{8\pi^2 J}.$$

Bei der Bildung der Verteilungsfunktion und der statistischen Mittelwerte ist dann zu beachten, daß jedem Wertepaar n_1, n_2 zwei verschiedene Zustände von gleicher Energie im Phasenraum entsprechen, für die p_ψ entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Nur diejenigen Quantenzustände für die $n_2 = 0$ ist, bilden eine Ausnahme.

Man kann diesen Sachverhalt auch so darstellen, daß man an der Formulierung (1) der Quantenbedingungen auch für

1) Ann. d. Phys. 54. p. 410. Formel (39). 1918.

negative p_ψ festhält, dann aber n_2 auch negative Werte erteilt. In (2) und (3) tritt dann $|n_2|$ an Stelle von n_2. Im Gegensatz hierzu berücksichtigt Planck[1]) in analogen Fällen *nur die positiven* p_ψ. Man erkennt leicht, daß bei Zugrundelegung der zweiten Planckschen Theorie die statistischen Mittelwerte unabhängig davon sind, ob man nur die positiven p_ψ berücksichtigt oder auch den negativen p_ψ Rechnung trägt. Dagegen liefern diese beiden Rechnungsprinzipien im allgemeinen verschiedene Resultate, wenn man sich auf den Boden der ersten Planckschen Theorie stellt. Wir werden daher in folgendem beide Wege beschreiten und die Ergebnisse mit der Erfahrung vergleichen (vgl. Anhang).

Auf eine prinzipielle Schwierigkeit muß hier noch hingewiesen werden. Wenn man zum Grenzfall $\mathfrak{H} = 0$ übergeht, die Bewegung des Hantelmodells also in einer festen Ebene verläuft, so ist, wegen der Symmetrie der Hantel (die beiden Atome sind ja durchaus gleich) *bereits nach einer halben Umdrehung* das System in ursprünglichem Zustand. Der gesamte Wertbereich des Winkels ψ erstreckt sich also dann nur von 0 bis π (bzw. von 0 bis $-\pi$) und die zweite Quantenbedingung ist daher durch

$$(1^*) \qquad \int_0^{\pi} p_\psi \, d\psi = \pi \cdot p_\psi = n_2 h$$

zu ersetzen. Ebenso ist in dem ersten Phasenintegral (1) nur der entsprechende Wertbereich von ϑ (von $\vartheta_{\min}$ bis $\vartheta_{\max}$, *nicht* zurück bis $\vartheta_{\min}$) zu setzen. Dann tritt an die Stelle von (3) der Ausdruck[2])

$$(3^*) \qquad W_{n_1 n_2} = \frac{(n_1 + n_2)^2 h^2}{2\pi^2 J} .$$

Beim Vergleich mit der Erfahrung macht sich der Unterschied zwischen (3) und (3*) nur in einem veränderten Wert des Trägheitsmoments geltend. Aber eine Schwierigkeit liegt in dem Umstand, daß das geringste äußere Feld oder die geringste Verschiedenheit der beiden Atome sofort bewirkt, daß das System *erst nach einer vollen Umdrehung* den Wertbereich seiner Variablen ganz durchlaufen hat und daß infolgedessen dann

1) Ann. d. Phys. 50. p. 389 u. 394. 1916.
2) Vgl. z. B. L. Flamm, Phys. Zeitschr. 19. p. 126. 1918.

nach ψ von 0 bis 2π, nach ϑ von ϑ_{min} bis ϑ_{max} *und zurück* zu integrieren ist, woraus Formel (3) resultiert.[1])

1) Eine analoge Schwierigkeit ergibt sich z. B. bei der Behandlung des folgenden speziellen Dreikörperproblems: Die Bewegung, die zwei Elektronen unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Abstoßung und der Anziehung von einem festen, ruhenden Kern von der Ladung $+2e$ ausführen, soll gequantelt werden. Man kann zeigen, daß die Bewegung der beiden Elektronen dann darin besteht, daß sie, bezüglich des Kerns einander diametral gegenüberstehend, zwei Keplerellipsen um den Kern als Brennpunkt beschreiben („Ellipsenverein" von zwei Ellipsen, vgl. Fig. 1). Der zum Winkel φ gehörige Impuls p_φ des „Systems" (beide Elektronen + Kern) ist hier:

$$p_\varphi = 2m r^2 \dot{\varphi}\ (m = \text{Masse der Elektronen},\ r = 0A = 0B).$$

Die erste Quantenbedingung lautet daher

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = nh.$$

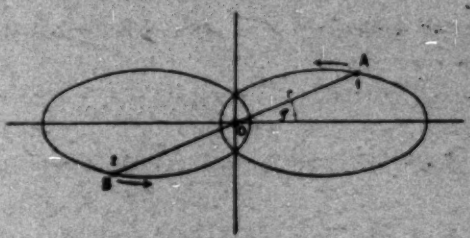


Fig. 1.

Denn der volle Wertbereich von φ läuft hier von 0 bis 2π, erst wenn das Elektron 1, von A ausgehend, bis nach A zurückgekehrt ist und entsprechend das Elektron 2 von B ausgehend nach B, ist eine Periode des Systems bezüglich φ vollendet. Der zum Radiusvektor r gehörige Impuls des „Systems" ist $p_r = 2m\dot{r}$ und die entsprechende zweite Quantenbedingung also

$$\oint p_r dr = n'h,$$

wo die Integration von r_{min} bis r_{max} und zurück zu erstrecken ist. Die Energie des „Systems" wird dann

$$W = -\frac{49}{2}\frac{Nh}{(n+n')^2},$$

wo N die Rydbergsche Zahl bedeutet. Für $n' = 0$ laufen beide Elektronen in *einer und derselben Kreisbahn* um den Kern und es wird

$$W = -\frac{49}{2}\frac{Nh}{n^2}.$$

Sowie dieser Fall aber eintritt, ist zu bedenken, daß *bereits nach einem halben Umlauf* der Elektronen das System seine Periode bezüglich φ voll-

§ 3. Zweite Lösungsmethode. Der symmetrische Kreisel im Schwerefeld.

Die zweite Methode, um unser entartetes Problem durch Grenzübergang aus einem nicht entarteten zu lösen, nimmt ihren Ausgangspunkt vom schweren symmetrischen Kreisel mit den Trägheitsmomenten $J, K = J, L$. Die Lage des Kreisels sei[1]) durch die drei Eulerschen Winkel ϑ (Neigungswinkel), ψ (Präzessionswinkel) und φ (Eigendrehungswinkel) charakterisiert. Ist m die Masse des Kreisels, s der Abstand seines Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt, dann ist die potentielle Energie des Kreisels im Schwerefeld:

$$U = P \cos \vartheta, \quad \text{wo} \quad P = \pm mgs. \tag{4}$$

Das obere bzw. untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Schwerpunkt über bzw. unter dem Unterstützungspunkt liegt.

---

endet hat, und daß infolgedessen die erste Quantenbedingung hier in

$$\int_0^{\pi} p_\varphi \, d\varphi = \pi \cdot p_\varphi = n h$$

abzuändern ist. Dabei ist p_φ der Impuls (Impulsmoment) des „Systems", also ist

$$p_\varphi = 2 \cdot \frac{n h}{2\pi};$$

mit anderen Worten: *das Impulsmoment jedes einzelnen der beiden Elektronen ist* $= n h/2\pi$. Dann folgt für die Energie:

$$W = -\frac{49}{8} \frac{N h}{n^2}.$$

Für diese letztere Formulierung spricht, worauf Sommerfeld (Ann. 53. p. 549. 1917) hinwies, auch die Adiabatenhypothese. Danach müßte man wohl *auch im Falle der Ellipsenbahnen* die Quantenbedingung *für jedes Elektron einzeln* in der Form ansetzen:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} m r^2 \dot{\varphi} = n h; \qquad \oint p_r \, dr = \oint m \dot{r} \, dr = n' h.$$

Dann folgt für die Energie:

$$W = -\frac{49}{8} \frac{N h}{(n + n')^2}.$$

Jedenfalls scheint hier noch eine Unsicherheit in der Formulierung der Quantenbedingungen für derartige Systeme vorzuliegen.

1) Vgl. z. B. F. Reiche, Phys. Zeitschr. 19. p. 394. 1918.

Die kinetische Energie T des Kreisels ist gegeben durch:

$$2T = \frac{1}{J\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\vartheta\right)^2 + \frac{1}{J}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2,$$

wo V die Hamilton-Jacobische Funktion darstellt. Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung lautet also:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{J\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\vartheta\right)^2 + \frac{1}{J}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2\\ &\qquad + 2P\cos\vartheta = 2W.\end{aligned}\right.$$

Dabei ist W die Gesamtenergie des Kreisels.

Da φ und ψ nicht selbst in der Differentialgleichung auftreten, kann man bekanntlich die folgende Separationsmethode anwenden:

$$(6)\qquad V = \beta\cdot\psi + \gamma\cdot\varphi + V_1(\vartheta).$$

Dabei ist

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&\beta = \frac{\partial V}{\partial \psi} = p_\psi \text{ der zu } \psi \text{ gehörige konstante Impuls,}\\ &\gamma = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = p_\varphi \text{ der zu } \varphi \text{ gehörige konstante Impuls.}\end{aligned}\right.$$

Die Substitution von (6) in (5) ergibt für den zu ϑ gehörigen Impuls

$$(8)\quad \frac{dV_1}{d\vartheta} = p_\vartheta = \sqrt{\left(2JW - \frac{\gamma^2 J}{L}\right) - 2JP\cos\vartheta - \frac{(\beta-\gamma\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}.$$

Zwei der Quantenbedingungen ergeben sich unmittelbar aus (7):

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} p_\psi\, d\psi = 2\pi p_\psi = 2\pi\beta = n_2 h,\\ &\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi\gamma = n_3 h.\end{aligned}\right.$$

Über das Auftreten und die Bedeutung negativer Werte von β und γ gilt hier dasselbe, was im § 2 an entsprechender Stelle gesagt wurde.

Die dritte Quantenbedingung lautet:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}&\oint p_\vartheta\, d\vartheta = \oint d\vartheta \sqrt{J\left(2W - \frac{\gamma^2}{L}\right) - 2JP\cos\vartheta - \left(\frac{\beta-\gamma\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2}\\ &\qquad = n_1 h.\end{aligned}\right.$$

Wir setzen

$$\cos\vartheta = u \tag{11}$$

und entwickeln die Wurzel nach Potenzen von P, von der Annahme ausgehend, das Schwerefeld sei schwach. Dann wird:

$$n_1 h = X_1 - JPX_2,$$

wo

$$X_1 = \oint \frac{du}{1-u^2}\sqrt{J\left(2W - \frac{r^2}{L}\right)(1-u^2) - (\beta - \gamma u)^2}, \tag{12}$$

$$X_2 = \oint \frac{u\,du}{\sqrt{J\left(2W - \frac{r^2}{L}\right)(1-u^2) - (\beta - \gamma u)^2}}.$$

Die Integrationswege umlaufen die Verzweigungspunkte der Radikanden in der komplexen u-Ebene.

Wir behandeln erst das Integral X_1 und setzen abkürzend

$$J\left(2W - \frac{r^2}{L}\right) = k^2;\quad \frac{2\beta\gamma}{k^2+\gamma^2} = u_1 + u_2;\quad \frac{\beta^2 - k^2}{k^2+\gamma^2} = u_1 \cdot u_2. \tag{13}$$

Dann wird

$$X_1 = \sqrt{k^2+\gamma^2}\cdot \oint \frac{du}{1-u^2}\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}, \tag{14}$$

u_1 und u_2 sind also die Verzweigungspunkte der Wurzel (vgl. Fig. 2). Zwischen ihnen läuft der Verzweigungsschnitt mit

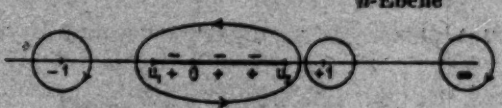


Fig. 2.

dem unteren positiven und dem oberen negativen Ufer. Der Integrationsweg umläuft ihn in positivem Sinne. Wir deformieren jetzt den Integrationsweg zu einem Umlauf um die drei Pole des Integranden: $u = -1$, $u = +1$, $u = \infty$ im negativen Sinne. Da man vom positiven Ufer des Verzweigungsschnittes nach den Polen $+1$ und ∞ durch einen positiven Halbumlauf um den Verzweigungspunkt u_2 gelangt, so hat die Wurzel in der Umgebung der Pole $+1$ und ∞ *positiv imaginäre* Werte, da der positive Halbumlauf den Faktor $e^{+\frac{\pi i}{2}} = +i$ mit sich bringt. Analog hat die Wurzel

in der Umgebung des Pols $u = -1$ *negativ imaginäre* Werte. Es wird nun

$$X_1 = -2\pi i \sqrt{k^2+\gamma^2}\,(R_{-1} + R_{+1} + R_\infty), \tag{15}$$

wo R_{-1}, R_{+1} und R_∞ die Residuen an den Polen -1, $+1$ und ∞ sind. Das Residuum bei (-1) ist:

$$R_{-1} = \left[\frac{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}}{1-u}\right]_{u=-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(-1-u_1)(u_2+1)},$$

also da die Wurzel in der Nachbarschaft von (-1) negativ imaginär ist

$$R_{-1} = \tfrac{1}{2}\left(-i\sqrt{(u_1+1)(u_2+1)}\right) = -\frac{i}{2}\frac{|\beta+\gamma|}{\sqrt{k^2+\gamma^2}}.$$

Ebenso ist

$$R_{+1} = \left[\frac{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}}{-(1+u)}\right]_{u=+1} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-u_1)(u_2-1)},$$

also da die Wurzel in der Nachbarschaft von $+1$ positiv imaginär ist

$$R_{+1} = -\tfrac{1}{2}\left(+i\sqrt{(1-u_1)(1-u_2)}\right) = -\frac{i}{2}\frac{|\beta-\gamma|}{\sqrt{k^2+\gamma^2}}.$$

Um das Residuum bei $u = \infty$ zu finden, setzt man $u = 1/v$, dann wird der Integrand

$$= \frac{dv\sqrt{(1-u_1 v)(u_2 v-1)}}{v(1-v^2)}$$

$$= \frac{dv}{v}(1+v^2+\ldots)\left(1-\frac{u_1}{2}v+\ldots\right)(+i)\left(1-\frac{u_2}{2}v+\ldots\right),$$

da die Wurzel in der Nachbarschaft von ∞ positiv imaginär ist. Also

$$R_\infty = +i.$$

Durch Einsetzen der Residuenwerte in (15) folgt:

$$X_1 = \pi\left\{2\sqrt{k^2+\gamma^2} - |\beta+\gamma| - |\beta-\gamma|\right\}. \tag{16}$$

Analog verläuft die Berechnung von X_2. Hier existiert nur ein Pol des Integranden bei $u = \infty$ mit dem Residuum

$$R_\infty = \tfrac{1}{2}i(u_1+u_2) = i\frac{|\beta\gamma|}{k^2+\gamma^2}.$$

Also wird

$$X_2 = \frac{2\pi|\beta\gamma|}{(k^2+\gamma^2)^{3/2}}. \tag{17}$$

Die dritte Quantenbedingung (12) lautet also

$$(18)\quad \pi\left\{2\sqrt{k^2+\gamma^2}-(|\beta+\gamma|+|\beta-\gamma|)\right\}-JP\frac{2\pi|\beta\gamma|}{(k^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}=n_1 h.$$

Gemäß den Betrachtungen des § 2 können wir betreffs der positiven und negativen Werte von β und γ folgendes festsetzen: Wir wählen stets

$$(19)\qquad n_2 \gtrless 0;\quad n_3 \gtrless 0.$$

Dann ist (9) in der Weise zu erweitern, daß

$$(9a)\qquad \beta=\pm\frac{n_2 h}{2\pi};\quad \gamma=\pm\frac{n_3 h}{2\pi},$$

je nachdem β und γ positiv oder negativ sind. Bei diesen Bestimmungen wird

$$(20)\quad \begin{cases} |\beta+\gamma|+|\beta-\gamma|=\frac{n_2 h}{\pi}, & \text{wenn } n_2>n_3,\\ \qquad\qquad =\frac{n_3 h}{\pi}, & \text{wenn } n_2<n_3,\\ |\beta\gamma| \quad =\frac{n_2 n_3 h^2}{4\pi^2}. \end{cases}$$

Aus (18) und (20) folgt:

$$(21)\quad \begin{cases} \pi\left\{2\sqrt{k^2+\frac{n_2^2 h^2}{4\pi^2}}-\frac{n_2 h}{\pi}\right\}-JP\frac{n_2 n_3 h^2}{2\pi\left(k^2+\frac{n_2^2 h^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=n_1 h, & \\ \qquad\qquad \text{wenn } n_2>n_3; & \\ \pi\left\{2\sqrt{k^2+\frac{n_3^2 h^2}{4\pi^2}}-\frac{n_3 h}{\pi}\right\}-JP\frac{n_2 n_3 h^2}{2\pi\left(k^2+\frac{n_3^2 h^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=n_1 h, & \\ \qquad\qquad \text{wenn } n_2<n_3. & \end{cases}$$

Um hieraus die Energie W zu bestimmen, streichen wir erst das Glied mit P, und berechnen demnach W in nullter Näherung. Den so gefundenen Wert von W setzen wir in das mit P multiplizierte „Korrektionsglied" ein. Dann folgt unter Beachtung von (13) nach kurzer Rechnung:

$$(22)\quad \begin{cases} W=\frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{(n_1+n_2)^2-n_3^2}{J}+\frac{n_3^2}{L}\right\}+P\frac{n_2 n_3}{(n_1+n_2)^3}, & \text{wenn } n_2>n_3;\\ W=\frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{(n_1+n_3)^2-n_2^2}{J}+\frac{n_2^2}{L}\right\}+P\frac{n_2 n_3}{(n_1+n_3)^3}, & \text{wenn } n_2<n_3. \end{cases}$$

Wir gehen jetzt zu dem Grenzfall über, in dem keine Drehung um die Figurenachse besteht. D. h. wir setzen $p_\gamma = \gamma = 0$, also $n_3 = 0$. Dadurch fällt in der hier betrachteten Näherung der Einfluß des Schwerefeldes ganz fort, und die erste der Formeln (22), die hier allein in Frage kommt, ergibt:

$$W = \frac{h^2 (n_1 + n_2)^2}{8 \pi^2 J}, \tag{23}$$

ein Ausdruck, der mit (3) identisch ist.

§ 4. Der statistische Teil des Problems und die Lösung.

Die statistische Verteilungsfunktion nach der ersten Planckschen Theorie hat die folgende verallgemeinerte kanonische Form

$$w_{n_1 n_2} = \frac{p_{n_1 n_2} \cdot e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}}}{\sum_{n_1} \sum_{n_2} p_{n_1 n_2} \cdot e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}}}. \tag{24}$$

Dabei ist k die Boltzmannsche Konstante, T die absolute Temperatur und $p_{n_1 n_2}$ das „Gewicht" des durch n_1 und n_2 charakterisierten Quantenzustandes. Wir halten an der allgemein üblichen Hypothese fest, daß die

$$p_{n_1 n_2} = 1 \tag{25}$$

zu setzen sind; d. h. wir machen die Annahme, daß alle vollständig, hier also durch 2 Quantenzahlen definierten Quantenzustände gleiches Gewicht besitzen. Der Mittelwert der Rotationsenergie ist also pro Grammolekül

$$\bar{W} = N \cdot \frac{\sum_{n_1} \sum_{n_2} W_{n_1 n_2} \cdot e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}}}{\sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}}}, \tag{26}$$

wo N die Avogadrosche Zahl ist. Wir setzen

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{-\sigma (n_1 + n_2)^2}, \\ \text{wo} \\ \sigma = \frac{h^2}{8 \pi^2 J k T}. \end{array} \right. \tag{27}$$

Dann kann man (26) folgendermaßen schreiben

$$\bar{W} = N k T^2 \frac{d}{dT} (\lg Q) = -\frac{h^2 N}{8\pi^2 J} \cdot \frac{d \lg Q}{d\sigma} \tag{28}$$

und daraus folgt für die Rotationswärme pro Mol

$$C_r = \frac{d\bar{W}}{dT} = N k \sigma^2 \frac{d^2 \lg Q}{d\sigma^2} . \tag{29}$$

Bedenkt man noch, daß $N k = R$ die absolute Gaskonstante ist, so kann man schreiben:

$$\boxed{\frac{C_r}{R} = \sigma^2 \frac{d^2 \lg Q}{d\sigma^2} .} \tag{30}$$

§ 5. Der $n$te Quantenzustand hat das Gewicht $2n + 1$.

Die Berechnung der Rotationswärme nach (30) als Funktion von σ und damit von T läuft also auf die Auswertung der Doppelsumme Q in (27) heraus. Wir wollen im Anschluß an das im § 2 Gesagte hier zuerst bei der Ausführung der Summationen berücksichtigen, daß $p_\varphi = \beta$ positive und negative Werte annehmen kann, und daß demgemäß alle Zahlen n_2 mit Ausnahme von $n_2 = 0$ *doppelt zu zählen sind*. Dann verwandelt sich Q in die einfache Summe:

$$Q = \sum_0^\infty (2n + 1) \cdot e^{-\sigma n^2} . \tag{31}$$

Hiernach hat also der durch $n = n_1 + n_2$ charakterisierte Quantenzustand das Gewicht $2n + 1$.

Für tiefe Temperaturen ist $\sigma \gg 1$ also

$$Q \sim 1 + 3e^{-\sigma} ; \qquad \lg Q \sim 3e^{-\sigma}$$

und daher:

$$\bar{W} \sim \frac{3h^2 N}{8\pi^2 J} \cdot e^{-\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{C_r}{R} \sim 3\sigma^2 e^{-\sigma} . \tag{32}$$

Für hohe Temperaturen ist $\sigma \ll 1$, also

$$Q \sim \int_0^\infty (2n + 1) e^{-\sigma n^2} dn \sim \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \sim \frac{1}{\sigma}\left(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\sigma}\right)$$

$$\lg Q \sim -\lg\sigma + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\sigma} \quad \text{und daher:}$$

$$\bar{W} \sim RT\left(1 - \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi\sigma}\right) \quad \text{und} \quad \frac{C_r}{R} \sim 1 - \tfrac{1}{8}\sqrt{\pi\sigma} . \tag{33}$$

Für tiefe Temperaturen fällt also die Energie wie $e^{-\frac{\text{const}}{T}}$, die Rotationswärme wie

$$\frac{1}{T^2}\, e^{-\frac{\text{const}}{T}}$$

ab. Für hohe Temperaturen nähert sich die Energie asymptotisch dem klassischen Wert RT, die Rotationswärme dem klassischen Wert R.

Im allgemeinen Fall, bei mittleren Temperaturen, bleibt zurzeit kein anderes Mittel übrig, als die Reihe (31) explizit hinzuschreiben und an ihr die durch (30) geforderten Operationen vorzunehmen. Dann folgt nach einiger Rechnung: Setzt man zur Abkürzung

$$e^{-\sigma} = x, \tag{34}$$

so ist

$$\frac{C_r}{R} = \sigma^2 \frac{f(x)}{g(x)},$$

wo

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 80x^4 + 135x^5 + 567x^9 + 1344x^{10} + 875x^{13} \\ &\quad + 2304x^{16} + 6075x^{17} + 6480x^{20} + 9962x^{25} + \ldots \\ g(x) &= 1 + 6x + 9x^2 + 10x^4 + 30x^5 + 25x^8 + 14x^9 + 42x^{10} \\ &\quad + 70x^{13} + 18x^{16} + 54x^{17} + 49x^{18} + 90x^{20} + 148x^{25} + \ldots \end{aligned} \tag{35}$$

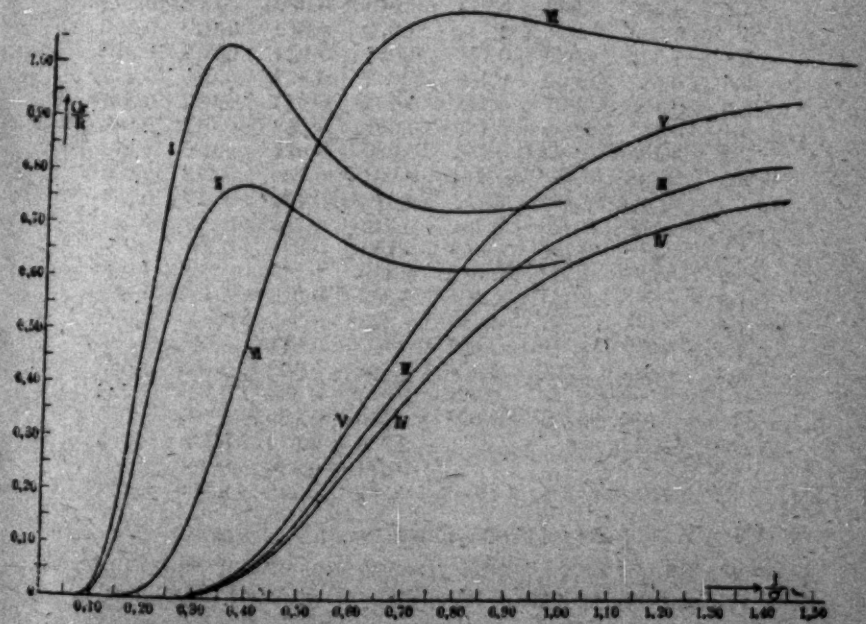


Fig. 3.

In der Tab. I sind in der dritten Spalte die nach (84) und (85) berechneten Werte von C_v/R als Funktion von σ und $1/\sigma$ eingetragen. Diese mit I bezeichnete Kurve ist als Funktion von $1/\sigma$ in Fig. 3 eingezeichnet.

Tabelle I.

σ	$1/\sigma$	C_v/R					
		I	II	III	IV	V	VI
15	0,067	0,0002	0,0001				
13	0,077	0,0011	0,0008				
12	0,083	0,0026	0,0018				
11	0,091	0,0061	0,0040				
10	0,100	0,014	0,0091				
9	0,111	0,030	0,020				
8	0,125	0,065	0,043				
7,5	0,133	0,093	0,062				
7	0,143	0,133	0,089				0,0005
6,5	0,154	0,188	0,126				
6	0,167	0,264	0,176				0,0027
5	0,200	0,486	0,328	0,0001	0,0001	0,0001	0,0136
4,5	0,222	0,632	0,430	0,0004	0,0004	0,0005	0,02997
4,3	0,233	0,695	0,476	0,0007	0,0006	0,0008	0,0408
4	0,250	0,790	0,545	0,0015	0,0013	0,0018	0,0643
3,8	0,263	0,851	0,592	0,0024	0,0022	0,0029	0,0864
3,6	0,278	0,908	0,637	0,0040	0,0036	0,0048	0,1156
3,4	0,294	0,957	0,679	0,0064	0,0058	0,0077	0,1535
3,2	0,313	0,996	0,715	0,010	0,0094	0,0125	0,202
3	0,333	1,021	0,744	0,017	0,015	0,020	0,264
2,8	0,357	1,030	0,762	0,026	0,024	0,032	0,340
2,6	0,385	1,020	0,769	0,042	0,037	0,050	0,433
2,5	0,400	1,007	0,768	0,052	0,047	0,062	0,486
2,4	0,417	0,990	0,763	0,064	0,058	0,077	0,542
2,3	0,435	0,969	0,755	0,080	0,072	0,096	0,602
2,2	0,455	0,942	0,745	0,098	0,088	0,118	0,665
2	0,500	0,882	0,713	0,148	0,133	0,177	0,794
1,8	0,556	0,825	0,681	0,216	0,195	0,259	0,918
1,7	0,588	0,796	0,663	0,259	0,234	0,310	0,973
1,6	0,625	0,771	0,647	0,309	0,278	0,368	1,0197
1,5	0,667	0,751	0,634	0,363	0,328	0,433	1,057
1,4	0,714	0,737	0,625	0,423	0,383	0,503	1,082
1,3	0,769	0,729	0,620	0,487	0,441	0,578	1,0955
1,2	0,833	0,730	0,621	0,553	0,502	0,654	1,097
1,1	0,909	0,737	0,626	0,619	0,562	0,727	1,088
1	1,000	0,749	0,637	0,680	0,620	0,795	1,073
0,9	1,111			0,735	0,672	0,854	1,055
0,8	1,250			0,781	0,716	0,901	
0,7	1,429			0,818	0,752	0,935	1,0246

Die Kurve der Rotationswärme, als Funktion der Temperatur aufgetragen, steigt danach zu einem Maximum an (für $1/\sigma = 0{,}855$), dessen Wert über dem Wert der klassischen

Theorie (R) liegt, sinkt darauf zu einem Minimum herab, das für $1/\sigma = 0{,}77$ erreicht wird und den Betrag $0{,}725\ R$ besitzt, um schließlich langsam wieder anzusteigen und sich asymptotisch dem Wert R der klassischen Theorie zu nähern. Die Kurve hat also einen qualitativ ähnlichen Verlauf wie die bekannte Ehrenfestsche Kurve.[1]) Wegen des nicht beobachteten Maximums und Minimums müssen wir sie verwerfen.

§ 6. Der $n$te Quantenzustand hat das Gewicht $n + 1$.

Wir fassen jetzt die zweite, bei Planck vertretene, Möglichkeit ins Auge, daß bei der Auswertung der Doppelsumme Q *nur die positiven* $p_\varphi = \beta$ zu berücksichtigen sind, und daher alle Zahlen n_2 ebenso wie die n_1 *einfach* zu zählen sind. Dann wird

$$Q = \sum_0^\infty (n+1) e^{-\sigma n^2}. \tag{36}$$

Das Gewicht des durch $n = n_1 + n_2$ definierten Quantenzustandes ist also $n + 1$. Für tiefe Temperaturen ist hier

$$Q \sim 1 + 2e^{-\sigma}; \quad \lg Q \sim 2e^{-\sigma} \text{ und daher:}$$

$$\bar{W} \sim \frac{2h^2 N}{8\pi^2 J} \cdot e^{-\sigma} \text{ und } \frac{C_v}{R} \sim 2\sigma^2 e^{-\sigma}. \tag{37}$$

Für hohe Temperaturen ist

$$Q \sim \int_0^\infty (n+1) e^{-\sigma n^2} dn \sim \frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \sim \frac{1}{2\sigma}(1 + \sqrt{\pi\sigma})$$

$$\lg Q \sim -\lg\sigma - \lg 2 + \sqrt{\pi\sigma} \text{ und daher:}$$

$$\bar{W} \sim RT(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\sigma}) \text{ und } \frac{C_v}{R} \sim 1 - \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi\sigma}. \tag{38}$$

Im allgemeinen Fall wird unter Benutzung der Abkürzung (34)

$$\frac{C_v}{R} = \sigma^2 \frac{f(x)}{g(x)},$$

wo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 48x^4 + 54x^5 + 324x^9 + 512x^{10} + 300x^{13} \\ &\quad + 1280x^{16} + 2250x^{17} + 2160x^{20} + 4730x^{25} + 6912x^{26} \\ &\quad + 7938x^{29} + 6144x^{34} + 9072x^{36} + \ldots \\ g(x) &= 1 + 4x + 4x^2 + 6x^4 + 12x^5 + 9x^8 + 8x^9 + 16x^{10} \\ &\quad + 24x^{13} + 10x^{16} + 20x^{17} + 16x^{18} + 30x^{20} + 52x^{25} \\ &\quad + 24x^{26} + 36x^{29} + 25x^{32} + 48x^{34} + 14x^{36} + \ldots \end{aligned} \tag{39}$$

1) P. Ehrenfest, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. p. 456. 1913.

Die Werte von C_v/R, nach (39) berechnet, sind in der vierten Spalte der Tab. I als Funktion von σ und $1/\sigma$ eingetragen und in Fig. 8 als Kurve II eingezeichnet. Auch diese Kurve zeigt qualitativ einen ähnlichen Verlauf wie die Kurve des vorigen Paragraphen und die Ehrenfestsche Kurve: Sie durchläuft ein Maximum mit einem darauffolgenden Minimum und nähert sich dann erst langsam dem klassischen Wert. Auch diese Kurve ist daher zu verwerfen.

§ 7. Der nullte Quantenzustand der Kurve I verboten.

Die Zusammenstellung der beiden erhaltenen Kurven und der qualitativ ähnlichen Ehrenfestschen Kurve legt die Vermutung nahe, daß die bei allen dreien auftretende Erscheinung des Maximums und Minimums einen gemeinsamen analytischen Grund hat. Bei allen dreien beginnt nämlich die ausschlaggebende Reihe Q mit dem von σ unabhängigen absoluten Gliede 1. (Ehrenfests Kurve folgt aus (30), wenn man

$$Q = \sum_0^\infty e^{-\sigma n^2}$$

setzt und mit 2 multipliziert.) Das heißt aber, daß der nullte Quantenzustand das Gewicht 1 besitzt. Diesem nullten Quantenzustand entspricht aber nach (3) die Energie 0. Macht man daher die Hypothese, daß der rotationslose, d. h. energielose Zustand nicht vorkommt, so heißt das: man verbietet den Quantenzustand $n = n_1 + n_2 = 0$, d. h. $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, man erteilt ihm das Gewicht 0. Wie wir sehen werden, ist diese Festsetzung geeignet, das Maximum und Minimum aus den Kurven zu beseitigen. Wir wollen an den beiden bisher betrachteten Kurven diese Modifikation anbringen und betrachten zuerst die im § 5 diskutierte Kurve I mit dem Gewicht $2n + 1$. Verbieten wir hier den nullten Quantenzustand, so wird

$$Q = \sum_1^\infty (2n + 1) e^{-\sigma n^2}. \tag{40}$$

Für tiefe Temperaturen wird

$$Q \sim 3e^{-\sigma} + 5e^{-4\sigma} \sim 3e^{-\sigma}(1 + \tfrac{5}{3} e^{-3\sigma}); \lg Q \sim \lg 3 - \sigma + \tfrac{5}{3} e^{-3\sigma},$$

also

$$\bar{W} \sim \frac{h^2 N}{8\pi^2 J}(1 + 5e^{-3\sigma}) \quad \text{und} \quad \frac{C_v}{R} \sim 15\,\sigma^2 \cdot e^{-3\sigma}. \tag{41}$$

Hier tritt also eine „Nullpunktsenergie" vom Betrage $\frac{h^2 N}{8\pi^2 J}$ auf. Für hohe Temperaturen gelten die Beziehungen (33) unverändert.

Bei beliebigen Temperaturen wird unter Benutzung von (34):

$$\frac{C_v}{R} = \sigma^2 \frac{f(x)}{g(x)},$$

wo

$$(42)\quad \begin{cases} f(x) = 135x^3 + 1344x^5 + 875x^{11} + 6075x^{15} + 6480x^{19} \\ \quad + 3087x^{23} + 19008x^{24} + 34155x^{27} + 19712x^{33} + \ldots \\ g(x) = 9 + 30x^3 + 25x^5 + 42x^8 + 70x^{11} + 54x^{15} + 49x^{16} \\ \quad + 90x^{18} + 126x^{23} + 66x^{24} + 110x^{27} + 81x^{30} \\ \quad + 154x^{33} + \ldots, \end{cases}$$

Die nach dieser Formel berechneten Werte von C_v/R als Funktion von σ und $1/\sigma$ sind in der 5. Spalte von Tab. I eingetragen und in Fig. 8 als Kurve III eingezeichnet. Diese Kurve steigt mit wachsendem $1/\sigma$, d. h. mit wachsender Temperatur ohne Maximum und Minimum monoton an und nähert sich asymptotisch dem klassischen Wert. Dies ist aber das Verhalten der von Eucken experimentell beobachteten Werte. Man kann daher die Kurve III an der Erfahrung prüfen. Die von Eucken[1]) beobachteten Werte von C_v und C_v/R als Funktion der Temperatur sind in der Tab. II eingetragen ($R = 1{,}9845$ Kal.). In Tab. III stehen drei Werte, die von Scheel und Heuse[2]) gemessen worden sind.

Tabelle II.

Eucken.

T	C_v in Kal.	C_v/R	T	C_v in Kal.	C_v/R
35	0,00	0,000	82	0,21	0,106
40	0,00	0,000	85	0,23	0,116
45	0,02	0,010	90	0,28	0,141
50	0,03	0,015	91	0,27	0,136
60	0,01	0,005	100	0,44	0,222
65	0,06	0,030	110	0,64	0,323
70	0,12	0,060	196,5	1,41	0,711
80	0,16	0,081	273,1	1,86	0,937

1) A. Eucken, Sitzungsber. d. preuß. Akademie d. Wiss. 1912. p. 143.

2) Scheel u. Heuse, Sitzungsber. d. preuß. Akademie d. Wiss. 1913. p. 44; Ann. d. Phys. 40. p. 473. 1913.

Tabelle III.
Scheel und Heuse.

T	C_v in Kal.	C_v/R
92	0,358	0,180
197	1,402	0,707
289	1,898	0,956

Wie man sieht, sind die Euckenschen Messungen bei tiefen Temperaturen wenig genau und geben nur im großen und ganzen den ungefähren Verlauf der Kurve. Es ist daher nur mit einiger Willkür möglich, die verfügbare Konstante der theoretischen Kurve (das Trägheitsmoment J) so zu bestimmen, daß die theoretische Kurve möglichst nahe an die beobachteten Werte herangeht.

Wir wählen den Wert $C_v/R = 0{,}222$ bei $T = 100^0$ als Standardwert. Aus Tab. I und Fig. 8 folgt dann $1/\sigma = 0{,}56$. Setzen wir

$$\sigma = \frac{\Theta}{T}, \quad \text{wo} \quad \Theta = \frac{h^2}{8\pi^2 Jk}, \tag{43}$$

so folgt

$$\frac{1}{\Theta} = 0{,}0056; \quad \Theta = 178{,}6, \tag{44}$$

also ergibt sich unter Benutzung der Daten

$$h = 6{,}545 \cdot 10^{-27}; \quad k = 1{,}3723 \cdot 10^{-16}$$

für das Trägheitsmoment der Wert:

$$J = 2{,}214 \cdot 10^{-41}. \tag{45}$$

Die unter Zugrundelegung von (44) berechneten Werte von C_v/R als Funktion von T sind in Tab. IV neben den beobachteten eingetragen und in Fig. 4 als ausgezogene Kurve III eingezeichnet. Die Kreuze stellen die beobachteten Punkte dar.

Wie man aus der Figur erkennt, liegen die beobachteten Punkte bei tiefen Temperaturen in befriedigender Nähe der theoretischen Kurve. Zwischen 110° und 200° fehlen leider Beobachtungen. Der Punkt bei 196,5° liegt um 0,019, d. h. um 2,6 Proz. tiefer als die Kurve. Die Punkte bei 273,1° (Eucken) und 289° (Scheel und Heuse) dagegen liegen um etwa 10 bis 11 Proz. über der Kurve. Nun ist der Punkt bei 196,5° vielleicht als der sicherste Punkt der ganzen Beobachtungen

Tabelle IV.

Kurve III. Standardwert: $\frac{C_v}{R} = 0{,}222$ bei $T = 100°$.

T	$1/\sigma$	C_v/R berechnet	C_v/R beobachtet
35	0,196	0,000	0,000
40	0,224	0,000	0,000
45	0,252	0,002	0,010
50	0,280	0,004	0,015
60	0,336	0,018	0,005
65	0,364	0,030	0,030
70	0,392	0,046	0,060
80	0,448	0,092	0,081
82	0,459	0,103	0,106
85	0,476	0,121	0,116
90	0,504	0,153	0,141
91	0,510	0,159	0,136
100	0,560	0,222	0,222
110	0,616	0,297	0,323
112	0,625	0,309	
119	0,667	0,363	
127,5	0,714	0,424	
137	0,769	0,487	
149	0,833	0,553	
162	0,909	0,619	
179	1,000	0,680	
196,5	1,100	0,730	0,711
223	1,250	0,781	
255	1,429	0,818	
273,1	1,529		0,937

anzusehen, da er von Scheel und Heuse (vgl. Tab. III) mit großer Genauigkeit bestätigt worden ist. Es liegt daher nahe, diesen Punkt, d. h. den Wert

$$\frac{C_v}{R} = 0{,}711$$

als Standardwert zu benutzen. Dann ist für diesen Wert

$$\frac{1}{\sigma} = 1{,}063\,,$$

daher

$$\frac{1}{\Theta} = 0{,}00541\,; \quad \Theta = 184{,}8\,,$$

dies drückt jedoch die theoretische Kurve noch mehr herunter, kann also die Diskrepanz für die höheren Temperaturen nicht beseitigen und verschlechtert sogar noch die Übereinstimmung bei tiefen Temperaturen. *Es gelingt mit keinem Wert von Θ, die drei Punkte bei $T = 196{,}5°$, bei $T = 273{,}1°$ und bei $T = 289°$*

mit den Beobachtungen bei tiefen Temperaturen auf einer Kurve vom Typus III zu vereinigen. Wählt man Θ so, daß bei tiefen Temperaturen Übereinstimmung erzielt wird, so liegt die

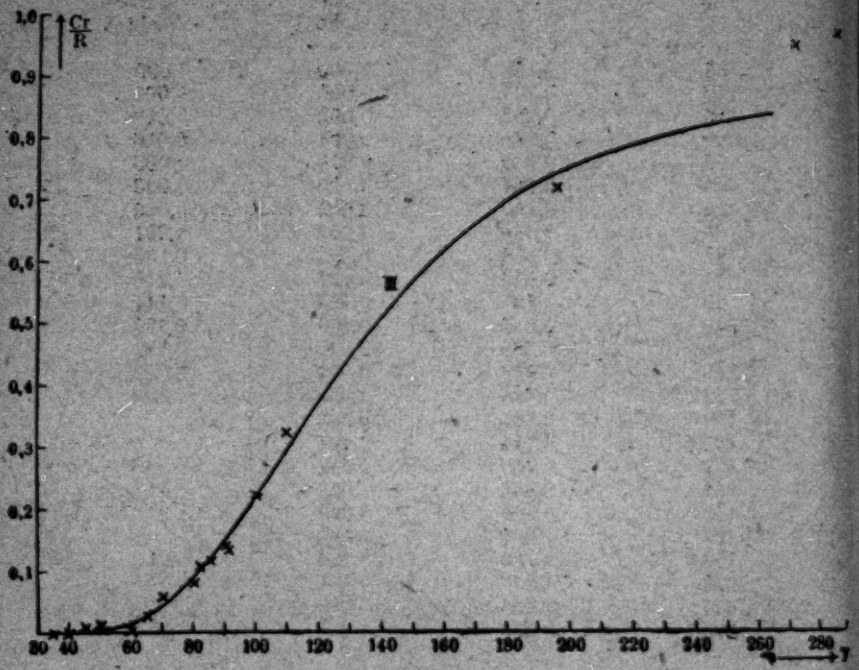


Fig. 4.

theoretische Kurve bei höheren Temperaturen (etwa 280°) *bedeutend zu tief.* Aus der Lage der Kreuze sieht man, daß die „wahre" Kurve in dem Gebiet zwischen 180° und 280° offenbar schwächer nach unten gekrümmt sein müßte, als die Kurve III und eine stärkere Neigung gegen die Abszissenachse besitzen sollte.

§ 8. Der nullte Quantenzustand der Kurve II verboten.

Wir modifizieren jetzt die im § 6 diskutierte Kurve II mit dem Gewicht $n+1$, indem wir den nullten Quantenzustand verbieten. Dann wird

$$Q = \sum_{1}^{\infty} (n+1)\, e^{-\varepsilon_n/T}. \tag{46}$$

Für tiefe Temperaturen ist

$$Q \sim 2e^{-\sigma}(1 + \tfrac{3}{2}e^{-3\sigma}); \quad \lg Q \sim \lg 2 - \sigma + \tfrac{3}{2}e^{-3\sigma}$$

und daher

$$(47) \qquad \bar{W} \sim \frac{h^2 N}{8\pi^2 J}(1 + \tfrac{3}{2}e^{-3\sigma}) \quad \text{und} \quad \frac{C_r}{R} \sim \frac{27}{2}\sigma^2 \cdot e^{-3\sigma}.$$

Auch hier tritt also eine „Nullpunktsenergie" vom Betrage

$$\frac{h^2 N}{8\pi^2 J}$$

auf. Für hohe Temperaturen gelten die Beziehungen (38) unverändert. Bei beliebigen Temperaturen wird unter Benutzung von (34):

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{C_r}{R} = \sigma^2 \cdot \frac{f(x)}{g(x)}, \\ &\text{wo} \\ &f(x) = 54x^3 + 512x^6 + 300x^{11} + 2250x^{15} + 2160x^{18} \\ &\qquad + 980x^{23} + 6912x^{24} + 7938x^{27} + 6144x^{32} + \ldots \\ &g(x) = 4 + 12x^3 + 9x^6 + 16x^8 + 24x^{11} + 20x^{15} + 16x^{16} \\ &\qquad + 30x^{18} + 40x^{23} + 24x^{24} + 36x^{27} + 25x^{30} + 48x^{32} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Die nach dieser Formel berechneten Werte von C_r/R sind als Funktion von σ und $1/\sigma$ in der sechsten Spalte von Tab. I eingetragen und in Fig. 3 als Kurve IV eingezeichnet. Auch diese Kurve steigt mit wachsender Temperatur monoton an und nähert sich asymptotisch dem klassischen Wert.

Wählen wir, um die Kurve an der Erfahrung zu prüfen, auch hier den bei $T = 100°$ gemessenen Wert

$$\frac{C_r}{R} = 0{,}222$$

als Standardwert, so wird hier

$$(49) \qquad \frac{1}{\Theta} = 0{,}0058; \quad \Theta = 172{,}4; \quad J = 2{,}293 \cdot 10^{-41}.$$

Die mit Hilfe dieser Größen berechneten Werte von C_r/R sind neben den beobachteten in Tab. V eingetragen und in Fig. 5 als ausgezogene Kurve IV eingezeichnet.

Auch hier ist die Übereinstimmung bei tiefen Temperaturen befriedigend. Bei 196,5° liegt die Kurve um 0,03, d. h. um 4,4 Proz. zu tief, bei den höheren Temperaturen 273,1° (Eucken) und 289° (Scheel und Heuse) liegt sie sogar um

Tabelle V.

Kurve IV. Standardwert: $\frac{C_r}{R} = 0{,}222$ für $T = 100°$.

T	$1/\sigma$	C_r/R berechnet	C_r/R beobachtet
35	0,203	0,0001	0,000
40	0,232	0,0006	0,000
45	0,261	0,002	0,010
50	0,290	0,005	0,015
60	0,348	0,021	0,005
65	0,377	0,033	0,030
70	0,406	0,051	0,060
80	0,464	0,097	0,081
82	0,476	0,109	0,106
85	0,493	0,126	0,116
90	0,522	0,157	0,141
91	0,528	0,164	0,136
100	0,580	0,222	0,222
110	0,638	0,294	0,323
115	0,667	0,328	
123,1	0,714	0,383	
132,6	0,769	0,441	
143,6	0,833	0,502	
156,7	0,909	0,562	
172,4	1,000	0,620	
196,5	1,140	0,681	0,711
215,5	1,250	0,716	
246,4	1,429	0,752	
273,1	1,584		0,937

etwa 20 Proz. zu tief. Auch hier kann man versuchen, den Punkt bei 196,5° als Standardwert zu benutzen, jedoch ohne Erfolg: *Die starke Diskrepanz bei hohen Temperaturen bleibt bestehen.* Auch von der Kurve IV gilt das am Schluß des § 7 Gesagte.

§ 9. Die Quantenzustände, für die $n_3 = 0$, sind verboten.

Auf eine mögliche, wenn auch recht künstliche Modifikation sei hier noch hingewiesen. Sie besteht darin, daß man nicht nur den Quantenzustand $n_1 = n_2 = 0$, sondern überhaupt alle Zustände, für die $n_2 = 0$ ist, verbietet. Beachtet man das stets vorhandene Schwerefeld, behandelt also das Problem vom Standpunkt des § 3, so kommt diese Festsetzung darauf hinaus, alle Zustände als unmöglich zu erklären, bei denen das Hantelmodell in einer festen, durch die vertikale Richtung der Schwerkraft gehenden Ebene rotiert.

Berücksichtigt man die positiven und negativen p_ν, zählt also alle n_2 doppelt, so wird

$$Q = \sum_1^\infty 2\, n\, e^{-n^2\sigma}. \tag{50}$$

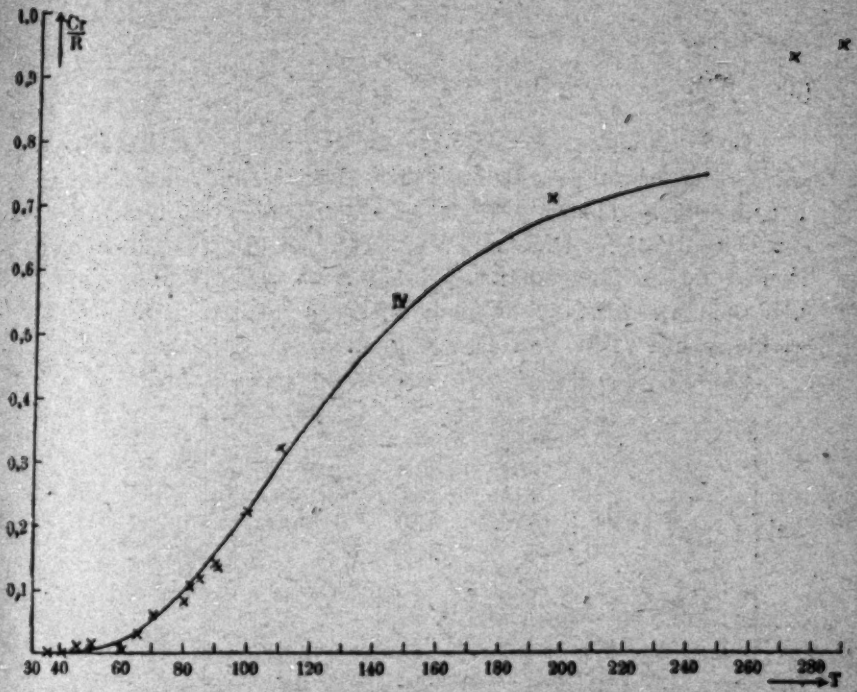


Fig. 5.

Zählt man aber die n_2 nur einfach, so wird

$$Q \sim \sum_1^\infty n\, e^{-n^2\sigma}. \tag{51}$$

Für die Bildung von $\bar{W}$ und C_v ist es gleichgültig, ob man Formel (50) oder (51) wählt, da der bei der Bildung des $\lg Q$ auftretende Ausdruck $\lg 2$ bei der einmaligen bzw. zweimaligen Differentiation nach σ verschwindet. Wir legen Formel (51) zugrunde. Für tiefe Temperaturen ist

$$Q \sim e^{-\sigma}(1 + 2\, e^{-3\sigma}); \quad \lg Q \sim -\sigma + 2\, e^{-3\sigma}$$

und daher

$$\bar{W} \sim \frac{h^2 N}{8\pi^2 J}(1 + 6\, e^{-3\sigma}); \quad \frac{C_v}{R} \sim 18\,\sigma^2 \cdot e^{-3\sigma}. \tag{52}$$

Auch hier tritt die Nullpunktsenergie $h^2 N/8\pi^2 J$ auf. Für hohe Temperaturen wird

$$Q \sim \int_0^\infty n e^{-\sigma n^2} dn \sim \frac{1}{2\sigma}$$

und daher

$$\bar{W} \sim RT; \quad \frac{C_r}{R} \sim 1. \tag{53}$$

Diese selbe, durch (51) gegebene Kurve für die Rotationswärme hat Frau S. Rotszayn[1]) auf Grund der zweiten Planckschen Theorie erhalten, indem sie von dem nichtentarteten Fall des Dipols im Magnetfeld ausging und die beiden Freiheitsgrade demgemäß als inkohärent ansah. Dort findet sich auch eine für „nicht sehr hohe Temperaturen" gültige Entwicklung mit Hilfe von Thetareihen.

Für beliebige Temperaturen wird unter Benutzung von (84):

$$\frac{C_r}{R} = \sigma^2 \frac{f(x)}{g(x)},$$

wo

$$f(x) = 18x^3 + 192x^5 + 150x^{11} + 900x^{15} + 1152x^{18} + 588x^{23} + \ldots$$

$$g(x) = 1 + 4x^3 + 4x^6 + 6x^8 + 12x^{11} + 8x^{15} + 9x^{16} + 16x^{18} + 24x^{23} + \ldots \tag{54}$$

Die nach dieser Formel berechneten Werte von C_r/R als Funktion von σ und $1/\sigma$ sind in der siebenten Spalte von Tab. I eingetragen und als Kurve V in Fig. 3 eingezeichnet. Die Kurve steigt mit wachsender Temperatur ohne Maximum und Minimum monoton an.

Zum Vergleich mit den Messungen wählen wir wieder den beobachteten Wert $\frac{C_r}{R} = 0{,}222$ bei $T = 100^0$ als Standardwert und berechnen daraus

$$\frac{1}{\Theta} = 0{,}0053; \quad \Theta = 188{,}7; \quad J = 2{,}095 \cdot 10^{-41}. \tag{55}$$

Mit Hilfe dieser Daten ergeben sich die in der Tab. VI eingetragenen Werte von C_r/R (berechnet), die in Fig. 6 als ausgezogene Kurve V eingezeichnet sind.

---

1) Ann. d. Phys. 57. p. 81. 1918.

Tabelle VI.

Kurve V. Standardwert: $\frac{C_r}{R} = 0{,}222$ bei $T = 100°$.

T	$1/\sigma$	C_r/R berechnet	C_r/R beobachtet
35	0,186	0,000	0,000
40	0,212	0,000	0,000
45	0,239	0,001	0,010
50	0,265	0,003	0,015
60	0,318	0,014	0,005
65	0,345	0,026	0,030
70	0,371	0,041	0,060
80	0,424	0,084	0,081
82	0,435	0,095	0,106
85	0,451	0,113	0,116
90	0,477	0,147	0,141
91	0,482	0,154	0,136
100	0,530	0,222	0,222
110	0,583	0,302	0,323
126	0,667	0,433	
135	0,714	0,504	
145	0 769	0,578	
157	0,833	0,654	
172	0,909	0,727	
189	1,000	0,795	
196,5	1,041	0,817	0,711
236	1,250	0,901	
273,1	1,447	0,936	0,937

Die Übereinstimmung dieser Kurve V mit den beobachteten Punkten ist bei tiefen Temperaturen befriedigend. Auch die beiden Punkte bei hohen Temperaturen (273,1° und 289°) liegen in unmittelbarer Nachbarschaft der Kurve. Dagegen liegt der Punkt bei 196,5°, der, wie schon erwähnt, durch die Doppelmessung von Eucken und Scheel-Heuse besondere Sicherheit besitzt, um 0,106, d. h. um 13 Proz. zu tief. Benutzt man statt (55) den von S. Rotszayn angegebenen Wert $\Theta = 190$, so wird die Kurve dadurch nur unwesentlich verändert: Die Übereinstimmung bei tiefen und hohen Temperaturen bleibt bestehen, *aber die Diskrepanz bei 196,5° wird nicht beseitigt.*

Nimmt man jedoch den Wert $\frac{C_r}{R} = 0{,}711$ bei $T = 196{,}5°$ als Standardwert, so wird

$$(56) \qquad \frac{1}{\Theta} = 0{,}00454; \quad \Theta = 220{,}3; \quad J = 1{,}795 \cdot 10^{-41}$$

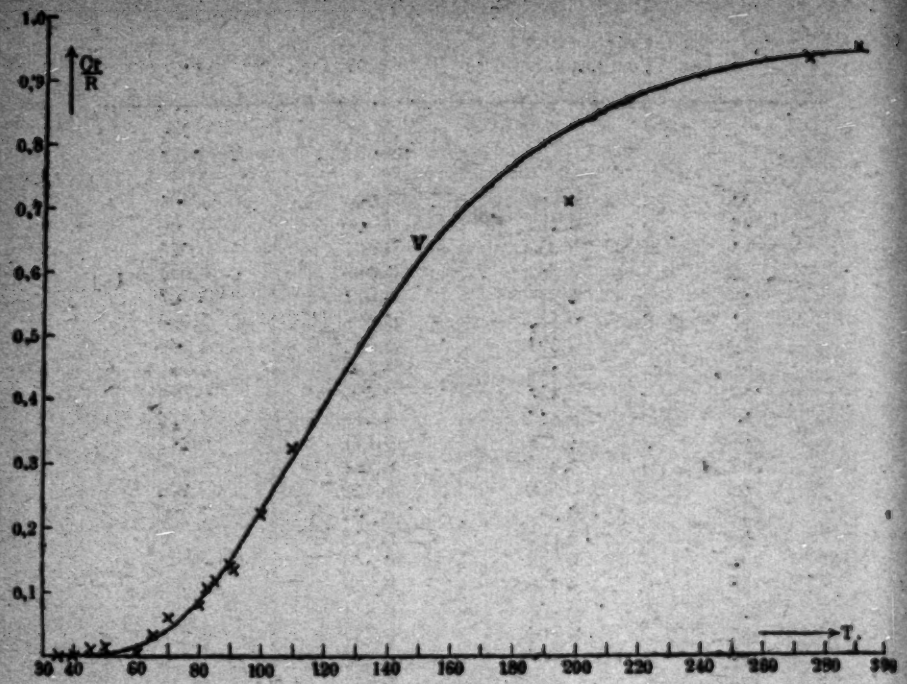


Fig. 6.

und es ergeben sich z. B. die folgenden Werte:

$T = 65^0$; $\frac{1}{\sigma} = 0{,}295$; $\frac{C_r}{R}$ (berechn.) $= 0{,}008$; beob. $= 0{,}030$,

$T = 100^0$; $\frac{1}{\sigma} = 0{,}454$; $\frac{C_r}{R}$ (berechn.) $= 0{,}117$; beob. $= 0{,}222$,

$T = 196{,}5^0$; $\frac{1}{\sigma} = 0{,}892$; $\frac{C_r}{R}$ (berechn.) $= 0{,}711$; beob. $= 0{,}711$,

$T = 273{,}1^0$; $\frac{1}{\sigma} = 1{,}240$; $\frac{C_r}{R}$ (berechn.) $= 0{,}897$; beob. $= 0{,}937$.

Es wird also hierdurch zwar bei mittleren Temperaturen Übereinstimmung erzielt, aber dafür geht sie bei tiefen und hohen Temperaturen verloren.

§ 10. Die Kurve von Planck.

Zum Vergleich wollen wir noch diejenige Kurve für die Rotationswärme betrachten, die Planck[1]) nach der zweiten

1) M. Planck, Ber. d. Deutsch. Physik. Ges. 17. p. 416ff. 1915.

Planckschen Theorie berechnet hat, indem er die Kohärenz der beiden Freiheitsgrade voraussetzte. Planck findet:

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{C_r}{R} = \sigma^2 \dfrac{d^2 \lg Q}{d\sigma^2}, \\ \text{wo} \\ Q = \sum_0^\infty (2n+1)\, e^{-(n^2+n+\frac{1}{4})\sigma}. \end{cases}$$

Für tiefe Temperaturen wird hier

$$(58)\qquad \bar{W} \sim \frac{h^2 N}{16\pi^2 J}(1 + 12\, e^{-2\sigma}); \quad \frac{C_r}{R} \sim 12\,\sigma^2 \cdot e^{-2\sigma}.$$

Es tritt also hier eine Nullpunktsenergie $h^2 N/16\pi^2 J$ auf. Für hohe Temperaturen wird

$$(59)\qquad \bar{W} \sim RT; \quad \frac{C_r}{R} \sim 1.$$

Für beliebige Temperaturen wird unter Benutzung der Abkürzung (34):

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{C_r}{R} = \sigma^2 \dfrac{f(x)}{g(x)}, \\ \text{wo} \\ f(x) = 12x^2 + 180x^6 + 240x^8 + 1008x^{12} + 2100x^{14} \\ \quad + 1260x^{16} + 3600x^{20} + 8748x^{22} + 8820x^{26} \\ \qquad + 9900x^{30} + \ldots \\ g(x) = 1 + 6x^2 + 9x^4 + 10x^6 + 30x^8 + 39x^{12} + 42x^{14} \\ \quad + 70x^{15} + 18x^{20} + 54x^{22} + 49x^{24} + 90x^{26} + 22x^{30} + \ldots \end{cases}$$

Die nach (60) berechneten Werte von C_r/R sind in der 8. Spalte von Tab. I als Funktion von σ und $1/\sigma$ eingetragen und als Kurve VI in Fig. 3 eingezeichnet.

Die Kurve VI *steigt zu einem Maximum an, das etwa 10 Proz. über dem klassischen Wert liegt, und nähert sich dann, von oben kommend, asymptotisch dem klassischen Wert* $C_v = R$. Auch diese Kurve kann daher, ebenso wie die Kurven I und II, die Messungen *nicht* wiedergeben.

Für Werte von $\sigma < 1$ ist die Berechnung der Kurven schon recht mühsam, da man dann sehr viel Glieder von $f(x)$ und $g(x)$ braucht. Um auch in diesem Fall den Verlauf der Kurve zu erkennen, kann man zweckmäßig so verfahren: Man schreibe die allgemeine Formel

$$\frac{C_v}{R} = \sigma^2 \cdot \frac{d^2 \lg Q}{d\sigma^2}$$

folgendermaßen um:

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{C_v}{R} = \dfrac{d\,G(1/\sigma)}{d(1/\sigma)}, \\ \text{wo} \\ -G(1/\sigma) = \dfrac{d \lg Q}{d\sigma} = \dfrac{dQ/d\sigma}{Q}. \end{cases}$$

Wir nehmen z. B. die Kurve VI. Für diese ist nach (57):

$$(62)\quad Q = e^{-\frac{\sigma}{2}} \cdot Q_1, \quad \text{wo} \quad Q_1 = \sum_0^\infty (2n+1)\, e^{-(n^2+n)\sigma}.$$

Also

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{C_v}{R} = \sigma^2 \dfrac{d^2 \lg Q_1}{d\sigma^2} \\ \text{und daher} \\ -G(1/\sigma) = \dfrac{dQ_1/d\sigma}{Q_1}. \end{cases}$$

Nun ist

$$Q_1 = 1 + 3x^2 + 5x^6 + 7x^{12} + 9x^{20} + 11x^{30} + 13x^{42} + 15x^{56} + 17x^{72} + 19x^{90} + 21x^{110} + \ldots$$

$$-\frac{dQ_1}{d\sigma} = 6x^3\{1 + 5x^4 + 14x^{10} + 30x^{18} + 55x^{28} + 91x^{40} + 140x^{54} + 204x^{70} + 285x^{88} + 385x^{108} + \ldots\}$$

Also

$$(64)\quad \begin{cases} G(1/\sigma) = 6x^3 \\ \cdot \dfrac{1 + 5x^4 + 14x^{10} + 30x^{18} + 55x^{28} + 91x^{40} + 140x^{54} + 204x^{70} + \ldots}{1 + 3x^2 + 5x^6 + 7x^{12} + 9x^{20} + 11x^{30} + 13x^{42} + 15x^{56} + \ldots} \end{cases}$$

Die zahlenmäßige Berechnung dieser Funktion $G(1/\sigma)$ ist für $\sigma < 1$ einfacher, als die Auswertung von C_v/R nach (60), weil hier die Glieder im Zähler und Nenner schneller abnehmen. Es ergibt sich Tab. VII.

Die in der dritten Spalte der Tab. VII eingetragene Größe Δ ist folgendermaßen definiert: Sind $1/\sigma_1$ und $1/\sigma_2$ zwei aufeinanderfolgende Werte von $1/\sigma$ und $G(1/\sigma_1)$ bzw. $G(1/\sigma_2)$ die entsprechende Werte von $G(1/\sigma)$, so ist

$$(65)\quad \Delta = \frac{G(1/\sigma_2) - G(1/\sigma_1)}{1/\sigma_2 - 1/\sigma_1}.$$

Tabelle VII.

$1/\sigma$	$G(1/\sigma)$	Δ
0,250	0,0020	
0,333	0,0144	
0,400	0,0396	
0,500	0,1043	
0,556	0,1521	0,9797
0,625	0,2197	1,0309
0,667	0,2630	1,0851
0,714	0,3140	1,0890
0,769	0,3739	1,0984
0,833	0,4442	1,0895
0,909	0,5270	1,0802
1,000	0,6253	1,0649
1,111	0,7435	1,0446
1,250	0,8887	1,0285
1,429	1,0728	1,0189
1,667	1,3153	1,0132
2,000	1,6527	1,0064
2,500	2,1559	1,0018
5,000	4,6605	

Es ist also

$$\lim_{\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}=0} \Delta = \frac{d\,G(1/\sigma)}{d(1/\sigma)} = \frac{C_v}{R}. \tag{66}$$

Der Verlauf von Δ gibt also im wesentlichen den gesuchten Verlauf von C_v/R. Speziell erkennt man bei der vorliegenden Kurve VI den *Anstieg von Δ bis zu einem Maximum und die von oben erfolgende asymptotische Annäherung an den Wert 1.*

§ 11. Zusammenfassung.

Als Ergebnis der vorliegenden Untersuchung kann man die folgenden Sätze aussprechen:

I. Legt man bei der Berechnung der Rotationswärme C_v das Hantelmodell und die erste Plancksche Theorie zugrunde, so erhält man ohne Nebenannahmen Kurven (I und II) mit der Gewichtsfunktion $2n+1$ bzw. $n+1$ für den $n$ten Quantenzustand, je nachdem man positive und negative Rotationen unterscheidet oder nicht. Beide Kurven durchlaufen ein Maximum (das bei der Kurve I sogar über dem klassischen Wert $C_v = R$ liegt) und ein darauffolgendes Minimum, und nähern sich dem klassischen Wert asymptotisch von unten. Dieses Verhalten steht mit den Messungen nicht im Einklang.

II. Verbietet man bei den Kurven I und II den nullten Quantenzustand, indem man ihn mit dem Gewicht 0 belegt, so entstehen die Kurven III und IV, die mit wachsender Temperatur monoton ansteigen und sich asymptotisch dem klassischen Wert nähern. Der Vergleich mit den Messungen zeigt, daß durch geeignete Wahl der verfügbaren Konstanten (des Trägheitsmomentes) die Kurven III und IV zwar bei tiefen und mittleren Temperaturen in befriedigende Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu bringen sind, daß sie dagegen dann bei höheren Temperaturen (ungefähr 300°) bedeutend zu tief liegen.

III. Berücksichtigt man den schwachen Einfluß der vertikalen Schwerkraft, und verbietet alle die Quantenzustände, bei denen das Modell in einer Vertikalebene rotiert, so erhält man eine Kurve V mit dem Gewicht n, die ebenso wie die Kurven III und IV monoton ansteigt und sich dem klassischen Wert asymptotisch nähert. Bei dieser Kurve V kann man durch geeignete Wahl des Trägheitsmoments Übereinstimmung bei tiefen und hohen Temperaturen erreichen; dagegen liegt die Kurve bei mittleren Temperaturen (ungefähr 200°) bedeutend zu hoch.

IV. Zum Vergleich mit den nach der ersten Planckschen Theorie berechneten Kurven I bis V werden die nach der zweiten Planckschen Theorie berechneten Kurven herangezogen. Die unter Voraussetzung inkohärenter Freiheitsgrade berechnete Kurve von S. Rotszayn deckt sich mit Kurve V. Die von Planck unter der Annahme kohärenter Freiheitsgrade berechnete Kurve VI steigt zu einem oberhalb des klassischen Wertes liegenden Maximum an, und sinkt dann langsam, um sich von oben her asymptotisch dem klassischen Wert zu nähern.

Anhang.

In den folgenden Betrachtungen sind auf Grund der ersten Planckschen Theorie zwei Beispiele behandelt, die die Verschiedenheit der Resultate zeigen, zu denen man gelangt:

1. Wenn man, entsprechend der Möglichkeit positiver und negativer Umläufe, gewisse Quantenzahlen *doppelt* zählt.

2. Wenn man *nur die positiven* Umläufe berücksichtigt.

1. Beispiel. Der 2-dimensionale, quasielastische Oszillator.

Ist m die Masse, ω die Frequenz des Oszillators, so wird bei Einführung von ebenen Polarkoordinaten r und φ die Energie des Oszillators

$$W = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \omega^2 r^2), \tag{1}$$

Die den Koordinaten r und φ entsprechenden Impulse sind

$$p_r = m\dot{r} \quad \text{und} \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}. \tag{2}$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung des Problems wird daher

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mW - m^2\omega^2 r^2. \tag{3}$$

Wir setzen

$$V = p \cdot \varphi + V_1(r). \tag{4}$$

Dann ist

$$p = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \tag{5}$$

das konstante „Impulsmoment" des Oszillators. Für V_1 ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dV_1}{dr} = \sqrt{2mW - m^2\omega^2 r^2 - \frac{p^2}{r^2}}. \tag{6}$$

Die Quantenbedingungen lauten

$$\begin{cases} \oint p_r\, dr = \oint dr \sqrt{2mW - m^2\omega^2 r^2 - \frac{p^2}{r^2}} = n_1 h, \\ \int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = 2\pi p = n_2 h. \end{cases} \tag{7}$$

Nehmen wir auch hier $n_2 \geqq 0$, d. h. legen wir die Integrationsrichtung des zweiten Phasenintegrals in die Bewegungsrichtung, so gilt die Formulierung (7) der zweiten Quantenbedingung nur für positive Umläufe und muß für negative Umläufe durch

$$\int_0^{-2\pi} p_\varphi\, d\varphi = -2\pi p = n_2 h \tag{7a}$$

ersetzt werden.

Die Berechnung des ersten Phasenintegrals verläuft wie folgt: Man setze $r^2 = \xi$, dann wird

$$\oint p_r \, dr = \frac{1}{2} \oint d\xi \sqrt{-m^2\omega^2 + \frac{2mW}{\xi} + \frac{p^2}{\xi^2}} \cdot \tag{8}$$

Das Integral rechts ist von der allgemeinen Form

$$J = \oint d\xi \sqrt{A + 2\frac{B}{\xi} + \frac{C}{\xi^2}} \cdot \tag{9}$$

Durch Anwendung der komplexen Integration findet man leicht[1])

$$J = -2\pi i \left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} \right), \tag{10}$$

wobei $\sqrt{C}$ negativ imaginär, $\sqrt{A}$ positiv imaginär ist. Nun ist hier

$$A = -m^2\omega^2; \quad B = mW; \quad C = -p^2. \tag{11}$$

Also

$$\sqrt{A} = +im\omega; \quad \sqrt{C} = -i|p|, \tag{12}$$

da ja p positiv oder negativ sein kann. Daher folgt aus (7) bis (12):

$$-\pi|p| + \frac{\pi W}{\omega} = n_1 h, \tag{13}$$

also

$$W = \frac{\omega}{\pi} h \left(n_1 + \frac{n_1}{2} \right),$$

oder

$$W_{n_1 n_2} = h\nu(2n_1 + n_2), \tag{14}$$

wenn man die Schwingungszahl $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ einführt.

---

1) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 17. p. 500 ff. 1916.

Die mittlere Energie des Oszillators wird also bei der Temperatur T:

$$(15)\quad \bar{W} = \frac{\sum_{n_1}\sum_{n_2} W_{n_1 n_2} \cdot e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}}}{\sum_{n_1}\sum_{n_2} e^{-\frac{W_{n_1 n_2}}{kT}}} = h\nu \cdot \frac{\sum_{n_1}\sum_{n_2} (2n_1 + n_2) \cdot e^{-\sigma(2n_1+n_2)}}{\sum_{n_1}\sum_{n_2} e^{-\sigma(2n_1+n_2)}}.$$

Dabei ist

$$(16)\quad \sigma = \frac{h\nu}{kT}.$$

Bei der Ausführung der Summationen unterscheiden wir nun zwei Fälle: 1. Man zählt alle positiven n_2 doppelt, entsprechend den positiven und negativen Werten von p. 2. Man berücksichtigt nur die positiven p.

1. Im ersten Fall hat man nach n_1 und n_2 von 0 bis ∞ zu summieren, *dabei aber alle Glieder, für die $n_2 > 0$ ist, doppelt zu nehmen.* Dann wird

$$(17)\quad \begin{cases} S = \sum_{n_1}\sum_{n_2} e^{-\sigma(2n_1+n_2)} = \sum_{0}^{\infty} e^{-2n_1\sigma}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-\sigma n_2}\right) \\ \qquad = \frac{1}{1-e^{-2\sigma}}\left\{1 + \frac{2e^{-\sigma}}{1-e^{-\sigma}}\right\} = \frac{1}{(1-e^{-\sigma})^2}. \end{cases}$$

Der Zähler in (15) ist aber nichts anderes als

$$-\frac{dS}{d\sigma} = \frac{2e^{-\sigma}}{(1-e^{-\sigma})^2}.$$

Daher folgt

$$(18)\quad \bar{W} = \frac{2h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

das heißt *das Doppelte des Wertes für den linearen Oszillator.*

2. Im zweiten Fall hat man einfach nach n_1 und n_2 von 0 bis ∞ zu summieren. Dann ergibt sich

$$(19)\quad S = \sum_{0}^{\infty} e^{-2\sigma n_1} \cdot \sum_{0}^{\infty} e^{-\sigma n_2} = \frac{1}{1-e^{-2\sigma}} \cdot \frac{1}{1-e^{-\sigma}}.$$

Daraus

$$-\frac{dS}{d\sigma} = \frac{2e^{-2\sigma}}{(1-e^{-2\sigma})^2 \cdot (1-e^{-\sigma})} + \frac{e^{-\sigma}}{(1-e^{-2\sigma}) \cdot (1-e^{-\sigma})^2},$$

also

$$\bar{W} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{2h\nu}{e^{\frac{2h\nu}{kT}} - 1}. \tag{20}$$

Die Energie setzt sich hier additiv aus der Energie zweier linearer Oszillatoren von den Schwingungszahlen ν und 2ν zusammen.

2. Beispiel. Der räumliche (3-dimensionale) quasielastische Oszillator.

Hier wird, bei Einführung räumlicher Polarkoordinaten r, ϑ, φ:

$$W = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 + \omega^2 r^2). \tag{21}$$

Also die drei Impulse

$$p_r = m\dot{r}; \quad p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}; \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \tag{22}$$

und daher die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mW - m^2\omega^2 r^2. \tag{23}$$

Wir machen den Separationsansatz

$$V = p \cdot \varphi + V_1(r) + V_2(\vartheta). \tag{24}$$

Dann erhält man für V_1 und V_2 die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{cases} r^2\left(\frac{dV_1}{dr}\right)^2 - 2mWr^2 + m^2\omega^2 r^4 = -k^2 \\ \left(\frac{dV_2}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{p^2}{\sin^2\vartheta} = +k^2, \end{cases} \tag{25}$$

wo $k^2 > 0$ eine neueingeführte Konstante darstellt. Die drei Quantenbedingungen lauten hier

$$\begin{cases} \oint p_r\,dr = \oint dr\sqrt{2mW - m^2\omega^2 r^2 - \frac{k^2}{r^2}} = n_1 h, \\ \oint p_\vartheta\,d\vartheta = \oint d\vartheta\sqrt{k^2 - \frac{p^2}{\sin^2\vartheta}} = n_2 h, \\ \int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi = 2\pi p = n_3 h. \end{cases} \tag{26}$$

Für negative p ist die dritte Quantenbedingung wieder durch

$$\int_0^{-2\pi} p_\varphi \, d\varphi = -2\pi p = n_3 h \tag{26a}$$

zu ersetzen. Das erste Phasenintegral in (26) hat wieder die Form von (7). Die erste Quantenbedingung lautet daher

$$-\pi k + \frac{\pi W}{\omega} = n_1 h. \tag{27}$$

Analog folgt für die zweite Quantenbedingung

$$2\pi \{k - |p|\} = n_2 h. \tag{28}$$

Aus (26), 26a), (27), (28) ergibt sich

$$W_{n_1 n_2 n_3} = h\nu (2n_1 + n_2 + n_3). \tag{29}$$

Daher

$$\bar{W} = h\nu \frac{\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} (2n_1 + n_2 + n_3)\, e^{-\sigma(2n_1 + n_2 + n_3)}}{\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} e^{-\sigma(2n_1 + n_2 + n_3)}}, \tag{30}$$

wo σ durch (16) definiert ist.

1. Berücksichtigung der positiven und negativen p, Summation über $n_1 n_2 n_3$ von 0 bis ∞, *wobei alle Glieder, für die* $n_3 > 0$, *doppelt zu nehmen sind.* Dann findet man

$$\left\{\begin{aligned} S &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} e^{-\sigma(2n_1 + n_2 + n_3)} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\sigma}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\sigma}} \cdot \frac{1 + e^{-\sigma}}{1 - e^{-\sigma}} = \frac{1}{(1 - e^{-\sigma})^3} \end{aligned}\right. \tag{31}$$

$$-\frac{dS}{d\sigma} = \frac{3e^{-\sigma}}{(1 - e^{-\sigma})^4}, \quad \text{also}$$

$$\bar{W} = \frac{3h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{32}$$

Man erhält also das Dreifache des Wertes für den linearen Oszillator.

2. Berücksichtigt man nur die positiven p, summiert also einfach über $n_1 n_2 n_3$ von 0 bis ∞, so wird

$$S = \frac{1}{1-e^{-2\sigma}} \cdot \frac{1}{(1-e^{-\sigma})^2}$$

$$-\frac{dS}{d\sigma} = \frac{2e^{-2\sigma}}{(1-e^{-2\sigma})(1-e^{-\sigma})^2} + \frac{2e^{-\sigma}}{(1-e^{-2\sigma})(1-e^{-\sigma})^3}.$$

Also

$$\bar{W} = \frac{2h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} + \frac{2h\nu}{e^{\frac{2h\nu}{kT}}-1}. \tag{33}$$

Die Energie setzt sich hier additiv zusammen aus den Energien von zwei linearen Oszillatoren von der Schwingungszahl ν und einem linearen Oszillator von der Schwingungszahl 2ν.

(Eingegangen 27. Dezember 1918.)

2. *Unter welchen Bedingungen kann man von einem Elektronengas reden?*

von M. v. Laue.

Einleitung.

In einigen vorhergehenden Veröffentlichungen[1]) haben wir das thermodynamische Gleichgewicht für die Wolken von Elektronen untersucht, welche heiße Leiter der Elektrizität umgeben. Das Gleichgewicht der Wolke in sich ist beherrscht durch die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -\varrho_0 e^{-\frac{\varepsilon\varphi}{kT}}, \tag{1}$$

in welcher φ das elektrostatische Potential, ε die Ladung eines Elektrons, k die Boltzmannsche Konstante, T die absolute Temperatur und ϱ_0 eine Konstante von der Dimension der elektrischen Raumdichte bezeichnet, deren Zahlenwert sich erst mit der Festsetzung eines bestimmten Nullpunktes für φ definieren läßt. Diese Differentialgleichung entsteht durch die Vereinigung der Poisson-Laplaceschen Gleichung

$$\Delta\varphi = -\varrho \tag{2}$$

mit dem Boltzmannschen Verteilungssatz, angewandt auf die von den Elektronen hervorgerufene elektrische Raumdichte

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\varepsilon\varphi}{kT}}. \tag{3}$$

Für das Gleichgewicht der Wolke mit der Glühelektrode aber haben wir als Bedingung die Beziehung[2])

$$\varrho_g = \frac{(N\varepsilon)^2}{2R} C^2 T^{3/2} e^{\frac{\mu}{RT}} \tag{4}$$

---

1) M. von Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. 15. 1918. p. 205, 257 und 301.

2) l. c. p. 241. Gleichung (48).

gefunden, in welcher ϱ_g die elektrische Dichte unmittelbar an der Elektrodenfläche (die Grenzdichte), $N\varepsilon$ die Ladung eines Mols Elektronen, R die Gaskonstante, μ die „Elektronenaffinität" der Glühelektrode, d. h. die Zunahme von deren freien Energie bei Zuführung eines Mols Elektronen, und C eine universelle Konstante bedeutet. Deren Zahlwert ließ sich quantentheoretisch ermitteln; wir fanden[1])

$$(4a) \qquad C = \frac{(\pi m)^{3/4}(2k)^{3/4}}{N|\varepsilon|h^{3/2}} = 7{,}80 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{grad}^{-3/4}.$$

Bei der Integration der Differentialgleichung (1) stellte sich heraus, daß bei hohen Temperaturen und bei hinreichendem Platz zu ihrer freien Entwicklung die Elektronenwolke die Glühelektrode als eine Oberflächenschicht umgibt, deren Dichte nach außen schnell abnimmt; auf ebene Elektrodenflächen übt sie keinen Druck aus, hat aber eine negative Oberflächenspannung, welche sich an gekrümmten Flächen in einem „Kapillardruck" äußert. Neben ihrer kinetischen Energie besitzt sie eine potentielle von der gleichen Größenordnung und unterscheidet sich somit durchaus von einem idealen Gase. Die Aufstellung der thermodynamischen Funktionen für diese Oberflächenschicht führte uns zu dem Gleichgewichtsgesetz (4).

Als Grund für diese flächenhafte Anhäufung fanden wir, daß sich die Zahl der Elektronen infolge des Nachschubes aus der Elektrode mit wachsender Temperatur sehr viel rascher vergrößert, als zur absoluten Temperatur proportional. Denken wir uns den Nachschub unterbunden, also die Zahl der Elektronen unveränderlich, so wird das Bild ein ganz anderes. Wie wir in der zweiten der erwähnten Untersuchungen zeigen konnten, nimmt dann die Elektronenwolke mit steigender Temperatur schließlich immer mehr einen Zustand an, der in allen wesentlichen Punkten dem idealen Gaszustand gleicht. Gerade dies ermöglichte es uns, die Konstante C auf die Entropiekonstante eines idealen Gases zurückzuführen.

Nun hat früher H. A. Wilson die Vorstellung, daß sich die Elektronen in Berührung mit einer Glühelektrode als Gas verhalten, thermodynamisch verwertet, indem er auf dies Gleichgewicht die Clausius-Clapeyronsche Gleichung an-

1) l. c., p. 268 u. 269. Gleichung (38).

wandte.[1]) Wir möchten hier untersuchen, an welche Bedingungen die Berechtigung dieser Auffassung gebunden ist, und Wilsons Ergebnis mit unserer Gleichgewichtsbedingung (4) vergleichen. — In den ersten beiden Veröffentlichungen fehlte uns noch eine wesentliche Vorbedingung für diese Untersuchung, nämlich die erst in der dritten erworbene Überzeugung, daß bei einiger Dichte der Elektronen die Bildkraft keine Rolle mehr spielt.

§ 1.

Um mit einem thermodynamischen Gleichgewicht zu tun zu haben, müssen wir den Wänden des die Elektronenschar enthaltenden Raumes jedenfalls überall die gleiche Temperatur zuschreiben, wie dieser selbst. Sodann wollen wir sogleich Nichtleiter als Teile der Begrenzung ausschließen; einmal aus dem Grunde, daß sie elektrische Einwirkungen von außen nicht abschirmen, sodann, weil unbekannt ist, ob und in welchem Maße sich Elektronen auf ihnen niederschlagen. Beide Gründe erschweren bei teilweise nichtleitender Begrenzung eine genaue Fragestellung.

Ferner wollen wir annehmen, daß die ganze Oberfläche aus demselben Stoff besteht. Dann ist das Potential φ auf ihr konstant; wir nennen den Randwert Φ. Da φ im Inneren keine Maxima haben kann[2]), ist es überall kleiner als Φ und hat ein oder mehrere Minima; den niedrigsten Wert, den es überhaupt annimmt, wählen wir als Nullpunkt dafür. Die Konstante ϱ_0, welche in (1) und (3) auftritt, erhält dann die Bedeutung des Minimalwertes von ϱ. Soll sich die Elektronenschar als Gas verhalten, so ist jedenfalls notwendig, daß ihre Dichte ϱ annähernd konstant ist, d. h., daß in der aus (3) als erste Näherung folgenden Gleichung

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{\varepsilon \varphi}{k T}\right) \tag{5}$$

$|\varepsilon| \varphi / k T \ll 1$ ist. Da aber der größte vorkommende Wert von φ der Randwert Φ ist, so müssen wir fordern:

$$\frac{|\varepsilon| \Phi}{k T} \ll 1. \tag{5a}$$

1) H. A. Wilson, Phil. Trans. (A) 202. 1903. p. 243. Vgl. auch O. W. Richardsons Darstellung in Band 4 des Marxschen Handbuches der Radiologie (Leipzig 1917) p. 464.

2) Vgl. unsere oben genannte Arbeit p. 210.

Wir vereinfachen uns die Betrachtung zunächst durch die vorläufige Voraussetzung, daß die Grenzfläche das Ellipsoid

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = l^2 \tag{6}$$

ist; den Koeffizienten A, B, C, drei reinen Zahlen, legen wir die Bedingung auf:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 . \tag{7}$$

Die Grenzfälle $C = 0$ oder $B = C = 0$, in denen das Ellipsoid zum unendlich langen elliptischen Zylinder oder zum Ebenenpaar $x = \pm 1$ ausartet, wollen wir uns dabei noch offen halten. In Räumen dieser Gestalt können wir, wenn in ihnen ϱ den konstanten Wert ϱ_0 hat,

$$\varphi = -\tfrac{1}{2}\varrho_0 (A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) \tag{8}$$

setzen; denn dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung $\Delta\varphi = -\varrho_0$ und der Nebenbedingung eines auf dem Ellipsoid (6) konstanten Wertes; letzterer ist

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}\varrho_0 l^2 . \tag{9}$$

In erster Näherung können wir nun die Veränderlichkeit der Dichte ϱ aus (5) ermitteln, wenn wir dort für φ den Wert (8) benutzen. Die Bedingung (5a) erhält also nach (9) die Form:

$$\frac{\varepsilon \varrho_0}{2kT} l^2 \ll 1 . \tag{10}$$

Statt der Minimaldichte ϱ_0 kann man hier natürlich ohne weiteres die Grenzdichte ϱ_g einsetzen. Durch die Forderung (10) ist den linearen Abmessungen des Gefäßes eine obere Grenze gesetzt. Wir wollen hinzufügen, daß man an den strengen Lösungen der Differentialgleichung (1), die wir früher[1]) für das Innere des Kreiszylinders und den Raum zwischen zwei parallelen Ebenen gegeben haben, bestätigen kann, daß, falls (10) gilt, die Dichte konstant ist. Und, um sogleich ein Zahlenbeispiel zu geben, erinnern wir daran, daß wir aus gewissen Messungen von Langmuir[2]) die Grenzdichte $|\varrho_g|$ für Wolfram von 2400 grad abs. zu $1{,}4 \cdot 10^2$ elektrostatische Einheiten

1) l. c. p. 228, Gleichung (31a) und p. 214, Gleichung (9). Die Bedingung (30) auf p. 267 daselbst läßt sich leicht auf die obige Forderung (10) zurückführen.

2) J. Langmuir, Phys. Zeitschr. 15. p. 516. 1914.

geschätzt haben.[1]) Soll ϱ um $^1/_{100}$ schwanken, so finden wir aus (5) und (9), indem wir zugleich zu elektrostatischen Maßeinheiten übergehen (sonst benutzen wir das Lorentzsche Maßsystem)

$$2\pi \frac{\varepsilon \varrho_g}{kT} l^2 = \frac{1}{100} . \tag{10a}$$

Mit den Werten $|\varepsilon| = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten, $k = 1{,}34 \cdot 10^{-16}$ erg./grad, berechnet sich daraus

$$l = 9{,}5 \cdot 10^{-5}\,\text{cm} . \tag{10b}$$

Die Achsen des Ellipsoides (6) sind $1/A$, $1/B$, $1/C$. Sind sie alle von der gleichen Größenordnung, so betragen sie also einige 10^{-4} cm. Doch kann, da wir für B und C alle Werte bis zu Null einschließlich zugelassen haben, auch eine dieser Achsen und selbst zwei beliebig groß sein; nur die übrig bleibenden sind dann an die genannte Größenordnung gebunden. Diese Berechnung zeigt, wie sehr die Bedingung (10) bei einigermaßen hohen Temperaturen die Größe der Gefäße einschränkt. Diese Beschränkung geht in unserem Beispiel sogar so weit, daß die Voraussetzung aller dieser Betrachtungen, nämlich eine quasistetige Verteilung der elektrischen Ladung, nicht mehr zutrifft. In einer Kugel, deren Halbmesser $r = l\sqrt{3}$ wir gemäß (10b) zu $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm bestimmen, beträgt die Zahl der Elektronen nämlich

$$\frac{\varrho_g}{\varepsilon} \times \frac{4\pi}{3} r^3 ,$$

d. h. etwa 5. Nun ist nach (10a)

$$\frac{\varrho_g}{\varepsilon} l^3 = \left(\frac{kT}{200\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{|\varrho_g|^{1/2} |\varepsilon|^{1/2}} ;$$

man kommt also zu günstigeren Verhältnissen, wenn man entweder bei derselben Temperatur zu anderen Körpern übergeht, die eine kleinere Grenzdichte aufweisen oder aber bei demselben Stoff zu niedrigerer Temperatur; denn mit fallender Temperatur nimmt $T^{3/2}/|\varrho_0|^{1/2}$ wegen des schnellen Abnehmens von ϱ_g äußerst rasch zu. Es gibt also sicher schon Verhältnisse, unter denen man von einem Elektronengas reden kann, aber die Bedingungen dafür sind recht einschränkende.

Natürlich gibt es auch bei anders als ellipsoidisch gestalteten Räumen eine Größenbeschränkung. Denken wir uns einen solchen Raum mit der konstanten Dichte ϱ_0 erfüllt; sein Potential

1) l. c. p. 250.

sei φ, dessen konstanter Grenzwert, wie oben, Φ. Nun dehnen wir, ohne ϱ_0 zu verändern, alle seine Abmessungen um den Faktor λ; dann nennen wir das Potential φ', dessen Grenzwert Φ'. Ein Punkt mit den Koordinaten x, y, z geht bei der Dehnung über in den ihm entsprechenden $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$. Wir behaupten, daß die beiden Potentiale in der Beziehung $\varphi' = \lambda \varphi$ zueinander stehen. Zum Beweise genügen die Bemerkungen, daß erstens wegen

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

aus $\Delta \varphi = -\varrho_0$ folgt: $\Delta \varphi' = -\varrho_0$, und daß zweitens sich dann aus dem konstanten Grenzwert Φ von φ ein konstanter Grenzwert $\Phi' = \lambda^2 \Phi$ von φ ergibt. Nach (5) schließen wir weiter, daß die Veränderlichkeit der Dichte ϱ in dem größeren Raume λ^2-mal so groß ist, wie in dem kleineren. Es muß also auf jeden Fall eine Bedingung von der Art von (10) bestehen, nur daß die Bedeutung der Strecke l von Gestalt zu Gestalt wechselt und ohne Lösung des betreffenden Potentialproblems nicht angegeben werden kann. Bei Formen aber, die sich, wenn auch roh, durch ein Ellipsoid annähern lassen, kann man jedenfalls auf dieselbe Größenordnung der Abmessungen schließen, wie bei diesem Ellipsoid.

Nun ist aber die Konstanz der Dichte keineswegs die einzige Bedingung für die Berechtigung, die Elektronenschar als ideales Gas zu betrachten. Wir müssen außerdem fordern, daß die potentielle Energie gegen die kinetische klein ist, und daß die Wandung einen zu ihr senkrechten Druck p erfährt, der dem Gasgesetz $pV = nRT$ genügt, wenn n die Zahl der im Volumen V enthaltenen Mole von Elektronen bedeutet. Es läßt sich aber zeigen, daß beide Forderungen schon durch die Bedingung (5a) gewährleistet sind. Und zwar ist der Beweis wieder am einfachsten für ellipsoidische Gefäße.

Aus (8) folgt nämlich für irgendeinen Punkt in dem betrachteten Raum:

$$\operatorname{grad}^2 \varphi = \varrho_0^2 (A^4 x^2 + B^4 y^2 + C^4 z^2),$$

und, da nach (7) A^2, B^2, $C^2 \leqq 1$ sind:

$$\operatorname{grad}^2 \varphi \leqq \varrho_0^2 (A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2).$$

Der Klammerausdruck nimmt nach (6) seinen größten Wert, l^2, auf der Begrenzung an. Für jeden Punkt im Innern oder auf der Begrenzung ist also nach (10):

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}^2\varphi \leqq \frac{1}{2}\varrho_0 l^2 \ll \frac{\varrho_0}{\varepsilon} kT,$$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}^2\varphi$ ist die Dichte der potentiellen, $\frac{3}{2}\varrho_0 kT:\varepsilon$ die der kinetischen Energie, da ϱ_0/ε die Zahl der Elektronen für die Volumeneinheit mißt. Also überwiegt in der Tat die kinetische Energie. Für Punkte der Grenzfläche ist aber $\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}^2\varphi$ zugleich die Stärke des Zuges, den das elektrische Feld auf sie ausübt, während der von der Wärmebewegung der Elektronen herrührende Druck $\varrho_0 kT:\varepsilon$ beträgt; ϱ_0/ε ist nämlich die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit. Man kann also jenen Zug gegen diesen Druck vernachlässigen. Den Ausdruck für diesen Druck p kann man umgestalten, indem man $k = R/N$ (R bedeutet die Gaskonstante, N die Zahl der Molekeln im Mol) und

$$\frac{\varrho_0}{N\varepsilon} = \frac{n}{V}$$

setzt; beide Seiten der letzten Gleichung geben nämlich, wenn n die Zahl der überhaupt vorhandenen Elektronenmole mißt, an, wieviele Mole in der Volumeneinheit liegen. Also folgt, wie wir verlangten, die Gleichung

$$pV = n\,R\,T. \tag{11}$$

Für Gefäße von beliebiger Form führen wir die Berechnung für das Verhältnis der potentiellen zur kinetischen Energie im Anschluß an den Greenschen Satz, angewandt auf die am Rande verschwindende Funktion $\Phi - \varphi$. Er liefert nämlich:

$$\int \mathrm{grad}^2\varphi\, d\tau = \int (\Phi - \varphi)\,\Delta\varphi\, d\tau = |\varrho_0| \int (\Phi - \varphi)\, d\tau.$$

Da nach unserer Festsetzung über den Nullpunkt von φ diese Funktion überall $\geqq 0$ ist, folgt daraus weiter in Hinblick auf (5a)

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{grad}^2\varphi\, d\tau < \frac{1}{2}|\varrho_0|\,\Phi V \ll \frac{\varrho_0}{\varepsilon} V \cdot kT.$$

Das Integral hier gibt die gesamte potentielle Energie,

$$\frac{3}{2}\,\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\,V \cdot kT$$

aber die gesamte kinetische Energie an; die erstere ist klein gegen die letztere. Man kann diese Ungleichung nun auch so umformen, daß danach der räumliche Mittelwert des Betrages der Maxwellschen Spannungen, nämlich

$$\frac{1}{2V}\int \mathrm{grad}^2\varphi\, d\tau,$$

gegen den Druck $p = \varrho_0 k T : \varepsilon$ verschwindet. Daß aber jeder Einzelwert von $\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}^2\,\varphi$ gegen p klein ist, läßt sich nicht beweisen.

Das zeigen wir an einem Beispiel. In einem sonst ellipsoidisch begrenzten Gefäß führen wir einen feinen Draht aus dem gleichen Material wie die sonstige Begrenzung und mit dieser in leitender Verbindung bis nahe zum Mittelpunkt. In einem Abstande vom Draht, der gegen dessen Halbmesser groß ist, verändert das den Potentialverlauf sehr wenig, und so verschiebt sich dabei auch das Potentialminimum nur wenig aus dem Mittelpunkt. Das ganze Potentialgefälle Φ, das überhaupt auftritt, liegt dann zwischen dem Drahtende und dem Mittelpunkt, d. h. auf einer gegen die anderen Abmessungen des Gefäßes kurzen Strecke; hier wird also $\mathrm{grad}^2\,\varphi$ wesentlich größer sein, als das Raummittel, und dasselbe gilt, wenn auch weniger schroff, für die ganze Oberfläche des Drahtes.

Sollen wir nur derartige Fälle als Ausnahmen von der weiteren Betrachtung ausschließen? Wir halten das nicht für nötig. Einmal geben wir zu bedenken, daß auch der Druck p die Kraft nur für nicht zu stark gekrümmte Flächenstücke zu berechnen gestattet, so daß für die Oberfläche und die Spitze des soeben besprochenen Drahtes die ganze Frage vielleicht den Sinn verliert. Einen zweiten, stärkeren Grund dafür liefert aber die folgende Betrachtung:

Wir deformieren die Begrenzung irgendwie. Wir können uns dann die Deformation auf unendlich viele Arten stetig ins Innere fortgesetzt denken, und benutzen eine davon, um für jeden Punkt des eingeschlossenen Raumes drei Verrückungen u, v, w zu definieren. Welche Art wir auch wählen, die Arbeit, welche die Spannungen, die im Inneren liegen, bei der Verrückung der Oberfläche durch die aus ihnen folgenden Flächenkräfte leisten, ist immer (wenn die Divergenz des Spannungstensors $\mathfrak{p}$ wie in unserem Fall verschwindet, d. h.

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{usw.}$$

ist) gleich dem Integral[1])

1) Vgl. z. B. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, Deutsch von A. Timpe, Leipzig u. Berlin 1907. p. 111.

$$\int d\tau \Big[p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + p_{yz} \Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \Big) + p_{zx} \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big) + p_{xy} \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big) \Big],$$

erstreckt über den ganzen Raum. In unserem Falle setzen sich die Spannungen zusammen aus dem Druck p und denen des elektrischen Feldes. Sind nun die Differentialquotienten $\partial u/\partial x$ usw. einigermaßen langsam veränderlich, so spielen keine Einzelwerte der Spannungskomponenten, sondern nur Mittelwerte von ihnen, gebildet für erhebliche Teile des ganzen Bereiches, eine Rolle. Ist insbesondere die Deformation eine reine Dehnung, so kann man sie durch $u = \lambda x$, $v = \lambda y$, $w = \lambda z$ mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor λ darstellen. Die Arbeit wird dann

$$\lambda V \cdot \frac{1}{V} \int (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) d\tau,$$

und hier treten überhaupt nur Mittelwerte, über den ganzen Raum an den Spannungskomponenten p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} gebildet, auf. Der Ausdruck für die Arbeit genügt aber neben der Kenntnis der Energie vollständig, um daraus die Entropie und die anderen thermodynamischen Funktionen der Elektronenschar zu berechnen.

Wir schließen aus diesen Betrachtungen: *Die Bedingung (5a) ist notwendig und hinreichend dafür, daß man in einem Gefäße von überall gleichem leitenden Stoff die Elektronenschar als ideales Gas betrachten darf. Sie setzt der Größe des Gefäßes eine obere Grenze, wie man insbesondere an der für ellipsoidische Gefäße geltenden Umformung (10) der genannten Bedingung sieht.*

Bei unveränderlichen Abmessungen des Gefäßes ist die Potentialfunktion φ, die wir aus der Gleichung $\Delta\varphi = -\varrho_0$ bestimmen, zu ϱ_0 proportional. Das gilt auch von ihrem Randwert Φ. Will man also aus (5a) die zulässigen Abmessungen des Gefäßes bestimmen, so fallen diese um so kleiner aus, je größer das Verhältnis ϱ_0/T ist. Wie schon einmal erwähnt, ist hier zwischen ϱ_0 und ϱ_g kein wesentlicher Unterschied. Die Grenzdichte wächst aber mit der Temperatur T weit rascher, als zu dieser proportional; das Verhältnis ϱ_0/T nimmt also mit wachsendem T zu. Daraus folgt: *Bedingung (5a) schränkt die Größe des Gefäßes um so mehr ein, je höher die Temperatur ist. In einem Gefäß von vorgegebener Größe ist der*

ideale Gaszustand nur unterhalb einer bestimmten Temperatur verwirklicht.[1])

Daß wir hier den Zustand, den wir früher als Grenzfall für hohe Temperaturen kennen lernten, bei verhältnismäßig niedrigen Temperaturen verwirklicht finden, stellt keinen Widerspruch dar. Bei der erwähnten früheren Untersuchung setzten wir eben die Zahl der Elektronen als unveränderlich voraus, hier aber liefert der die Elektronen einschließende Leiter immer neue Elektronen nach, wenn die Temperatur zunimmt. Es kommt eben nicht auf die Temperatur an sich an, sondern — bei einem Raume von vorgegebener Größe — auf das Verhältnis zwischen der Zahl der Elektronen und der Temperatur. Sehr gut aber paßt die hier gewonnene Erkenntnis zu den früher gefundenen Sätzen[2]), nach denen sich die Elektronen in einem von einem leitenden Körper umschlossenen Hohlraum mit steigender Temperatur immer mehr zu Oberflächenschichten ansammeln. Sind nur wenige Elektronen in dem Raume, wie es bei niedrigen Temperaturen der Fall ist, so ist der Einfluß der Raumladung auf den Potentialverlauf noch wenig merklich, und die Elektronen können sich gleichmäßig verteilen. Mit steigender Temperatur wächst aber die Raumladung und drängt einen immer größeren Bruchteil der Elektronen an die Wandungen. Die Wärmebewegung der Elektronen widerstrebt dem zwar; aber sie nimmt mit steigender Temperatur nicht rasch genug zu, um den Einfluß der reißend schnell anwachsenden Raumladung aufzuheben.

Besteht die Wandung des Gefäßes aus verschiedenen, metallisch leitenden Stoffen, so kann die Dichte ϱ nicht konstant sein, da ja an jedem dieser Körper eine andere Grenzdichte herrschen muß. Man kann darin nicht ohne weiteres eine Abweichung vom idealen Gaszustand sehen, da ja dann die Elektronen unter dem Einfluß äußerer Kräfte stehen, die durch den Voltaschen Spannungsunterschied zwischen diesen

1) Hier können wir nun auch begründen, weshalb diese Untersuchung erst seit der Aufklärung des aus der älteren Literatur übernommenen Irrtums hinsichtlich einer „Bildkraft" möglich war. Wirkte nämlich neben der aus dem Potential φ abzuleitenden Kraft eine Bildkraft auf die Elektronen, so müßte diese gerade in engen Gefäßen eine sehr bedeutende, hier sogar eine überwiegende Rolle spielen.

2) l. c. p. 211, 212 und die Zusammenfassung auf p. 255.

Körpern hervorgerufen werden. Auch Gase haben aber im Felde äußere Kräfte, wie etwa der Schwere, an verschiedenen Stellen verschiedene Dichten. Man wird vielmehr beide Zustände als entsprechende zu betrachten haben, solange die Potentialveränderung, welche die Elektronenschar selbst hervorbringt, zu gering ist, um ihrerseits wieder deren Dichte zu beeinflussen. Dazu ist jedenfalls wiederum notwendig, daß das Gefäß nicht zu groß ist. Ein genaueres Eingehen auf diese Verhältnisse hat aber wohl keinen besonderen Reiz.

Es mag aber hier noch auf einen Punkt hingewiesen werden, dessen man sich, so selbstverständlich er ist, doch selten bewußt wird. In dem Begriff des idealen Gaszustandes liegt nämlich außer der bekannten Vernachlässigung der Molekularkräfte auch das Absehen von allen Schwerewirkungen, die vom Gase selbst ausgehen. Berücksichtigt man diese, so führt der Boltzmannsche Verteilungssatz für die Massendichte δ,

$$\delta = \delta_0 e^{-\frac{m\psi}{kT}}$$

in Verbindung mit der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta\psi = \varkappa\delta$$

für das Schwerepotential ψ (m ist die Masse eines Moleküls, $\varkappa$ die Konstante des Newtonschen Anziehungsgesetzes) zu der Differentialgleichung

$$\Delta\psi = \varkappa\delta_0 e^{-\frac{m\psi}{kT}}. \tag{12}$$

Genau im gleichen Sinne, in welchem unsere Gleichung (1) die Elektronengleichgewichte beherrscht, regelt diese den Zustand schwerer Gase. Daß man in der Physik von den erwähnten Schwerewirkungen fast immer absehen darf, liegt an den verhältnismäßig geringen Gasmengen, mit denen man bei allen Versuchen zu tun hat, und an der gegen die Abstoßung zweier Elektronen bei gleicher Entfernung geringen Stärke der Schwereanziehung zweier Gasmolekeln. Gäbe es Gase, die bei überall gleicher Temperatur die Mächtigkeit eines größeren Himmelskörpers haben, so müßte man durchaus statt der Zustandsgleichung die Differentialgleichung (12) auf sie anwenden. Die mathematischen Methoden, die wir in den früheren Veröffentlichungen auf Gleichung (1) angewandt haben, leisten im wesentlichen dieselben Dienste für diese. Trotzdem haben

beide Gleichungen durchaus verschiedene Eigenschaften, die eben von dem Unterschied zwischen der elektrischen *Abstoßung* der Elektronen und der Schwere*anziehung* der Gasmolekeln herrühren. Gleichung (1) läßt sich auf

$$\Delta u = e^u$$

zurückführen[1]), Gleichung (12) statt dessen durch die Substitution

$$u = -\frac{m\psi}{kT} + \log\frac{\varkappa m \delta_0}{kT}$$

auf

$$\Delta u = -e^u .$$

Lösungen der letzteren liefern im Gegensatz zu der ersteren niemals Minima, wohl aber Maxima der Dichte; auch fehlen im allgemeinen jene so kennzeichnenden Flächen, an denen sie unendlich groß werden.

Der Begriff: „idealer Gaszustand" bezeichnet also einen Grenzzustand, dem sich Elektronenwolken und Gase von entgegengesetzten Seiten beliebig nähern können. Daß wir diese Annäherung bei den Gasen im allgemeinen besser verwirklicht finden, als bei den Elektronenscharen, liegt lediglich an dem Unterschied der Stärke bei der elektrostatischen Abstoßung der Elektronen und der Schwereanziehung der Gasmolekeln.

§ 2.

Wir denken uns die Elektronenwolke eingeschlossen in ein leitendes Gefäß aus einheitlichem Stoff und nehmen die in § 1 untersuchte Bedingung (5a) als erfüllt, betrachten also die Elektronenschar als ein ideales Gas. Die Zahl der im Gefäße vorhandenen Mole sei n. Wie wir ihm die Zustandsgleichung

$$pV = nRT$$

zuschreiben und seiner Energie den Wert

$$U = \tfrac{3}{2} nRT ,$$

müssen wir dann auch seiner Entropie den Wert

$$(13) \qquad S = nR\left(\frac{5}{2}\log T - \log p + \frac{5}{2} + \log\frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2}}{h^3}\right)$$

beilegen, welchen ein einatomiges Gas mit der Atommasse m hat. Die Konstante in dem Klammerausdruck ist dabei aus

1) l. c. p. 209.

den Arbeiten von Tetrode, Sackur, Stern und Planck[1]) entnommen. Wir erinnern daran, daß wir auch früher zur Ermittlung der Konstanten C von diesem Wert der Entropiekonstanten eines einatomigen, idealen Gases ausgegangen sind.

Die Funktion

$$\Phi = S - \frac{U + pV}{T}$$

erhält danach die Gestalt

$$\Phi = nR\left(\frac{5}{2}\log T - \log p + \log \frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2}}{h^3}\right). \tag{14}$$

Die Gleichgewichtsbedingung zwischen dem Elektronengas und dem umschließenden Metall hat man so aufzustellen, daß man zunächst für das Metall die entsprechende Funktion

$$\Phi_m = S_m - \frac{U_m + pV_m}{T} = -\frac{1}{T}(F_m + pV_m) \tag{14a}$$

aufstellt und dann

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{p,T} = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right)_{p,T} \tag{15}$$

setzt. Führen wir schließlich die „Elektronenaffinität"

$$\mu = -T\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right)_{p,T} \tag{16}$$

ein, so finden wir als Gleichgewichtsbedingung

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{p,T} = -\frac{\mu}{T}. \tag{17}$$

Daß dabei auch Temperatur und Druck für beide Phasen gleich sein müssen, bedarf keiner Erwähnung. Setzen wir in (17) den Wert (14) für Φ ein, so finden wir ohne weiteres als Gleichung der „Verdampfungskurve"

$$p = \frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2}}{h^3} T^{5/2} e^{\frac{\mu}{RT}}. \tag{18}$$

Für die Dichte

$$\varrho_g = \varepsilon \frac{p}{kT}$$

---

1) H. Tetrode, Ann. d. Phys. **38**. p. 434. 1912 und **39**. p. 255. 1912; O. Sackur, Ann. d. Phys. **40**. p. 67. 1913; O. Stern, Physik. Zeitschr. **14**. p. 629. 1913; M. Planck, Göttinger Wolfskehlvorträge 1918 (sollen in der Physik. Zeitschr. erscheinen).

folgt daraus:

(19) $$\varrho_g = \varepsilon \frac{(2\pi m k)^{3/2}}{h^3} T^{3/2} e^{\frac{\mu}{RT}}.$$

Denselben Wert findet man auch, wenn man in Formel (4) den Wert (4a) von C einsetzt.

Nur besteht ein kleiner Unterschied in der Bedeutung von μ. Früher hatten wir darunter den Wert des Differentialquotienten der freien Energie F_m,

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial n}\right)_{p,T},$$

für $p = 0$ verstehen müssen, diesmal aber

$$-T\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right)$$

für einen von Null verschiedenen Druck. Für $p = 0$ wird nach (14a)

$$-T\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right)_{p,T} = \left(\frac{\partial F_m}{\partial n}\right)_{p,T}.$$

Damit der Unterschied bei einem positiven p etwas ausmachte, wäre notwendig, daß einmal $\partial V_m/\partial n$ einen in Betracht kommenden Wert hätte, d. h., daß sich das Metall bei der Elektronenabgabe zusammenzöge oder ausdehnte, zweitens, daß der innere Zustand, also die Funktionen U_m und V_m, merklich durch die geringen, hier in Rede stehenden Drucke p verändert würde. Beide Bedingungen sind nicht erfüllt, so daß wir trotz des gedanklichen Unterschiedes zwischen den beiden Werten von μ, das jetzige Ergebnis als völlige Bestätigung des früheren bezeichnen können. Darin liegt auch eine Rechtfertigung für unsere stets benutzte Anschauung, daß der Grenzwert der Dichte, ϱ_g, nur vom Elektrodenmaterial und der Temperatur abhängt. Es mag erwähnt werden, daß, genau genommen, nicht

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial n}\right)_{p,T}, \quad \text{sondern} \quad -T\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right)_{p,T}$$

die Stellung des Körpers in der Voltaschen Spannungsreihe kennzeichnet; nur weil $\partial V_m/\partial n$ unmerklich klein ist, macht das keinen Unterschied.

Wir wollen hier daran erinnern, daß wir Gleichung (19) zunächst in dem hier stets benutzten Lorentzschen Maßsystem abgeleitet haben. Der Übergang zum elektrostatischen

bedingt aber keine Veränderung dieser Formel, da sich die Dichte ϱ_g und die Elektrizitätsmenge ε dabei in der gleichen Weise umrechnen.

Aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung (15) geht für Gleichgewichte, die nur von einer Veränderlichen, etwa der Temperatur abhängen, ganz allgemein und streng die Clausius-Clapeyronsche Gleichung hervor.[1]) Die Berechtigung, sie hier anzuwenden, haben wir also schon zugegeben. Andererseits kann uns ihre Anwendung nichts Neues lehren, im Gegenteil, da wir die Dampfdruckkurve (18) aus ihr durch eine Integration gewinnen müssen, bleibt der Proportionalitätsfaktor von (18) dabei unbestimmt, den wir aus der Entropiekonstanten entnehmen konnten. Dennoch wollen wir diesen Weg beschreiten, um zu zeigen, weshalb H. A. Wilson von ihr aus nicht zu unserer Formel (18) gekommen ist. Die Clausius-Clapeyronsche Gleichung lautet:

$$r = T(v_1 - v_2)\frac{dp}{dT} \tag{20}$$

und zwar bedeutet darin r die Wärmemenge, die bei der Überführung eines bestimmten Quantums Stoff aus der Phase 2 in die Phase 1 zuzuführen ist, v_1 die Volumenzunahme der Phase 1 und v_2 die der Phase 2, wenn diese Überführung bei konstanter Temperatur und konstantem Druck vor sich geht. Als Phase 1 bezeichnen wir die Elektronenwolke. Führen wir ihr aus dem Leiter, der Phase 2, dn Mole Elektronen zu, so vermehrt sich ihre Energie um $\frac{3}{2} dn\, R\, T$, während die des Metalls um $-(\partial U_m/\partial n)_{p,T} \times dn$ wächst. Gleichzeitig muß die Arbeit $dn\, R\, T$ gegen den Druck p geleistet werden. v_2 ist ganz unmerklich, hingegen $v_1 = dn\, R\, T$. Also ist

$$r = dn\left[\frac{5}{2} RT - \left(\frac{\partial U_m}{\partial n}\right)_{p,T}\right]$$

und

$$T(v_1 - v_2)\frac{dp}{dT} = dn \cdot \frac{RT^2}{p}\frac{dp}{dT},$$

---

1) Vgl. z. B. M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik, § 212. Dabei ist der innere Zustand jeder Phase als abhängig außer von der Zusammensetzung von Temperatur und Druck angenommen. Für die früher von uns betrachteten Oberflächenschichten gilt wohl Gleichung (15), aber nicht die von Clausius und Clapeyron, weil diese Bedingung nicht erfüllt ist.

so daß die Gleichung (20) liefert:

$$\frac{dp}{p} = \left(\frac{5}{2T} - \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{U_m}{T^2}\right)\right]_{p,T}\right) dT. \tag{21}$$

Dies findet sich auch bei Wilson.

In der Integration weichen wir aber von Wilson ab. Er setzt als Annahme die Energiezunahme

$$\frac{3}{2} RT - \left(\frac{\partial U_m}{\partial n}\right)_{p,T} = A + BT \tag{22}$$

(A und B sind Konstanten) und findet dann

$$p = \text{const} \cdot T^{1+\frac{B}{R}} e^{-\frac{A}{T}}.$$

Wir hingegen erinnern an die allgemeine thermodynamische Formel[1]):

$$\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial T}\right)_p = \frac{U_m + pV_m}{T^2}.$$

Indem wir hier unter Vernachlässigung des Druckeinflusses auf den inneren Zustand der Elektrode den längs der Verdampfungskurve (18) zu bildenden Differentialquotienten

$$\frac{d\Phi_m}{dT} = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial T}\right)_p$$

setzen, erhalten wir, wenn wir längs der Verdampfungskurve integrieren und $\partial V_m/\partial n$, wie schon mehrmals, vernachlässigen:

$$\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{U_m}{T^2}\right) dT = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right)_{p,T} = -\frac{\mu}{T}; \tag{23}$$

somit finden wir durch die Integration von (21)

$$p = \text{const} \cdot T^{5/2} e^{\frac{\mu}{RT}},$$

was sich von (18) nur durch die unbestimmt bleibenden Konstanten unterscheidet. Der einzige Unterschied zwischen Wilson und uns beruht somit auf seiner Annahme (22). Richardson ist bei seiner Darstellung von Wilsons Gedankengang unserem Ergebnis schon sehr viel näher gekommen;

---

1) Vgl. z. B. bei M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik, Gleichung (79b).

ihm ist nur die einfache Bedeutung des in (23) ausgeführten Integrales entgangen.[1])

Zur Formel (19) für die Grenzdichte der Elektronenwolke an der Glühelektrode führen somit zwei Wege. Der früher beschrittene betrachtet diese Wolke in dem für sie so kennzeichnenden Zustande der Oberflächenschicht, während der zweite den gerade entgegengesetzten, nur unter beschränkenden und manchmal, wie wir gesehen haben, gänzlich unerfüllbaren Bedingungen möglichen Zustand ins Auge faßt, in welchem sie sich wie ideales Gas verhält. Der eine benutzt von den Lösungen der Differentialgleichung (1) die Umgebung der Unendlichkeitsstellen, der andere deren breite Minima. Der zweite Weg hat zweifellos den Vorzug der Kürze. Dafür hat uns der erste einen weit tieferen Einblick in das Wesen dieser Elektronenwolken verschafft, da wir auf ihm jene Oberflächenschichten nicht nur in ihrer Dichteverteilung, sondern auch in ihren thermodynamischen Funktionen kennen lernten. Die Grundlagen beider Ableitungen sind natürlich dieselben, nämlich die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = - \varrho_0 e^{-\frac{e\varphi}{kT}},$$

die allgemeinen Formeln der Thermodynamik und der elektrostatische Ausdruck für die Energie, und schließlich noch der quantentheoretische Wert für die Entropiekonstante idealer Gase. Die Übereinstimmung beider Ergebnisse bedeutet also nur, daß wir beide Wege folgerichtig beschritten haben.

Frankfurt a. M., Institut für theoretische Physik,
Dezember 1918.

---

1) *Zusatz bei der Korrektur:* Diese Lücke hat eine nach Einreichung dieser Untersuchung erschienene Notiz von W. Schottky, Phys. Zeitschr. 20. p. 49. 1919, ausgefüllt. Was sonst über sie zu sagen ist, stellen wir in einer Entgegnung „Läßt sich die Clausius-Clapeyronsche Gleichung auf die Glühelektronen anwenden?“ in der gleichen Zeitschrift zusammen.

(Eingegangen 30. Dezember 1918.)

3. *Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IX. Vergleich von Dupletserien;* von J. Stark und O. Hardtke.

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Methoden. — § 3. Ergebnisse für die diffusen Dupletserien. — § 4. Die nahdiffuse Dupletserie. — § 5. Verbreiterung und Druckverschiebung der untersuchten Linien.

§ 1. *Einleitung.* — Der Zeemaneffekt ist für entsprechende Linien entsprechender Serien verschiedener Elemente qualitativ und quantitativ derselbe. Dies hat sich vor allem für die Hauptserie und die beiden Nebenserien von Duplets der Elemente Na, Cu, Ag, Mg, Ca, Al, Tl ergeben. Aus der Übereinstimmung der Zeemaneffekte der Dupletlinien dieser Elemente ist zu folgern, daß die kinematischen Freiheitsgrade und die kinematischen Koppelungen der Elektronen in den Serienträgern für die genannten Elemente dieselben sind.

Es lag nahe, wie die Zeemaneffekte so auch die Effekte des elektrischen Feldes auf entsprechende Linien verschiedener Elemente miteinander zu vergleichen. In dieser Hinsicht lieferte zunächst die Untersuchung der He- und Li-Linien ein einfaches Resultat. Die Effekte des elektrischen Feldes auf entsprechende Linien dieser Elemente stimmen nämlich hinsichtlich der Zahl und des Abstandes der Komponenten ziemlich genau überein.

Es erhob sich die Frage, ob diese Übereinstimmung auch für die Dupletserien anderer Elemente besteht. Es wurden von uns für diesen Vergleich die diffusen (ersten) Nebenserien von Na, Cu, Ag und Al ausgewählt. Von ihnen sind wenigstens die drei ersten Glieder bekannt; von diesen kamen wieder nur das zweite und dritte Glied in Betracht, weil nach den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen nur für sie bei der angewandten Dispersion und Feldstärke ein positiver Erfolg zu erwarten war.

Von den vier genannten Elementen ist die diffuse Neben-

serie der Al-Duplets bereits von R. A. Wetzel[1]) auf den Effekt des elektrischen Feldes untersucht worden, und zwar die drei ersten Duplets.

Nun nimmt ja entlang einer Serie der Effekt des elektrischen Feldes rasch mit steigender Gliednummer zu; darum hatte ich wenigstens für das dritte Glied λ 2373 – 2367 A ein positives Resultat erwartet. Aber trotzdem die von Wetzel verwendete Feldstärke groß war, nämlich 80000 Volt $\times$ cm^{-1} betrug, und ebenso die Dispersion des verwendeten Quarzspektrographen den großen Wert 4,5 A $\times$ mm^{-1} besaß, erhielt Wetzel keine sichere Zerlegung oder Verschiebung der genannten Al-Linien.

Den Grund für diese geringe Empfindlichkeit der Al-Dupletserie gegen das elektrische Feld kann man in erster Linie in dem Umstand suchen, daß die Serienelektronen im Al^+-Atomion, dem wahrscheinlichen Serienträger[2]), durch die zwei an diesem verbliebenen oberflächlichen Valenzelektronen vor dem äußeren elektrischen Feld geschützt werden. Wir hielten darum einen positiven Erfolg bei den Dupletserien der einwertigen Elemente Na, Cu und Ag für möglich und bekamen hierin durch die Erfahrung recht.

Für die Art und Größe des Effektes des elektrischen Feldes bei einer Linie ist die Art ihrer Serie und ihre Gliednummer von entscheidender Bedeutung. Darum kam es darauf an, den Charakter der verglichenen Dupletserien außer jeden Zweifel zu stellen. In der folgenden Tab. I sind nun die ersten drei Glieder zusammengestellt.

Charakteristisch für eine diffuse (erste) Nebenserie von Duplets ist zum Unterschiede von anderen Dupletserien, daß vor der ersten Komponente eines jeden Duplets eine schwächere Linie, ein „Trabant", liegt. Wie die Tab. I erkennen läßt, tritt dieser Trabant bei allen Duplets von Ag, Cu und Al auf. Beim dritten Cu-Duplet allein ist er noch nicht nachgewiesen. Er rückt nämlich mit steigender Gliednummer immer näher an die Hauptlinie heran und kann dann unter Umständen, besonders wenn die Linien wie im Lichtbogen verbreitert sind,

1) R. A. Wetzel, Phys. Rev. 4. p. 550. 1914.

2) J. Stark, Bericht über die Träger der Spektren der chemischen Elemente. Jahrb. d. Rad. u. El. 14. p. 189. 1917.

nicht mehr von ihr getrennt werden. Dies ist beim dritten Cu-Duplet der Fall und bei den in der Tabelle mitgeteilten Na-Duplets. Daß diese diffusen Nebenserien angehören, geht aus ihrer Unschärfe und ihrem Verhältnis zu den anderen Dupletserien hervor. Ein weiterer Beweis für die Zugehörigkeit der untersuchten Serien zu diffusen Nebenserien wird durch die Übereinstimmung der Zeemaneffekte entsprechender Linien gegeben.

Tabelle I.

Diffuse Nebenserie		Silber[1])	Kupfer[1])	Aluminium[2])	Natrium[3])
Erstes Glied	Trabant	5471,7	5220,8	3092,9	8196,1
	I. Kompon. .	5465,6	5218,5	3092,8	
	II. Kompon. .	5209,2	5153,4	3882,3	8183,7
Zweites Glied	Trabant	4212,8	4068,5[4])	2575,5	5688,3
	I. Kompon. .	4210,9	4062,9	2575,2	
	II. Kompon. .	4055,5	4022,9	2568,1	5682,9
Drittes Glied	Trabant	3813,2[4])	3688,6[4])	2373,5	4983,5
	I. Kompon. .	3810,9		2373,2	
	II. Kompon. .	3682,5	3654,6[4])	2367,2	4979,3

§ 2. *Methoden.* — Zur Untersuchung des Effektes des elektrischen Feldes bedienten wir uns der Kathodenschichtmethode. Wir beobachteten also die Lichtemission in dem starken elektrischen Feld unmittelbar vor der Kathode des Glimmstromes; die Sehachse stand hierbei senkrecht zur Feldachse. Und zwar verwendeten wir die bereits an früherer Stelle[4]) beschriebene Stromröhre.

Um die Linien der angegebenen Metalle in Emission zu erhalten, wurde das zu untersuchende Metall als 1—2 mm dicke Kappe auf die Kathode aufgesetzt und so als kathodische Strombasis benutzt. Infolge seiner Zerstäubung durch die auftreffenden Kanalstrahlen trat dann die Emission seiner Linien vor der Kathode auf. Die benötigte Stromstärke betrug 1—2 Milliampère.

1) Wellenlängen nach Eder und Valenta.
2) Neu von uns beobachtet und gemessen.
3) Wellenlängen nach Kayser und Runge.
4) J. Stark, O. Hardtke u. G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 569. 1918.

Als Füllgas scheidet Wasserstoff aus, weil in ihm die kathodische Zerstäubung gering ist und weil sein kontinuierliches Spektrum (Kanalstrahlen, erste Kathodenschicht) störend intensiv ist. Stickstoff ist wegen seines Bandenreichtums ungeeignet. Sauerstoff schien nach den Angaben, welche von anderer Seite über die kathodische Zerstäubung in verschiedenen Gasen gemacht wurden, für Ag und Cu geeignet zu sein. Indes stellte sich heraus, daß der größte Teil der scheinbaren kathodischen Zerstäubung als chemische Wirkung auf das Kathodenmetall aufzufassen ist; so wurde zwar das kathodische Silber durch den Glimmstrom in O_2 rasch abgetragen, ohne daß indes wie bei der regelrechten kathodischen Zerstäubung die Emission des zerstäubten Metalles intensiv hervortrat. Eine starke Zerstäubung liefert Argon und wir haben dieses Gas, nachdem es von Stickstoff durch ein besonderes Verfahren gereinigt war, in einigen Aufnahmen mit Erfolg angewendet. Doch dürfte in vielen Fällen sein Linienreichtum stören. Am besten geeignet erwies sich Helium gemischt mit gesättigtem Quecksilberdampf. Ist die Glimmstromröhre nach etwa halbstündigem Betrieb unter Wechsel von Abpumpen und He-Einlaß einigermaßen gereinigt, so setzt in ihm bei Gegenwart von reichlich Hg-Dampf eine intensive Zerstäubung der Kathode ein, selbst wenn diese aus Aluminium besteht. Trotz der verhältlich geringen Zahl der He-Linien können diese freilich stören, besonders die Linien der diffusen Nebenserien, die durch das elektrische Feld in zahlreiche weitabstehende Komponenten zerlegt werden.

Für Natrium als Kathodenmetall kam von vornherein nur ein Edelgas als Füllgas in Betracht; wir verwandten hierfür Helium. Bei Natrium stellte sich folgende Schwierigkeit ein Wurde die Stromröhre nur mit 1 Milliampère betrieben und durch Abpumpen der Verunreinigungen und Einlaß von frischem Helium etwa 4 Stunden lang gereinigt, so schlug der Glimmstrom in rascher Folge in einen schwachen Lichtbogen von kleinem Kathodenfall um. Es war dann die Röhre für weitere Aufnahmen unbrauchbar geworden. So mußte die Röhre schon während der Reinigung für eine Aufnahme verwendet werden; hierbei war einerseits die Zerstäubung des Natriums und darum die Intensität seiner Linien gering, andererseits das Spektrum

stark durch Kohlenwasserstoffbanden verunreinigt. Wurde zwecks Steigerung der Lichtintensität die Stromstärke auf 2 bis 3 Milliampère erhöht, so sank infolge der Entwicklung von Na-Dampf aus der Kathode die Feldstärke vor dieser in erheblichem Betrage offenbar infolge der starken Ionisierung des Dampfes.

Die Feldstärke vor der Glimmstromkathode ist ja in verschiedenen Abständen von ihr verschieden groß. Dementsprechend sind die vom Feld beeinflußten Linien gekrümmt; gemessen wurde an jeder Linie oder Linienkomponente die größte Verschiebung oder der größte Abstand von der beeinflußten Linie. Aus dem bekannten elektrischen Effekt der gleichzeitig oder unter denselben Bedingungen erhaltenen He-Linien wurde der dazu gehörige größte Wert der Feldstärke zu 20000 bis 26000 Volt $\times$ cm^{-1} ermittelt.

Die vor der Kathode liegende erste Schicht wurde in der üblichen Weise mit einem Objektiv (Quarz-Flußspat-Achromat oder Tessar) durch ein Kalkspatprisma hindurch auf den Spalt eines Spektrographen abgebildet. Als solcher diente für das Gebiet unter λ 400 $\mu\mu$ ein Quarzapparat mit zwei 60°-Prismen und Objektiven von 80 cm Brennweite, für das Gebiet λ 500 bis 400 $\mu\mu$ ein Glasapparat mit zwei Geradsichtprismen und Objektiven von 30 cm Brennweite.

§ 3. *Ergebnisse für die diffusen Dupletserien.* — Was das erste Glied der Ag-, Cu- und Na-Nebenserie betrifft, so sahen wir von vornherein von seiner Untersuchung ab. Es nimmt ja die Größe des Effektes des elektrischen Feldes mit abnehmender Gliednummer ab und, ist er, wie es in den untersuchten Fällen zutraf, für das zweite Glied bereits so klein, daß er nur eben nach dem Vorzeichen noch festgestellt werden kann, so ist unter den gleichen Versuchsbedingungen für das erste Glied kein positiver Erfolg zu erwarten. In der nebenstehenden Tab. II sind die von uns an den untersuchten Linien gemachten Beobachtungen zusammengestellt, des Vergleiches halber sind auch Wetzels Angaben über die Al-Duplets mit aufgenommen; die hinter den elektrischen Komponenten stehenden eingeklammerten Zahlen bedeuten relative Intensitäten.

Tabelle II.

$\Delta\lambda$ Abstand der elektrischen Komponenten von der unbeeinflußten Linie.
Feldstärke für Na, Cu und Ag 23000, für Al 80000 Volt × cm^{-1}.

Glied	Na Atomg. 23; Valenzzahl 1			Cu Atomg. 63,6; Valenzzahl 1			Ag Atomg. 107,9; Valenzzahl 1			Al Atomg. 27,1; Valenzzahl 3		
	λ A	$\Delta\lambda$ A	Dispers. A × mm^{-1}	λ A	$\Delta\lambda$ A	Dispers. A × mm^{-1}	λ A	$\Delta\lambda$ A	Dispers. A × mm^{-1}	λ A	$\Delta\lambda$ A	Dispers. A × mm^{-1}
2. Gl. Trab.	5688,3	+ 0,5[1]	9,0	4063,5[1]	+ 0,6[1]	18	4212,8	+ 1,21	8,6	2575,5	unmerkl.	5,3
2. Gl. I. Komp.				4062,9			4210,9	− 1,15		2575,2	„	
2. Gl. II. Komp.	5682,9	+ 0,5[1]	9,0	4022,9	+ 0,6[1]	18	4055,5	+ 1,46 (3) − 1,42 (2)	6,6	2568,1	„	5,3
3. Gl. Trab.	4983,5	+ 1,2	13,3	3688,6	+ 1,0	13,1	3813,2	+ 2,0	14,7	2373,5	„	4,6
3. Gl. I. Komp.							3810,9	− 0,78 (3) − 2,98 (1)		2373,2	„	
3. Gl. II. Komp.	4979,3	+ 1,2	13,3	3654,6[2]			3682,5	+ 2,71 (2,5) − 0,91 (3) − 3,11 (1)	13,1	2367,2	„	4,5

1) Geschätzt.
2) Durch Hg-Linie verdeckt.
3) In unseren Spektrogrammen von der Hauptlinie nicht getrennt.

An der vorstehenden Tabelle fällt vor allem der große Unterschied in der Größe der Effekte des elektrischen Feldes zwischen Al einerseits und Na, Cu und Ag andererseits auf. Während er für diese drei einwertigen Metalle von derselben Größenordnung ist (1—3 A für 23000 Volt × cm^{-1}), ist er für Al viel kleiner, nämlich für 23000 Volt × cm^{-1} kleiner als 0,07 A. Diese Zahl kann man in folgender Weise abschätzen. Wetzel hätte bei λ 2367 eine Verschiebung der Linie um 0,5 mm, also um 0,22 A bemerken müssen; sie war also für 80000 Volt × cm^{-1} kleiner als 0,22 A, bei Proportionalität zwischen Verschiebung und Feldstärke also für 23000 Volt × cm^{-1} kleiner als 0,07 A.

Der Vergleich der Effekte des elektrischen Feldes im Zusammenhalt mit den Atomgewichten lehrt, daß *der Effekt des elektrischen Feldes jedenfalls nicht unabhängig von der Valenzzahl eines Atoms nur eine Funktion des Atomgewichts ist. Der große Unterschied in der Größe der Effekte zwischen dem dreiwertigen Al einerseits und den drei einwertigen Elementen Na, Ag und Cu andererseits dürfte in erster Linie auf die Verschiedenheit der Valenzzahlen zurückzuführen sein.* Es sind ja als die Träger[1]) der verglichenen Dupletserien die einwertigen Atomionen Na^+, Cu^+, Ag^+ und Al^+ anzusehen. Im Falle des Na^+-, Cu^+- und Ag^+-Ions lagert sich also über das äußere elektrische Feld am Orte der Serienelektronen nicht ein sekundäres Feld von Seite eines von ihm beeinflußten, an der Atomoberfläche sitzenden Valenzelektrons; im Falle des Al^+-Ions dagegen wird die Wirkung des äußeren Feldes durch die Wirkung von zwei Valenzelektronen abgeschwächt, welche an der Oberfläche des Al^+-Ions sitzen.

§ 4. *Die nahdiffuse Dupletserie.* — An der Tab. II fällt weiter auf, daß die Art des Effektes des elektrischen Feldes für die Cu-Linien eine andere ist wie für die entsprechenden Ag-Linien. Während z. B. die erste Komponente des dritten Gliedes beim Kupfer ohne Zerlegung nur verschoben wird, wird sie beim Silber in zwei Komponenten zerlegt. Dieser Unterschied dürfte auf das Zusammenfallen der diffusen Ag-Duplet-

1) J. Stark, Bericht über die Träger der Spektren der chemischen Elemente; Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14. p. 139. 1917.

serie mit einer anderen Serie, der „nahdiffusen Serie" zurückzuführen sein.

Außer der diffusen, scharfen und halbscharfen Nebenserie, die bis jetzt bei Helium und den Alkalien aufgefunden worden sind, existiert nämlich noch eine weitere Serie, welche an demselben Ende wie die drei anderen Nebenserien ausläuft. Die Laufzahlen dieser Serie sind dieselben wie diejenigen der im Ultrarot liegenden Serie, welche von F. Paschen[1]) und seinen Schülern Bergmann-Serie genannt wird. Sie bezeichnen die Glieder dieser vierten Nebenserie als Kombinationen $(2p - m\,\Delta p)$ oder Kombinationsserie. Es scheint indessen zweckmäßiger, sie ebenfalls als Nebenserie zu bezeichnen und sie von den drei

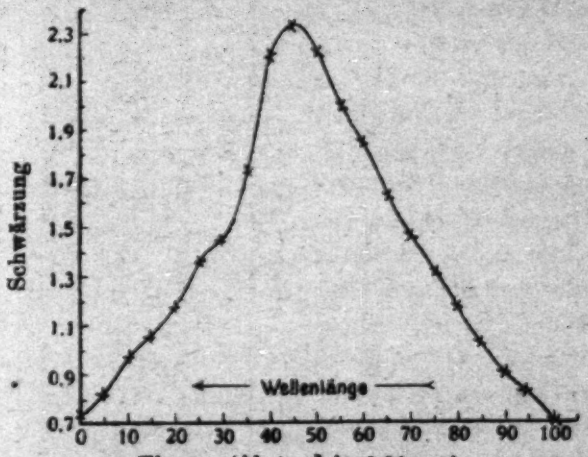


Fig. 1. (Abstand in 0,01 mm)

anderen durch das Beiwort „nahdiffuse" zu unterscheiden. Aus folgenden Gründen: Erstens liegt sie im allgemeinen nahe bei der diffusen Serie, fällt unter Umständen mit ihr zusammen, zweitens ist der Effekt des elektrischen Feldes auf sie von derselben Ordnung wie derjenige auf die diffuse Serie, drittens zeigen dementsprechend ihre Linien angenähert dieselbe Unschärfe wie diejenigen der diffusen Serie.

In Tab. III sind für das zweite und dritte Glied der diffusen und nahdiffusen Nebenserie des Na, Cu und Ag die Wellenlängen und Laufzahlen nach Dunz[2]) zusammengestellt.

1) F. Paschen, Jahrb. d. Rad. u. El. 8. p. 174. 1911.

2) B. Dunz, Bearbeitung unserer Kenntnisse von den Serien. Diss. Tübingen 1911.

Wie aus nebenstehender Tabelle zu ersehen ist, rücken die Linien der nahdiffusen Serie entlang der Reihe Na, Cu, Ag immer näher an die diffusen Linien gleicher Nummer heran und fallen beim Silber mit ihnen jedenfalls angenähert zusammen. Die angeführten Ag-Linien sind also als zusammengesetzte Linien zu betrachten, sie enthalten eine diffuse und eine nahdiffuse Komponente.

Die nahdiffuse Cu-Linie λ 4056,8 wird nun durch ein elektrisches Feld von 23000 Volt × cm^{-1} gemäß Schätzung um 0,4 A *nach kürzeren Wellen verschoben, die nahdiffuse Cu-Linie λ 3688,6* um 0,7 A ebenfalls *nach kürzeren Wellen.* Dieser Umstand und die zusammengesetzte Natur der diffusen Ag-Linien legt die Vermutung nahe, daß deren kurzwellige elektrische Komponenten gemäß Tab. II als die verschobenen Linien oder Komponenten der mit den diffusen Linien zusammenfallenden nahdiffusen Linien zu betrachten sind.

An dem Vorkommen der nahdiffusen Nebenserie bei Na, Cu und Ag kann kein Zweifel bestehen. Gemäß Analogie kann geschlossen werden, daß sie auch bei Li und He vorkommt. In Tab. IV sind für He I und Li die Laufzahlen

Tabelle III.

Glied		Na				Cu				Ag			
		Diffuse Serie		Nahdiffuse Serie		Diffuse Serie		Nahdiffuse Serie		Diffuse Serie		Nahdiffuse Serie	
		Wellenlänge	Laufzahl	Wellenlänge	Laufzahl	Wellenlänge	Laufzahl	Wellenlänge	Laufzahl	Wellenlänge	Laufzahl	Wellenlänge	Laufzahl
2. Glied	I. Komp.	5688,26	6896,92	5675,92	6338,62	4062,94	6920,55	4056,8	6879,35	4212,76	6890,78	4212,76	6891,10
	II. Komp.	5882,90	6897,46	5670,40	6338,62	4022,83	6919,97	4015,8	6879,37	4055,46	6890,30	4055,46	6891,10
3. Glied	I. Komp.	4983,53	4411,48	4976,1	4388,62	3688,60	4418,04	3686,0 [1]	4390,24	3810,86	4393,91	3810,86	4385,48
	II. Komp.	4979,3	4411,65	4973,0	4388,62	3654,60	4418,03	3652,3 [1]	4390,24	3682,45	4393,91	3681,92	4385,48

1) Neu von uns beobachtet und gemessen.

Tabelle IV.

Glied	He I		Li	
	Diff. Serie	Nahdiff. Serie	Diff. Serie	Nahdiff. Serie
2. Glied .	6865,21	6857,31	6862,53	6855,49
3. Glied .	4392,60	4388,13	4389,25	4381,23

der bekannten diffusen Nebenserie und die aus der beobachteten „Bergmannserie" berechneten Laufzahlen der bis jetzt unbekannten nahdiffusen Nebenserie zusammengestellt. Wie man sieht, sind die Laufzahlen der zwei Serien nur wenig verschieden; immerhin ist der Unterschied so groß, daß die Linien der nahdiffusen Serie deutlich getrennt von den diffusen Linien auf ihrer kurzwelligen Seite in 1—3 A Abstand von ihnen erscheinen müßten. Bis jetzt ist indes nur beim Li die nahdiffuse Linie λ 4601,6 neben der diffusen Linie λ 4603,0 (2. Glieder) beobachtet worden. Es ist indes wahrscheinlich, daß die übrigen nahdiffusen Linien sich nur infolge ihrer geringen Intensität bis jetzt der Beobachtung entzogen haben; es ist möglich, daß die Intensität der nahdiffusen Linien ebenso wie diejenige der halbscharfen Linien (3. Nebenserie) im Verhältnis zu derjenigen der diffusen Linien mit wachsender Stärke des elektrischen Feldes, in welchem sie emittiert werden, rasch zunimmt. Ist dies der Fall, dann dürfen wir erwarten, daß im elektrischen Feld auf der kurzwelligen Seite der diffusen He I-, He II- und Li-Linien scheinbare Komponenten dieser Linien auftreten, deren Intensität im Verhältnis zu derjenigen der langwelligen Komponenten dieser Linien mit wachsender Feldstärke zunimmt. Dies ist nun in der Tat bei den diffusen He- und Li-Linien der Fall. Es ist darum wahrscheinlich, daß diese in der Intensität veränderlichen scheinbaren Komponenten der diffusen He- und Li-Linien die diesen benachbarten nahdiffusen Linien darstellen. Eine eingehende Untersuchung über die Abhängigkeit der Lage dieser Linien (Komponenten) von der Feldstärke wird zu entscheiden haben, ob sie für die Feldstärke Null nach dem berechneten Ort der nahdiffusen Linien rücken.

§ 5. *Verbreiterung und Druckverschiebung der untersuchten Linien.* — Schon bei den ersten Untersuchungen[1]) über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien fiel der nahe Zusammenhang zwischen der Größe und dem Vorzeichen dieses Effektes einerseits und der Größe und der Dissymmetrie der Verbreiterung von Linien entlang einer Serie andererseits auf. Dieser Zusammenhang wurde weiter von G. Wendt[2]) und zuletzt von M. Ritter[3]) untersucht, dieser wies insonderheit nach, daß das Vorzeichen der Druckverschiebung von Serienlinien mit dem Vorzeichen des Effektes des elektrischen Feldes auf sie übereinstimmt. Zur Ergänzung dieser Untersuchungen mögen folgende Angaben über diffuse und nahdiffuse Dupletserien dienen.

Die Linien der diffusen Dupletserie von Na und Cu werden gemäß den obigen Ergebnissen durch ein elektrisches Feld nach Rot verschoben. In Übereinstimmung hiermit werden sie durch Erhöhung der Strom- und Dampfdichte dissymmetrisch nach Rot verbreitert. Für das Na-Duplet λ 5688—5683 ist außerdem die Verschiebung durch Druck bekannt; sie ist nach Rot gerichtet.

Die diffuse Ag-Linie λ 3810,9 zeigt im elektrischen Feld nur zwei kurzwellige Komponenten. Übereinstimmend hiermit wird sie durch Erhöhung der Strom- und Dampfdichte dissymmetrisch nach kürzeren Wellen verbreitert wie Fig. 1 ersehen läßt.

Die nahdiffusen Na- und Cu-Linien (2. und 3. Glied) werden durch das elektrische Feld ohne Zerlegung nach kürzeren Wellen verschoben. Dementsprechend erfolgt ihre Verbreiterung dissymmetrisch nach kürzeren Wellen. Es ist zu erwarten, daß sie durch Erhöhung des Druckes nach kürzeren Wellen verschoben werden.

Greifswald, Physik. Institut d. Univ., 10. März 1919.

---

1) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 1040. 1914.
2) G. Wendt, Ann. d. Phys. 45. p. 1257. 1914.
3) M. Ritter, Ann. d. Phys. 59. (Erscheint demnächst.)

(Eingegangen 24. März 1919.)

4. *Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.*
X. Zusammenhang der Serien eines Systems;
von J. Stark.

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Verhältnis der Gruppe der vier Nebenserien zur Balmerschen Wasserstoffserie. — § 3. Das System der Seriengruppen verschiedener Ordnung. — § 4. Beziehungen zur Atomstruktur.

§ 1. *Einleitung.* — Von Beginn der Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien fiel mir seine Abhängigkeit von der Art einer Serie und der Gliednummer einer Serienlinie auf. Ich habe aus diesem Grunde von Anfang an die Untersuchung des neuen Effektes unter den Gesichtspunkt des Serienzusammenhanges gestellt und sie an die bis jetzt vorliegenden Arbeiten über Serien angeschlossen. Dieses systematische Vorgehen hat denn auch Früchte getragen. Einmal wurde nämlich so Material gewonnen für den Vergleich entsprechender Serien, sodann aber wurden vor allem neue Serien aufgefunden,[1]) insofern sie durch das elektrische Feld verstärkt oder erst sichtbar gemacht wurden. Die Auffindung dieser neuen Serien und die Aufdeckung ihres Zusammenhangs mit bereits bekannten Serien setzt uns in den Stand, eine vollständigere Systematik der Serien als bisher zu geben.

§ 2. *Verhältnis der Gruppe der vier Nebenserien zu der Balmerschen Wasserstoffserie.* — Ungefähr in demjenigen Gebiet des Spektrums, in welchem die Balmersche Wasserstoffserie liegt, treten bei Helium (He I und He II) und den Alkalien sowie bei Kupfer und Silber vier Serien auf, welche bis jetzt Nebenserien genannt werden. Es ist die diffuse (erste), scharfe

1) J. Koch, Ann. d. Phys. 48. p. 98. 1915; J. Stark, Ann. d. Phys. 56. p. 577. 1918; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 589. 1918.

(zweite), halbscharfe (dritte) und nahdiffuse (vierte) Serie; bei Cu und Ag ist die halbscharfe Serie bis jetzt noch nicht beobachtet, zweifellos aber auch vorhanden.

Diese vier Serien haben alle dieselbe Endzahl, laufen also an derselben Stelle im Spektrum aus. Diese Gemeinsamkeit koppelt sie zu einer Gruppe zusammen. Es liegt nahe, *nicht eine einzelne der vier Nebenserien, sondern die von ihnen gebildete Gruppe als Ganzes der Balmerschen Wasserstoffserie gegenüberzustellen* und zu folgern, daß die Serie der Frequenzen oder Schwingungsformen, welche in der Balmerschen Serie vertreten sind, durch den Einbau des zugeordneten Systems von Schwingungszentren in ein größeres Atom in eine Gruppe von mindestens vier Serien zerlegt wird.

Diese Auffassung wird gestützt durch den Vergleich des Effektes des elektrischen Feldes in der Wasserstoffserie mit demjenigen in einer der vier Nebenserien. Die Zahl der Frequenzen (Komponenten), in welche eine *H*-Linie durch die deformierende Einwirkung des elektrischen Feldes zerlegt wird, beträgt in den vier ersten Gliedern 7 bis 16. Die Linien der scharfen und halbscharfen Nebenserie dagegen werden überhaupt nicht zerlegt, sondern nur verschoben, das gleiche gilt wahrscheinlich auch von der nahdiffusen Serie, und nur die höheren Glieder der diffusen Nebenserie werden in mehrere Komponenten (2—4) zerlegt. Erst wenn man die Komponenten der Glieder gleicher Nummer für alle vier Serien zusammenzählt, erhält man eine Komponentenzahl von der Ordnung der Komponentenzahl der *H*-Linie gleicher Nummer; sie ist aber immer noch kleiner als diese, so daß man vermuten kann, daß außer der Gruppe der vier Nebenserien noch weitere Serien zu der Gesamtheit zu rechnen sind, welche der Balmerschen Serie als eine Umformung gegenüberzustellen ist.

§ 8. *Das System der Seriengruppen verschiedener Ordnung.* — Wie Ritz[1]) vorausgesagt und Lyman[2]) gefunden hat, besitzt Wasserstoff eine ultraviolette Serie, deren Wellenzahlen sich durch folgende Formel darstellen lassen.

1) W. Ritz, Physik. Zeitschr. 9. p. 524. 1908; Ann. d. Phys. 25. p. 667. 1908.

2) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 19. p. 263. 1904; 23. p. 181. 1906; 43. p. 89. 1916.

$$\frac{1}{\lambda} = N_0 \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right] \quad m = 2, 3, 4 \ldots$$

Aus dieser Serie wird die Balmersche Serie gewonnen, indem an die Stelle von 1 in der Endzahl $1/1^2$ die erste Zahl 2 in der Laufzahl $1/m^2$ tritt:

$$\frac{1}{\lambda} = N_0 \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right] \quad m = 3, 4, 5 \ldots$$

Tritt in die Endzahl die Zahl 3 ein, so ergibt sich die von W. Ritz vorhergesagte, von Paschen[1]) gefundene ultrarote Wasserstoffserie:

$$\frac{1}{\lambda} = N_0 \left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right] \quad m = 4, 5, 6 \ldots$$

Es erscheint sachgemäß, die Wasserstoffserien nach der im Nenner ihrer Endzahl vorkommenden ganzen Zahl zu benennen, also die ultraviolette Serie erste oder Serie erster Ordnung, die Balmersche Serie zweite, die ultrarote Serie dritte oder Serie dritter Ordnung zu nennen.

Wie nun der Balmerschen oder zweiten *H*-Serie mindestens eine Gruppe von vier Nebenserien bei Helium und den Alkalien entspricht, so ist auch der *H*-Serie erster Ordnung im Falle des Heliums (He I und He II) eine Gruppe von vier Serien gegenüberzustellen, nämlich die schon früher bekannte halbscharfe Hauptserie und die diffuse und die scharfe Hauptserie, die erst kürzlich von mir und Liebert im elektrischen Feld aufgefunden wurden. Dazu ist nach meinem Dafürhalten als noch vorhanden die nahdiffuse Hauptserie zu rechnen; sie ist dicht bei der diffusen Hauptserie zu suchen und hat sich bis jetzt wohl nur infolge unzureichender Technik der Beobachtung entzogen. Alle diese vier Serien haben für He I und He II dieselbe Endzahl. Um die Analogie zur ersten *H*-Serie zum Ausdruck zu bringen, möchte ich in Benutzung der Rydbergschen Formel und der Ritz-Paschenschen Bezeichnungsweise für die Darstellung der Wellenzahlen der vier Serien folgende Formeln[2]) vorschlagen.

---

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. p. 566. 1908.

2) Die charakteristischen Konstanten μ, d, Δd, s und h können positives oder negatives Vorzeichen haben.

Serien-gruppe 1. Ordnung

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{diffuse } (d) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(1+\mu)^2} - \frac{1}{(m+d)^2}\right] \\
\qquad = Ez(1,\mu) - Lz(m,d)\ m = 2,\ 3,\ 4\ldots \\
\text{nahdiffuse } (\Delta d)^{1}) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(1+\mu)^2} - \frac{1}{(m+\Delta d)^2}\right] \\
\qquad = Ez(1,\mu) - Lz(m,\Delta d)\ m = 2,\ 3,\ 4\ldots \\
\text{scharfe } (s) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(1+\mu)^2} - \frac{1}{(m+s)^2}\right] \\
\qquad = Ez(1,\mu) - Lz(m,s)\ m = 2,\ 3,\ 4\ldots \\
\text{halbscharfe } (h)^{2}) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(1+\mu)} - \frac{1}{(m+h)^2}\right] \\
\qquad = Ez(1,\mu) - Lz(m,h)\ m = 2,\ 3,\ 4\ldots
\end{array}\right.$$

Dementsprechend läßt sich die *halbscharfe Seriengruppe zweiter Ordnung, die bekannte Gruppe der vier Nebenserien*, in folgender Weise formulieren:

Halbscharfe Seriengruppe 2. Ordnung

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{diffuse } (d) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{(m+d)^2}\right] \\
\qquad = Ez(2,h) - Lz(m,d)\ m = 3,\ 4,\ 5\ldots \\
\text{nahdiffuse } (\Delta d) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{(m+\Delta d)^2}\right] \\
\qquad = Ez(2,h) - Lz(m,\Delta d)\ m = 3,\ 4,\ 5\ldots \\
\text{scharfe } (s) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{(m+s)^2}\right] \\
\qquad = Ez(2,h) - Lz(m,s)\ m = 3,\ 4,\ 5\ldots \\
\text{halbscharfe } (h) \text{ Serie: } \frac{1}{\lambda} = N_0\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{(m+h)^2}\right] \\
\qquad = Ez(2,h) - Lz(m,h)\ m = 3,\ 4,\ 5\ldots
\end{array}\right.$$

Wie diese halbscharfe Seriengruppe zweiter Ordnung ließe sich auch eine diffuse Seriengruppe zweiter Ordnung mit der Endzahl $Ez(2,d)$, eine nahdiffuse $Ez(2,\Delta d)$ und eine scharfe Gruppe $Ez(2,s)$ formulieren. Indes sind die Serien dieser drei Gruppen, ebenso wie die Laufzahlen $Lz(2,d)$, $Lz(2,\Delta d)$ und $Lz(2,s)$ bis jetzt noch unbekannt.

Entsprechend den vier Seriengruppen zweiter Ordnung lassen sich *vier Seriengruppen dritter Ordnung* formulieren. Von

---

1) Paschen und seine Schüler benutzen statt Δd das Zeichen Δp.
2) Paschen und seine Schüler benutzen statt h das Zeichen p.

ihnen ist bis jetzt aus der *diffusen Gruppe* $Ez\,(3, d)$ die halbdiffuse Serie $Ez\,(3, d) - Lz\,(m, \Delta d)$ am meisten bekannt; sie wird von Paschen und seinen Schülern als Bergmannserie bezeichnet. Ferner ist innerhalb dieser diffusen Gruppe dritter Ordnung noch die halbscharfe Serie $Ez\,(3, d) - Lz\,(m, h)$ bei einigen Elementen bekannt.

Ferner sind von den vier Seriengruppen dritter Ordnung beobachtet worden: aus der *halbscharfen Gruppe* $Ez\,(3, h)$ die diffuse Serie $Ez\,(3, h) - Lz\,(m, d)$, aus der *scharfen Gruppe* $Ez\,(3, s)$ die halbscharfe Serie $Ez\,(3, s) - Lz\,(m, h)$.

Gemäß der vorstehenden Darstellung setzt sich *das System der Serien* des Heliums, der Alkalien und des Kupfers *aus Gruppen verschiedener Ordnung* zusammen. *Die Gruppe erster Ordnung besteht aus vier Serien von gleicher Endzahl, aber von vier verschiedenen Reihen von Laufzahlen; diese Gruppe entspricht der ersten Wasserstoffserie* $Ez\,(1, 0) - Lz\,(m, 0)$. *Die Gruppe zweiter Ordnung besteht aus vier Teilgruppen, indem jede der vier ersten Laufzahlen aus der Gruppe erster Ordnung als Endzahl einer besonderen Gruppe mit den vier Reihen der bekannten Laufzahlen zusammentritt; diese Gruppe zweiter Ordnung, insonderheit die halbscharfe Teilgruppe* $Ez\,(2, h)$ *aus ihr entspricht der zweiten (Balmerschen) Wasserstoffserie* $Ez\,(2, 0) - Lz\,(m, 0)$. *Die vier Teilgruppen der Gruppe dritter Ordnung haben die zweiten Laufzahlen der ersten Gruppe als Endzahlen und je die vier Reihen der weiteren Laufzahlen als Laufzahlen; sie entsprechen der dritten Wasserstoffserie* $Ez\,(3, 0) - Lz\,(m, 0)$.

Die vorstehende Systematisierung der Serien umschreibt natürlich im Grunde nur das Rydberg-Ritzsche Kombinationsprinzip. Indes scheint sie mir die Bedeutung der vier Reihen der Laufzahlen $Lz\,(m, d)$, $Lz\,(m, \Delta d)$, $Lz\,(m, s)$ und $Lz\,(m, h)$ zum ersten Male herauszuheben, auch gliedert sie die große Zahl der beobachteten oder möglichen Serien übersichtlich in Gruppen und läßt deren Analogie zu den Wasserstoffserien gleicher Ordnung hervortreten.

§ 4. *Beziehungen zur Atomstruktur.* — Bei der theoretischen Würdigung der *K*- und *L*-Reihe der Röntgenlinien der schwereren Elemente wird die erste Linie der *K*-Reihe öfter der ersten Linie der ersten Wasserstoffserie, die erste Linie der *L*-Reihe der ersten Linie der zweiten (Balmerschen) Wasserstoffserie

gegenübergestellt. Es werden also diese H-Linien in die Reihe der Röntgenlinien (K- und L-Reihe) aufgenommen, oder umgekehrt es werden die K- und L-Reihen der Röntgenlinien der schwereren Elemente als die Serien erster und zweiter Ordnung in Analogie zu den Wasserstoffserien angesprochen.

Angenommen, daß diese Auffassung von den bezeichneten Röntgenlinien richtig ist, so muß man beachten, daß dann den in Betracht kommenden Elementen mindestens noch zwei Serien im Ultraviolett und Sichtbaren eigentümlich sind, welche gemäß den Darlegungen im vorhergehenden Abschnitt zu den Wasserstoffserien erster und zweiter Ordnung in Analogie zu stellen sind. Es sind also dann die K- und L-Reihen der Röntgenlinien und die ultravioletten und sichtbaren Serien der schwereren Elemente wie Na, Cu und Ag jedenfalls nicht in dasselbe Seriensystem aufzunehmen, in welchem etwa die ultravioletten und sichtbaren Serien als Serien hoher Ordnung auftreten.

Bei allen Serien, die bis jetzt untersucht worden sind, bei einfachen Serien, Duplet- und Tripletserien, bei diffusen, nahdiffusen, scharfen und halbscharfen Serien erster und zweiter Ordnung hat sich bis jetzt das Gesetz bewährt, daß der Effekt des elektrischen Feldes auf Serienlinien gemessen in Frequenzänderung entlang der Serie mit steigender Gliednummer zunimmt. Und zwar ist für den Effekt einer Serienlinie entscheidend die Laufzahl der Linie; Linien von derselben Laufzahl aus einer Serie erster und einer Serie zweiter Ordnung weisen denselben Effekt auf.[1]) Freilich mag dieses einfache Gesetz der übereinstimmenden Effekte des elektrischen Feldes darin begründet sein, daß bei den untersuchten Serien die Endzahl $Ez\,(1, \mu)$ in der ersten Ordnung und die Endzahl $Ez\,(2, h)$ in der halbscharfen Gruppe zweiter Ordnung von dem elektrischen Feld nur unmerklich verändert wird, so daß die Änderung der Wellenzahl z. B. $1/\lambda = Ez\,(1, \mu) - Lz\,(5, d)$ lediglich durch die Änderung von Lz gegeben wird. Und es mag die Frequenzänderung einer Linie aus der Serie $Ez\,(4, d) - Ez\,(m, h)$ auch durch eine Änderung von Ez mitbedingt werden. Wie dem

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 56. p. 585. 1918; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 606. 1918.

aber auch sei, es bleibt auf alle Fälle höchst bemerkenswert, daß bei den Serien erster und zweiter Ordnung der Effekt einer Linie ausschließlich durch ihre Laufzahl bestimmt wird.

Diese Erscheinung läßt sich in folgender Weise deuten. Die Emission in einer Frequenz kommt durch eine Koppelung zweier Schwingungsformen zustande, von denen die eine durch die Endzahl, die andere durch die Laufzahl bestimmt wird. Die eine von diesen zwei Schwingungsformen, welche die Laufzahl liefert, wird durch ein elektrisches Feld stärker deformiert als die andere Schwingungsform, umso stärker, je höher die Nummer der Laufzahl ist. Eine und dieselbe Schwingungsform, welche eine Laufzahl liefert, kann mit mehreren anderen Schwingungsformen als Lieferanten von Endzahlen gekoppelt sein; die hierdurch gewonnenen Wellenzahlen müssen dann im Fall der Einwirkung eines elektrischen Feldes als dessen Effekt die Änderung der Schwingungsform der gemeinsamen Laufzahl aufweisen.

Eine andere sehr bemerkenswerte Erscheinung ist die Abhängigkeit des Verhältnisses der Intensitäten der Serien verschiedener Gruppen von der Stärke des elektrischen Feldes. Dieses vermag die Intensität einzelner Serien, so diejenige der halbscharfen Serie [1]) zweiter Ordnung und diejenige der diffusen und scharfen Serie [2]) erster Ordnung im Verhältnis zu anderen Serien so zu verstärken, daß sie überhaupt erst sichtbar werden.

Diese Erscheinung ist natürlich nicht so zu deuten, daß die in den verstärkten Serien emittierte Energie aus dem äußeren elektrischen Feld zugeführt wird. Auch werden wohl nicht infolge der Deformation des Serienträgers durch das elektrische Feld die Schwingungen der verstärkten Serien für die Stoßerregung besser gestellt; denn bei Helium werden die diffuse und scharfe Serie erster Ordnung (Hauptserie) von dem elektrischen Felde erheblich verstärkt, ohne daß dies bei den Serien zweiter Ordnung (Nebenserien), welche dieselben Laufzahlen haben, in merklichem Maße der Fall ist. Auch halte

1) J. Koch, Ann. d. Phys. 48. p. 98. 1915; J. Stark, Ann. d. Phys. 48. p. 210. 1915; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 599, 610. 1918.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 56. p. 577. 1918; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. p. 604. 1918.

ich meine früher[1]) geäußerte Ansicht nicht mehr für richtig, daß die Verstärkung und gleichzeitige Polarisierung einer Serie durch eine Einstellung des dipolartigen Serienträgers im elektrischen Feld bewirkt werde. Es bleiben vielmehr nur die folgenden Deutungsmöglichkeiten übrig.

Entweder mögen den Schwingungszentren verschiedene Wege offenstehen, eine Reihe von Schwingungsformen zu durchlaufen; werden die Schwingungsformen geändert, so mögen sich auch die Bedingungen ändern, von denen das Einschlagen der verschiedenen Wege über Schwingungsformen hinweg abhängt. Oder es mag die Ausstrahlung in gewissen möglichen Frequenzen im nichtdeformierten Zustand eines Serienträgers durch Interferenz stark geschwächt sein; werden dann durch das äußere elektrische Feld die Schwingungsformen und ihre Frequenzen deformiert, so wird die Auslöschung der Ausstrahlung in gewissen Frequenzen zurücktreten und diese werden in der Emission merklich werden. Diese zweite Auffassung läßt auch verstehen, warum eine durch das Feld verstärkte Serie in bezug auf dessen Achse polarisiert sein kann. Es mag eben die Auslöschung der Ausstrahlung nur für Schwingungen von bestimmter Achsenstellung infolge Änderung der Interferenz eintreten.

Greifswald, Physik. Institut d. Univ., 18. März 1919.

---

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 48. p. 228. 1915.

(Eingegangen 24. März 1919.)

5. *Stärke des elektrischen Feldes und Zerlegung der Wasserstofflinien vor der Kathode des Glimmstroms;* *von E. Brose.*

Inhalt: I. *Einleitung, Kritik der Methoden.* § 1. Sondenmethode. — § 2. Kathodenstrahlmethode. — § 3. Methode des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. — II. *Versuchsanordnung.* § 4. Elektrische Methoden. — § 5. Optische Methoden. — III. *Ergebnisse.* § 6. Anlage der Figuren. — § 7. Wert und räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke. — § 8. Räumliche Ladung. — § 9. Bedeutung der Resultate für die Kathodenschichtmethode zur Untersuchung des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.

I. Kritik der Methoden.

§ 1. Sondenmethode.

Die Zahl der Arbeiten, die sich die Untersuchung der interessanten und wichtigen Erforschung des elektrischen Feldes vor der Kathode des Glimmlichts zur Aufgabe stellten, ist sehr groß. Aus der folgenden Beschreibung der einzelnen zu diesem Zwecke angewandten Methoden wird zu ersehen sein, inwieweit die oben angeführte Aufgabe bisher gelöst worden ist.

Zunächst hat man zwei Methoden zu unterscheiden, die grundverschieden voneinander sind, aber beide zur Messung der Potentialverteilung vor der Kathode dienen. Diese sind: 1. die Sondenmethode, 2. die Kathodenstrahlmethode.

Das Prinzip der Sondenmethode beruht darauf, die Spannungsdifferenz zwischen zwei Sonden zu messen, die in verschiedener Entfernung von der Kathode im Hittorf-Crookesschen Dunkelraum angebracht sind. Es werden entweder die Sonden gegen die Elektroden so verschoben, daß ihr Abstand voneinander gleich bleibt, oder die Elektroden werden, z. B. durch magnetische Einwirkung, gegen die Sonden verschoben. Für die Resultate ist das nebensächlich. Man erhält dann

für die aufeinander folgenden Querschnitte die Spannungsdifferenz und kann daraus die Verteilung des Feldes graphisch darstellen.

Schon Hittorf[1]), sowie de la Rue und Müller[2]) bedienten sich dieser Methode. Ihnen kam es indes weniger darauf an, die Feldverteilung im Kathodendunkelraum zu bestimmen, als die Potentialverteilung entlang der ganzen Entladungsbahn zu untersuchen. Was sie fanden, war ein großes Spannungsgefälle im dunkeln Raum im Vergleich zum übrigen Teil der Entladung.

Wichtigere und eingehendere Untersuchungen des Feldes vor der Kathode hat Schuster[3]) vorgenommen. Er kommt zu dem Resultat, daß das Potential im dunklen Raum stetig zunimmt und gibt an, daß es sich für jeden Punkt nach der Formel $v = v_0 (1 - e^{-kx})$ berechnen läßt, wo v_0 den Kathodenfall, k eine Konstante und x die Entfernung von der Kathode bedeutet.

Große Abweichungen vom Schusterschen Gesetz zeigen die Untersuchungen Grahams.[4]) Nach ihm nimmt das Feld vor der Kathode sehr rasch ab, erreicht ein Minimum, nimmt zu bis zu einem Maximum und fällt dann langsam ab. Er spricht von „dunklen Schichten" im Hittorf-Crookesschen Dunkelraum und findet, daß jede dieser Schichten auf der der Anode zugewandten Seite eine positive Ladung, auf der entgegengesetzten eine negative Ladung besitzt. Zeichnet man sich die von Schuster und Graham gefundenen Kurven graphisch auf, so kann man eine Ähnlichkeit nur in dem von der Kathode entfernteren Teil feststellen. Die von Schuster aufgestellte Formel $v = v_0 (1 - e^{-kx})$ kann Graham nach seinen Untersuchungen in unmittelbarer Nachbarschaft der Kathode nicht als begründet annehmen.

In all den soeben angeführten Untersuchungen ist eine Übereinstimmung nur insoweit zu finden, als das Feld im Dunkelraum beträchtliche Stärken annimmt. Über den Verlauf gehen die Angaben der verschiedenen Autoren auseinander.

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 20. p. 743. 1883.
2) De la Rue u. Müller, Phil. Trans. 174. p. 477. 1883.
3) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 47. p. 526. 1890.
4) E. Graham, Wied. Ann. 64. p. 49. 1898.

Um hier eine Klärung zu schaffen, speziell um das sonderbare Minimum der Grahamschen Kurve zu untersuchen, hat Wehnelt[1]) Grahams Versuche wiederholt. Er findet nur dann ein Minimum, wenn die Sondenebene mit der Kathodenebene einen Winkel einschließt, der kleiner als 90° ist. Stand die Sondenebene senkrecht auf der Kathodenoberfläche, so konnte er kein Minimum beobachten. Die Erklärung für das verschiedene Aussehen der Feldkurve bei einerseits geneigter und andererseits zur Kathode senkrecht stehender Sondenebene fand Wehnelt durch Untersuchung der Flächen gleichen Potentials. Mit Hilfe einer beweglichen ebenen Kathode untersuchte er den Potentialverlauf zwischen einer Sonde und dieser Kathode und fand: die Äquipotentialflächen verlaufen durchaus nicht parallel zur Kathode.

Mithin konnten bei geneigter Sondenebene die Sonden einen Minimalwert der Stärke des Feldes geben, während dieses bei richtiger Aufstellung ausgeschlossen war.

Wehnelt hat somit schon einen Fehler, der der Sondenmethode anhaftet, gefunden, es dürften aber noch weitere vorhanden sein, die die Verschiedenheit der Resultate der Untersuchungen der einzelnen Autoren erklären lassen und uns zwingen, der Sondenmethode nur bedingtes Vertrauen entgegen zu bringen. Auf diese Mängel der Sondenmethode mag hier kurz eingegangen sein.

Bei allen angestellten Untersuchungen ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß das Potential der Sonde dasselbe ist, wie das des sie umgebenden Gases. Das ist aber, wie das Folgende zeigt, durchaus nicht der Fall, denn auf der Oberfläche der Sonden sind häufig elektrische Doppelschichten vorhanden, die nicht beseitigt werden können und bei der Messung der Stärke des Feldes störend wirken. Daß die Sonden das Feld beeinflussen, fand Graham selbst. Beim Einführen der Sonden wurde die Länge des Dunkelraums verringert. Das beweist, daß der Wert der Stärke des Feldes durch die Sonden nur ungenau angegeben werden kann.

Ein weiterer Mangel der Sondenmethode ist folgender. Sie versagt bei der Messung in unmittelbarer Nähe der Kathode.

---

1) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 10. p. 542. 1903.

Bringt man die Sonde in größere Nähe als 0,5 mm an die Kathode heran, so werden die Messungen durch die Schattenwirkung der Sonde auf die Kathode derartig beeinflußt, daß von einer Genauigkeit der Messung nicht mehr gesprochen werden kann. Und gerade die Messung in unmittelbarer Nähe der Kathode ist wichtig. Aus dem oben Angeführten kann man verstehen, daß Wehnelt einen Kathodensprung an der Kathodenoberfläche als ungewiß dahinstellt, es war ihm nicht möglich, mit Hilfe der Sonde näher als 0,1 cm an die Kathode heranzugehen.

Die Unzulänglichkeit der Sondenmethode liegt also, um es nochmals kurz hervorzuheben: 1. in der Beeinflussung der elektrischen Strömung im Gase durch die Sonden selbst, 2. daran, daß mit den Sonden nur bis zu einer gewissen Grenze an die Kathode herangegangen werden kann.

In diesen Umständen liegt auch die Verschiedenheit der Resultate Schusters, Grahams und Wehnelts begründet, speziell ist das Minimum der von Graham gefundenen Kurve für die Stärke des Feldes als Folgeerscheinung der Mängel der Sondenaufstellung von Wehnelt erwiesen worden.

Was aus allen bisherigen Betrachtungen hervorgeht, ist das Zunehmen der Stärke des elektrischen Feldes — in Richtung auf die Kathode — bis zu einem beträchtlichen Wert. Wie der Verlauf vor und hinter diesem Wert ist, ist noch ungeklärt und bedarf des genaueren Studiums.

§ 2. Kathodenstrahlmethode.

Zweifel an der Zuverlässigkeit der Sondenmethode hatte auch J. J. Thomson[1]). Um die Fehler dieser Methode zu beseitigen, verzichtete er bei seinen Versuchen auf die Sonden und bestimmte die Stärke des elektrischen Feldes aus der Ablenkung, die ein quer zur Entladungsbahn gesandtes Bündel von Kathodenstrahlen beim Durchgang durch den dunklen Raum in verschiedenen Abständen von der Kathode erleidet.

Bei den Untersuchungen mit Hilfe dieser Methode macht Strachan Angaben über die Stärke des Feldes, stellt aber nichts weiter fest, als daß das Feld im Dunkelraum im Ver-

1) Conduction of Electricity through Gases 2. ed. p. 531.

gleich zum Feld im übrigen Teil der Entladung sehr stark ist. Den genaueren Verlauf des Feldes im Dunkelraum hat erst Aston[1]) festzustellen versucht. Das Prinzip ist das von Thomson angegebene. Aston findet weder Maxima noch Minima der Stärke des Feldes im Kathodendunkelraum. Nach ihm steht die Feldstärke innerhalb des Dunkelraums im linearen Verhältnis zur Entfernung von dem Rande des negativen Glimmlichts.

Aber auch diese mit Hilfe der Kathodenstrahlen ausgeführten Versuche sind nur mit Vorsicht aufzunehmen. Diese Methode bringt auch Störungen in die Entladung und bei ihr sind ebenso anfechtbare Voraussetzungen zu machen wie bei der Sondenmethode. Es ist bereits von Schmidt[2]) erwiesen worden, daß Kathodenstrahlen, die durch das elektrische Feld vor der Kathode geschickt werden, die Stärke des Feldes beträchtlich herabsetzen. Das wird also auch bei der obigen Untersuchung der Fall gewesen sein. Eine weitere Ungenauigkeit wird durch die Ablenkung der Kathodenstrahlen selbst hineingebracht. Infolge der ablenkenden Kraft des elektrischen Feldes auf die querlaufenden Kathodenstrahlen werden diese stets durch mehrere Äquipotentialflächen hindurchgehen. Die Größe der Ablenkung wird uns mithin nur einen mittleren Wert angeben, nicht eine Feldstärke in einem bestimmten Querschnitt vor der Kathode. Daß Aston zu einem linearen Abfall des Feldes gekommen ist, liegt daran, daß er stets mit großem Dunkelraum und einer Röhre gearbeitet hat, deren Durchmesser weit größer war als die maximale Länge des Dunkelraums. Ihr Durchmesser betrug 12 cm. Ein weiterer Mangel der Kathodenstrahlmethode, der sich auch bereits bei den Astonschen Versuchen fühlbar machte, war die Tatsache, daß die Kathodenstrahlen nur von einer gewissen Länge des Dunkelraums an verwandt werden konnten. So konnte Aston bei Benutzung der Röhre von 12 cm Durchmesser nicht unter eine Dunkelraumlänge von weniger als 3 cm heruntergehen, weil dann keine passenden Kathodenstrahlen mehr zu erzeugen waren.

Was also die Kathodenstrahlmethode fehlerhaft macht, ist

1) A. W. Aston, Proc. Roy. Soc. A. 84. p. 526. 1911.
2) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 12. p. 631. 1903.

erstens, daß man aus der Ablenkung des Kathodenstrahls nie den genauen Wert der Feldstärke in dem zu untersuchenden Querschnitt ermitteln kann und zweitens, daß die Strömung infolge der Ionisation durch die Kathodenstrahlen wesentlich beeinflußt wird.

Immerhin hat auch die Kathodenstrahlmethode in Übereinstimmung mit der Sondenmethode gezeigt, daß vor der Kathode im Dunkelraum im Vergleich mit der übrigen Entladungsbahn eine beträchtliche Stärke des Feldes vorhanden ist.

§ 3. Methode des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.

Eine Methode, die die Fehler der Sonden- und Kathodenstrahlmethode völlig ausschließt, mit deren Hilfe man zudem eingehend den Verlauf des elektrischen Feldes im Dunkelraum studieren kann, liefert der Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.

Stark und Kirschbaum[1]) haben eingehende Untersuchungen gemacht, um die Funktion zu finden, die Feldstärke und Spektrallinienzerlegung miteinander verbindet. Die Untersuchungen ergaben, daß die Serienlinien des Wasserstoffs symmetrisch zur unzerlegten Linie in parallel zum Feld und senkrecht zum Feld schwingende Komponenten zerlegt werden, und daß der Abstand der Komponenten auf den zwei Seiten der unzerlegten Linie proportional der Stärke des elektrischen Feldes ist.

Wenn man auf den Spalt eines Spektrographen das Bild des Kathodendunkelraums einer zu ihm parallelen Wasserstoffröhre wirft, so kann die photographisch festgehaltene Zerlegung direkt die Stärke des elektrischen Feldes in den zugehörigen Entfernungen von der Kathode ergeben.

A. Lo Surdo[2]) hat Versuche in dieser Richtung gemacht. Seine Untersuchungen sind indes wenig eingehend und fast nur qualitativer Natur. Er findet, daß die Zerlegung der Linie H_γ sich ungefähr durch eine Y-Figur darstellen läßt,

1) J. Stark und H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 988. 1916.

2) A. Lo Surdo, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vol. XXIII. serie 5ª fasc. 4°. 1914. A. Lo Surdo, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vol. XXIII serie 5ª fasc. 5°. 1914.

dabei gibt der Umriß der Figur die äußeren parallel zum Feld schwingenden Komponenten wieder, und der Vereinigungspunkt der beiden seitlichen Äste gibt die Grenze des Dunkelraums gegen das negative Glimmlicht an. Genauere Angaben über die Form der Äste macht Lo Surdo nicht, er begnügt sich damit festzustellen, daß der Abfall des Feldes annähernd als linear zu betrachten ist, daß sich der mittlere Wert der Stärke des elektrischen Feldes ergibt, wenn man den gesamten Kathodenfall durch die Entfernung von der Kathode bis zur Grenze des dunklen Raumes dividiert, und daß das Minimum der Feldstärke in der Nähe der Kathode das Doppelte dieses mittleren Wertes beträgt.

Auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. J. Stark führte ich die Untersuchung der Stärke und des Verlaufs des elektrischen Feldes mit Hilfe des Effektes des elektrischen Feldes auf die Spektrallinien an der Linie H_γ quantitativ durch.

II. Versuchsanordnung.

§ 4. Elektrische Methoden.

Die verwendeten Röhren waren zylindrisch. Die Dicke der Wände wurde wegen starker Erwärmung vor der Kathode zu 2 mm gewählt. Um die Erwärmung der Wandungen während der Versuche möglichst herabzusetzen, wurde die Röhre mit fließendem Wasser gekühlt.

Anode wie Kathode bestanden bei allen Versuchen aus Aluminium. Es wurde dieses Metall gewählt, weil es erfahrungsgemäß während der Entladung nur sehr wenig zerstäubt und weil seine Spektrallinien nicht in der Nähe von H_γ liegen. Die Anode war ein einfacher Aluminiumstab, die Kathode hatte eine ebene blank polierte Stirnfläche. Ihr Durchmesser wurde so gewählt, daß sie die Röhre möglichst ausfüllte, jedoch stets einen geringen, 0,1 mm großen Abstand von der Wand hielt.

Es wurden die Untersuchungen nacheinander mit Hilfe dreier verschieden weiter Röhren ausgeführt. Bei den Messungen wurden der Reihe nach in jeder Röhre verschiedene Dunkelraumlängen gewählt. Zu ihrem Betrieb diente Gleichstrom. Der Strom zwischen den Elektroden wurde bei der Röhre vom

Durchmesser 9,4 mm mit Hilfe einer Hochspannungsdynamo von 3500 Volt hergestellt. Als Stromquelle für die Röhren vom Durchmesser 4,6 mm und 2,7 mm diente eine Hochspannungsdynamo von 3500 Volt und eine Akkumulatorenbatterie von 800 Volt.

Die folgenden Tabellen I, II, III geben die Reihenfolge der Aufnahmen und der Versuchsbedingungen wieder, unter denen sie zustande kamen. Dabei entstammt Tabelle I den Versuchen, die mit einer Röhre vom Durchmesser 9,4 mm, Tabelle II den Versuchen, die mit einer Röhre vom Durchmesser 4,6 mm, Tabelle III den Versuchen, die mit einer Röhre vom Durchmesser 2,7 mm gemacht wurden.

Tabelle I.

Röhrendurchmesser 9,4 mm.

Dunkelraumlänge in mm	Stromstärke in 10^{-3} Amp.	Kathodenfall in Volt	Belichtungsdauer in Min.	Aufnahme
12	0,2	3000	60	1
5	16—12	2500	2	2
4—3½	25—20	2300	1	3
3	35—30	2000	1	4
2	50—45	1800	4/6	5
1	60—50	1200	1/3	6

Tabelle II.

Röhrendurchmesser 4,6 mm.

Dunkelraumlänge in mm	Stromstärke in 10^{-3} Amp.	Kathodenfall in Volt	Belichtungsdauer in Min.	Aufnahme
5	2,5	3500	15	7
4	4,5	3300	4	8
2	22—18	1800	6	9

Tabelle III.

Röhrendurchmesser 2,7 mm.

Dunkelraumlänge in mm	Stromstärke in 10^{-3} Amp.	Kathodenfall in Volt	Belichtungsdauer in Min.	Aufnahme
4,5	0,6	4300	120	10
3	4—6	4000	6	11

§ 5. Optische Methoden.

Sämtliche Aufnahmen wurden mit einem Glasspektrographen gemacht, der von Stark[1]) an anderer Stelle eingehend beschrieben ist. Seine Dispersion bei H_γ betrug 1:12 mm:Å. Die Kathode und der Dunkelraum wurden mit Hilfe eines Zeiss-Tessars, unter Verkleinerung auf die Hälfte, auf den Spalt abgebildet.

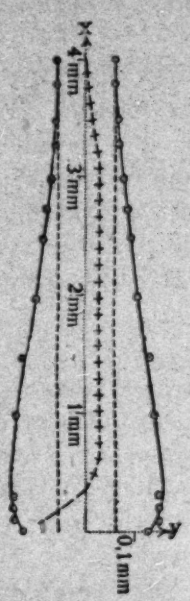
Unter den in den Tabellen I, II, III angegebenen Bedingungen zeigten die Platten die Linie H_γ gut zerlegt. Wie schon früher erwähnt, geben die Linien direkt die Verteilung des Feldes entlang der Strombahn und da die Gesetzmäßigkeit besteht, daß der Abstand der äußeren Komponenten proportional der ersten Potenz der Feldstärke ist, kann man aus dem Abstand der Komponenten die Stärke des Feldes berechnen.

Die Ausmessungen wurden einzig und allein auf die äußeren parallel zum Feld schwingenden Komponenten beschränkt.

Zur Ausmessung des Abstandes der abgelenkten äußeren Komponenten voneinander diente ein Meßmikroskop mit Kreuztischen. Sie geschah in folgender Weise. Mit großer Sorgfalt wurde die Platte so unter das Mikroskop gebracht, daß die deutlich sichtbare unzerlegte Linie in der Bewegungsachse des einen Tisches lag. Von selbst lag dann die senkrecht dazu stehende Achse, also auch das Bild der Kathodenoberfläche, in der Bewegungsachse des anderen Tisches. Die richtige Einstellung wurde mit Hilfe eines Fadenkreuzes kontrolliert, das im Okular angebracht war, und dessen senkrecht aufeinander stehende Fäden parallel den Bewegungsachsen des Tisches verliefen. Bei einer Verschiebung des einen Tisches mußte die unzerlegte Linie sich längs dem einen Faden bewegen. Gemessen wurde entlang der zerlegten Linie, in der Nähe der Kathode von 0,1 mm zu 0,1 mm, in größerer Entfernung von 0,2 mm zu 0,2 mm. Die Verschiebung der zwei zueinander senkrecht stehenden Tische geschah mittels Schrauben von genau $^1/_2$ mm Steighöhe. Mit der Schraube war eine Trommel fest verbunden. Ein Intervall der Trommelteilung entspricht einer Verschiebung des Tisches um 0,01 mm.

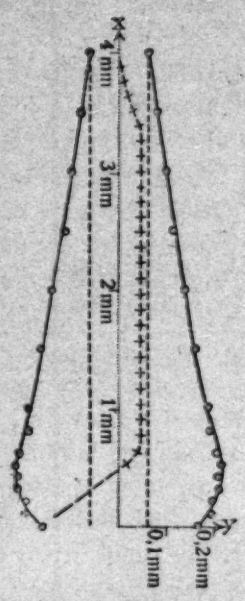
1) J. Stark, Ann. d. Phys. 40. p. 508. 1913.

Die Verschiebungen beider Tische dienten mithin als Koordinaten für die einzelnen Punkte der zerlegten äußeren Komponenten. Die Messungen wurden vor- und rückwärts mehrere Male wiederholt, um so die Ablenkungen möglichst genau bestimmen zu können.



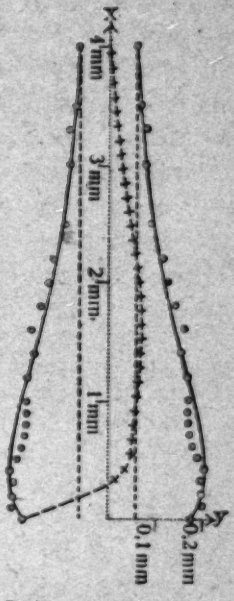
Röhrendurchm. 9,4 mm
Dunkelraum 12 mm

Fig. 1.



Röhrendurchm. 9,4 mm
Dunkelraum 5 mm

Fig. 2.



Röhrendurchm. 9,4 mm
Dunkelraum 4—3½ mm

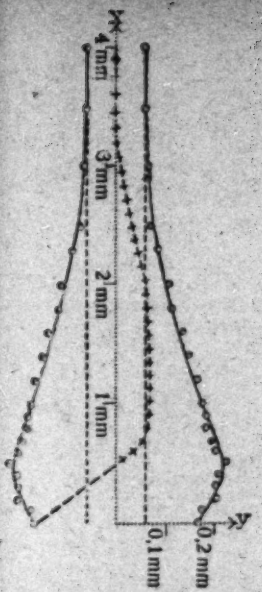
Fig. 3.

III. Ergebnisse.

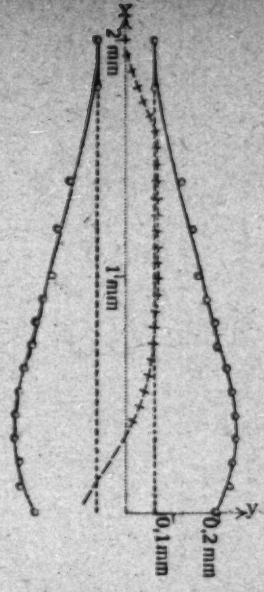
§ 6. Anlage der Figuren.

Durch Bestimmung der Entfernung von der Kathode und der Entfernung von der Mitte der unzerlegten Linie H_7 wurden mithin Punkte für die äußeren parallel zum Feld schwingenden Komponenten erhalten. Durch interpolatorische Verbindung der so gefundenen Punkte entstanden Kurven, die in den folgenden Figuren durch die ausgezogenen Linien angedeutet sind.

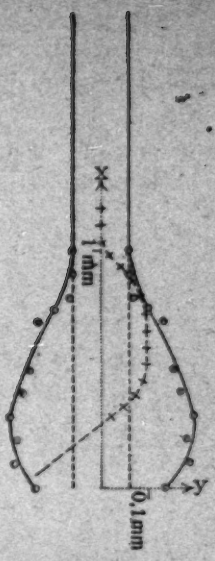
Die Figg. 1 bis 6 sind erhalten mittels der Röhre vom Durchmesser 9,4 mm, die Figg. 7 bis 9 mittels der Röhre vom Durchmesser 4,6 mm und die Figg. 10 und 11 mittels der Röhre vom Durchmesser 2,7 mm. Die näheren Versuchs-



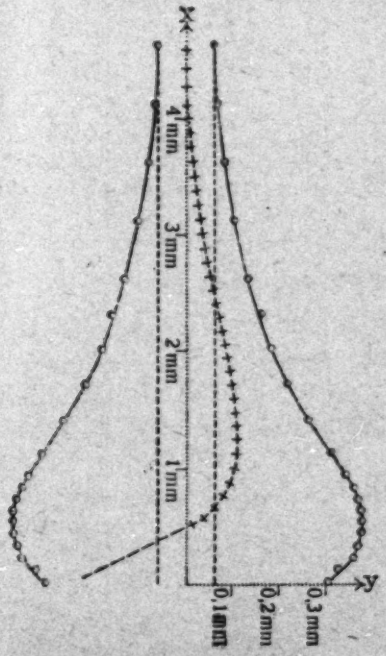
Röhrendurchm. 9,4 mm
Dunkelraum 3 mm
Fig. 4.



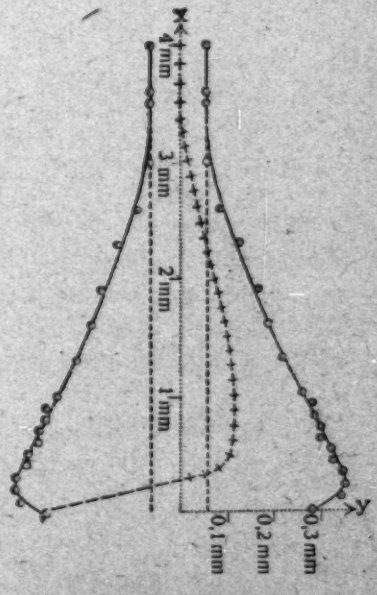
Röhrendurchm. 9,4 mm
Dunkelraum 2 mm
Fig. 5.



Röhrendurchm. 9,4 mm
Dunkelraum 1 mm
Fig. 6.

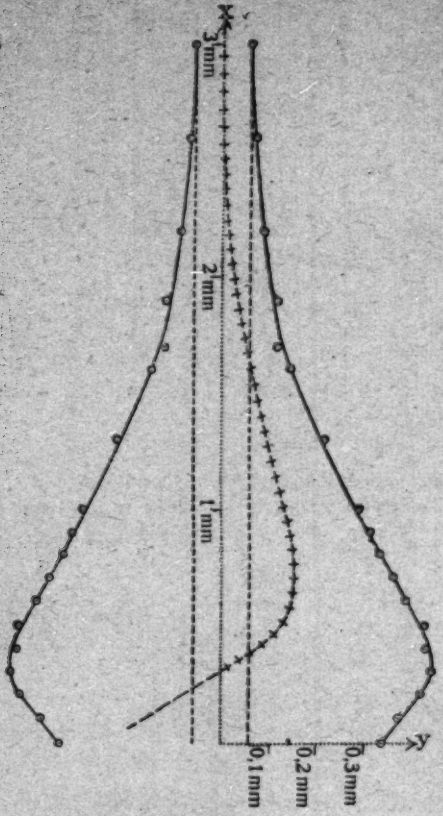


Röhrendurchmesser 4,6 mm
Dunkelraum 5 mm
Fig. 7.

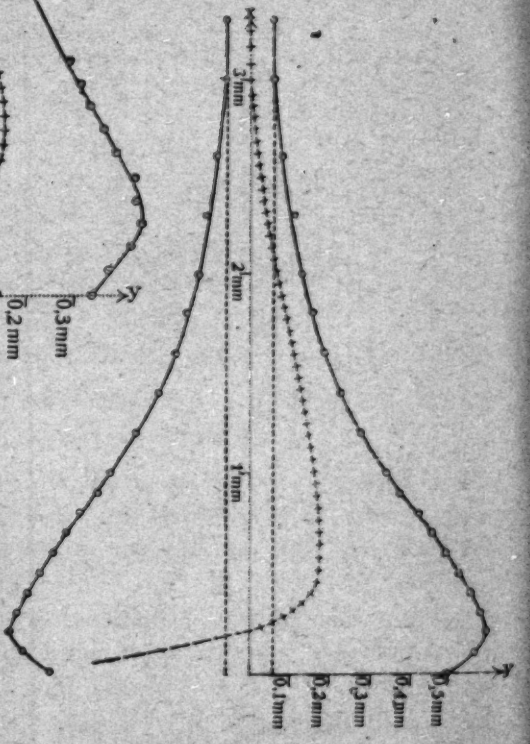


Röhrendurchmesser 4,6 mm
Dunkelraum 4 mm
Fig. 8.

bedingungen sind aus den Tabellen I, II und III zu ersehen. Die punktierten Geraden in den Figuren geben die Bewegungsachsen der Meßtische an. Die eine stellt also, da die Linie H_y, bzw. die Kathode parallel zu ihnen steht, die Achse der Strombahn, die andere die Oberfläche der Kathode dar. Die beiden Geraden werden als Koordinatenachsen für die Figuren genommen, die erste sei die x-, die andere die y-Achse. Die eingezeichneten Pfeile geben die positive Richtung an. Um einen Überblick über den Abstand des Randes der äußeren Komponenten von dem Rand der unzerlegten Linie zu gewinnen, ist in sämtlichen Figuren



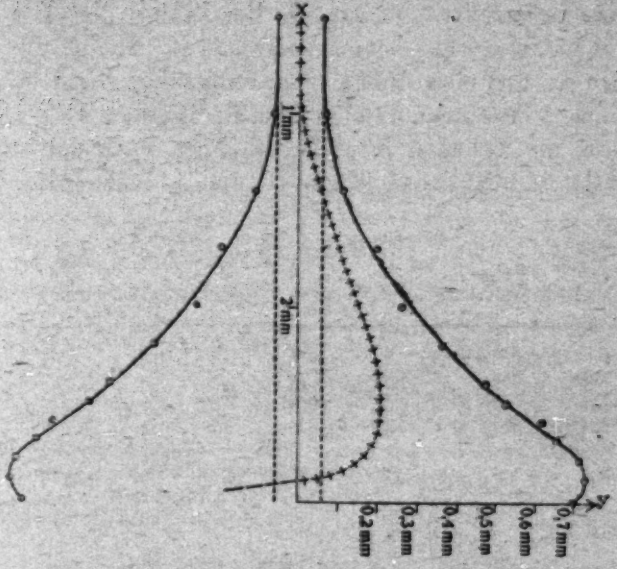
Röhrendurchmesser 4,6 mm
Dunkelraum 2 mm
Fig. 9.



Röhrendurchmesser 2,7 mm, Dunkelraum 4,5 mm
Fig. 10.

die Breite der unzerlegten Linie H_γ durch gestrichelte Linien angedeutet.

Bei Einführung obiger Koordinatenachsen zeigen die Figuren aber nicht allein ein Bild der zerlegten Linie, sondern sind gleichzeitig Kurven, die uns die Feldstärke $\mathfrak{E} = -\partial v/\partial x$ für



Röhrendurchmesser 2,7 mm Dunkelraum 3 mm

Fig. 11.

die aufeinander folgenden Querschnitte angeben. Aus der Kurve für $\partial v/\partial x$ ist dann eine weitere Kure für $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}$ entlang der x-Achse bestimmt und in dieselben Figuren, unter Zugrundelegung der obigen Koordinatenachsen eingetragen worden, und zwar ist sie in ihrem links von der x-Achse liegenden Teil durch $-$, in ihrem rechten Teil durch $+$-Vorzeichen angedeutet.

§ 7. Wert und räumlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke.

Die ausgezogenen Kurven, betrachtet als Kurven für die Verteilung des elektrischen Feldes im Kathodendunkelraum, erlauben unter Zuhilfenahme der linearen Beziehung von äußerem Komponentenabstand und Feldstärke eine Berechnung

der Stärke des Feldes entlang dem Dunkelraum. Der größte Teil der Lichtemission kommt aus einem engen Zylinder rings um die Achse der Strombahn. Innerhalb dieses Zylinders können die Äquipotentialflächen als Ebenen betrachtet werden. Die Zerlegung der Linie H_γ liefert somit den Verlauf der Feldstärke entlang der Achse der Strombahn. Die Krümmung der Niveauflächen in der Nähe der Glaswand kann sich nicht störend bemerkbar machen. In den Tabellen IV—XIV ist für eine Reihe von Fällen die Feldstärke in Volt $\times$ cm^{-1} berechnet. Dabei sind die Tabellen IV—IX den Figg. 1—6, die Tabellen X—XII den Figg. 7—9 und die Tabellen XIII und XIV den Figg. 10 und 11 zuzuordnen.

Tabelle IV.

Röhrendrrchmesser 9,4 mm, Dunkelraum 12 mm.

Abstand v. d. Kath. in mm	0,1	0,3	1	2	3	4
Abstand der äußeren p-Komponente in mm . . .	0,3	0,32	0,29	0,22	0,17	0,12
Abst. auf d. äuß. Komp. in Å	3,6	3,8	3,5	2,6	2,0	1,4
Zugehör. Feldstärke in Volt cm^{-1}	7500	7900	7300	5400	4200	2900

Tabelle V.

Röhrendurchmesser 9,4 mm, Dunkelraum 5 mm.

Abstand v.d.Kathode in mm	0,1	0,3	0,5	0,8	1	2	3	4
Abstand d. äußeren p-Komponente in mm	0,38	0,42	0,43	0,39	0,37	0,27	0,20	0,12
Abstand d. äußeren p-Komponente in Å	4,6	5,0	5,2	4,7	4,4	3,2	2,4	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	9600	10400	10800	9800	9200	6700	5000	2900

Tabelle VI.

Röhrendurchmesser 9,4 mm, Dunkelraum 4—3 $^1/_2$ mm.

Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,3	0,8	1,2	2	3	4
Abstand der äußeren p-Komponente in mm.	0,38	0,41	0,38	0,34	0,23	0,20	0,12
Abstand der äußeren p-Komponente in Å	4,6	4,9	4,6	4,1	2,8	1,9	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	9600	10200	9600	8600	5800	4000	2900

Tabelle VII.

Röhrendurchmesser 9,4 mm, Dunkelraum 3 mm.

Abstand v. d. Kath. in mm	0,1	0,3	0,5	0,8	1,2	2	3	4
Abstand d. äußer. p-Komponente in mm	0,38	0,43	0,45	0,40	0,34	0,21	0,13	0,12
Abstand d. äußer. p-Komponente in Å	4,6	5,2	5,4	4,8	4,1	2,5	1,6	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	9600	10800	11200	10000	8600	5200	3300	2900

Tabelle VIII.

Röhrendurchmesser 9,4 mm, Dunkelraum 2 mm.

Abstand von der Kathode in mm	0,1	0,35	0,5	1	2
Abstand d. äußer. p-Kompon. in mm	0,43	0,46	0,44	0,32	0,12
Abstand d. äußer. p-Kompon. in Å	5,2	5,5	5,3	3,8	1,4
Zugehör. Feldstärke in Volt cm^{-1}	10800	11400	11000	7900	2900

Tabelle IX.

Röhrendurchmesser 9,4 mm, Dunkelraum 1 mm.

Abstand von der Kathode in mm	0,1	0,25	0,5	1
Abstand v. d. äußeren p-Komponente in mm	0,36	0,40	0,33	0,12
Abstand v. d. äußeren p-Komponente in Å	4,3	4,8	4,0	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1} . . .	9000	10000	8300	2900

Tabelle X.

Röhrendurchmesser 4,6 mm, Dunkelraum 5 mm.

Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,3	0,5	0,8	1,4	2	3	4
Abstand d. äuß. p-Komponente in mm . . .	0,65	0,72	0,75	0,70	0,52	0,36	0,15	0,12
Abstand d. äuß. p-Komponente in Å	7,8	8,6	9,0	8,4	6,2	4,3	1,8	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	16300	17900	18800	17500	12900	9000	3800	2900

Tabelle XI.

Röhrendurchmesser 4,6 mm, Dunkelraum 4 mm.

Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,25	0,5	1	2	3	4
Abstand d. äuß. p-Komp. in mm	0,66	0,70	0,65	0,52	0,30	0,14	0,12
Abstand d. äußer. p-Kom. in Å	7,9	8,4	7,8	6,2	3,6	1,7	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	16500	17500	16300	12900	7500	3600	2900

Tabelle XII.

Röhrendurchmesser 4,6 mm, Dunkelraum 2 mm.

Abstand von der Kathode in mm	0,1	0,3	0,5	1	2	3
Abstand d. äußer. p-Kompon. in mm	0,76	0,90	0,84	0,57	0,22	0,12
Abstand d. äußeren p-Kompon. in Å	9,1	10,8	10,1	5,8	2,6	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	18900	22500	21100	21100	5400	2900

Tabelle XIII.

Röhrendurchmesser 2,7 mm, Dunkelraum 4,5 mm.

Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	3	4
Abstand d. äuß. p-Komponente in mm . . .	1,15	1,22	1,05	0,70	0,42	0,28	0,12	0,12
Abstand d. äuß. p-Komponente in Å	13,8	14,6	12,6	8,4	5,0	3,4	1,4	1,4
Zugehörige Feldstärke in Volt cm^{-1}	28800	30400	26300	17500	10400	7100	2900	2900

Tabelle XIV.

Röhrendurchmesser 2,7 mm, Dunkelraum 3 mm.

Abstand v. d. Kathode in mm	0,05	0,1	0,3	0,6	1	2	3
Abst. d. äuß. p-Komp. in mm	1,44	1,46	1,32	0,92	0,54	0,14	0,12
Abstand d. äuß. p-Komp. in Å	17,3	17,5	15,8	11,0	6,5	1,7	1,4
Zugehör. Feldst. in Volt cm^{-1}	36000	36400	32900	22900	13600	3600	2900

Die größte erhaltene Feldstärke beträgt annähernd 36500 Volt $\times$ cm^{-1}. Stärkere Felder brauchten nicht verwendet zu werden, da sich die Untersuchungen einzig und allein auf die in der Grobzerlegung sich zeigenden äußeren p-Komponenten beschränkten und bereits eine Feldstärke von 8000 Volt $\times$ cm^{-1} eine gut meßbare Zerlegung zeigte. Sowohl aus den Figuren wie aus den zugehörigen Tabellen für die *Feldstärke* ist zu ersehen, *daß diese vor der Kathode einen erheblichen Wert hat, von ihr weg bis zu einem Höchstwert zunimmt, und dann gegen die negative Glimmschicht auf einen sehr kleinen Wert fällt.* Dieser kleinste meßbare Wert wurde bei Versuchen mit längeren Dunkelräumen bereits im Dunkelraum erreicht. An und für sich zeigen sämtliche Kurven einen ähnlichen Verlauf. Prinzipiell ändert eine Verkürzung des Dunkelraums nichts an dem Verlauf des Feldes, nur steigen die Kurven bei Verkürzung des Dunkelraums nach ihrem Höchst-

werte zu schneller an, es wächst das Feld stets am raschesten in der Nähe der Kathode, am langsamsten an der Grenze des Kathodendunkelraums.

Es ist interessant festzustellen, in welcher Entfernung von der Kathode bei den einzelnen Aufnahmen sich der höchste Wert der Feldstärke befand. Der besseren Übersicht halber sind die Werte aus den vorhergehenden Tabellen herausgenommen und in der nachfolgenden Tabelle XV zusammengestellt.

Tabelle XV.

	Röhrenweite 9,4 mm						Röhrenweite 4,6 mm			Röhrweite 2,7 mm	
Dunkelraum in mm . .	12	5	4—3½	3	2	1	5	4	2	4,5	3
Abstand der Punkte höchst. Feldstärke v. der Kathode in mm	0,3	0,5	0,3	0,5	0,35	0,25	0,5	0,25	0,3	0,2	0,1

Sie zeigt, daß *der Abstand des Höchstwertes der Feldstärke für ein und dieselbe Röhre nur wenig mit steigendem Druck, also abnehmendem Kathodendunkelraum sich ändert, ferner, daß der Höchstwert sehr nahe an der Kathode liegt.*

Greift man nochmals auf das zurück, was über die Sondenmethode und ihre Unzulänglichkeit für die Messung des elektrischen Feldes im Dunkelraum gesagt worden ist, so sieht man aus der obigen Tabelle eine Bestätigung dafür, daß die Sondenmethode das Maximum der Feldstärke nicht auffinden konnte. Denn es liegt dicht vor der Kathode in 0,1—0,5 mm Abstand von ihr. Wehnelt selbst sagt, daß er bei seinen Untersuchungen nur bis 0,1 cm an die Kathode herangehen durfte, weil in größerer Nähe die Sonde durch elektrostatische Anziehung in Schwingungen geriet und gegen die Kathode stieß. Obige Tabelle zeigt, daß selbst bei den günstigsten Versuchsbedingungen das Maximum nie in den Bereich der Sonde kommen würde.

Vergleicht man fernerhin die Höchstwerte der Feldstärke in den verschiedenen Röhren bei der gleichen Dunkelraumlänge, so findet man, daß der Abstand des Höchstwertes der

Feldstärke für dieselbe Kathodendunkelraumlänge in engeren Röhren kleiner ist als in weiten Röhren. Aus Tabelle XVI ist das leicht zu ersehen.

Tabelle XVI.

	Röhrenweite 9,4 mm			Röhrenweite 4,6 mm		Röhrenweite 2,7 mm	
Länge des Kathodendunkelraums in mm	$3^1/_2$—4	3	2	4	2	$4^1/_2$	3
Abstand des Wertes höchster Feldstärke v. d. Kath. in mm	0,3	0,5	0,35	0,25	0,3	0,2	0,1

Bei einer Betrachtung des Gebietes der Kurve, das von dem Querschnitt größter Feldstärke bis zum negativen Glimmlicht reicht, findet man, daß *bei großen Dunkelraumlängen* (Figg. 1, 2, 3, 7, 8) *mit Zunahme des Abstandes von der Kathode die Feldstärke angenähert linear abfällt, während bei kleinen Dunkelräumen die Abnahme des Feldes rascher als linear erfolgt.* Es kommt also der Fall vor, den Aston untersucht hat, daß nämlich bei großer Dunkelraumlänge die Feldstärke von dem Höchstwerte an linear abfällt. Es kommt aber auch, in dem Teil der Kurve vom Höchstwert bis zur negativen Glimmschicht, der Fall vor, den Schuster und Wehnelt gefunden haben, daß nämlich bei kleinen Dunkelraumlängen der Abfall nicht mehr linear erfolgt, sondern in einer Kurve, die gegen die x-Achse konvex ist. Für dieses Gebiet kann man die Näherungsformel von Schuster $V_x = V_0\,(1 - e^{-kx})$ als berechtigt annehmen. Für das Gebiet von der Kathode bis zum Querschnitt größter Feldstärke gilt die Formel nicht, denn nach Schuster müßte hier $dV/dx = V_0 k$ sein, also die Feldstärke bis zur Kathode weiter anwachsen, was in Widerspruch mit der oben festgestellten Wirklichkeit steht.

§ 8. Räumliche Ladung.

Die diskutierten Kurven geben nicht nur einen Überblick über den Verlauf des elektrischen Feldes, sie gestatten auch, Aussagen über die räumlichen Ladungen zu machen. Da die Äquipotentialflächen aus den früher angeführten Gründen

als eben in der Nähe der Rohrachse betrachtet werden können, vereinfacht sich die Poissonsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho$$

auf die Form

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -4\pi\varrho.$$

Hieraus folgt zunächst, daß man sich aus der Kurve für $\mathfrak{E} = dV/dx$ die Kurve für

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dx} = -\frac{d^2 V}{dx^2}$$

graphisch aufzeichnen kann. So sind in sämtlichen Figuren entlang der x-Achse und zwar senkrecht zu ihr die Werte für $d\mathfrak{E}/dx$ aufgetragen und interpolatorisch verbunden worden. Dabei entspricht in dem gewählten Maßstab dem Werte $d\mathfrak{E}/dx = 1$ eine Strecke von 2 cm. Die so gefundenen Kurven sind auch gleichzeitig als Ladungskurven aufzufassen. In dem Gebiet, in welchem ϱ positiv ist, ist die Kurve mit positiven Zeichen, im negativen mit negativen Zeichen eingetragen.

Wie die Figuren erkennen lassen, *liegt unmittelbar vor der Kathode immer eine Schicht mit negativer Ladung, sie fällt bis zum Querschnitt größter Feldstärke auf den Wert Null. Vom Querschnitt größter Feldstärke ab bis zum negativen Glimmlicht ist der Dunkelraum positiv geladen. Die positive Ladung steigt schnell auf ein Maximum an und fällt dann allmählich auf einen sehr kleinen Wert.*

Wie die Figuren ohne weiteres zeigen, *ist die gesamte positive Ladung ($\int \varrho\, dx$) immer größer als die negative Ladung unmittelbar vor der Kathodenoberfläche.* Das Verhältnis der gesamten positiven Ladung zur gesamten negativen Ladung für die einzelnen Aufnahmen wurde durch graphische Integration ermittelt und in der folgenden Tabelle XVII zusammengestellt. Da die graphische Methode nur angenäherte Kurven gibt, können die in der Tabelle angegebenen Zahlen auch nur als Näherungswerte angesehen werden. Jedenfalls ist aber aus ihnen zu ersehen, daß mit zunehmendem Druck, also abnehmendem Dunkelraum, die positive Ladung immer größer wird.

Tabelle XVII.

	Röhrenweite 9,4 mm				Röhrenw. 4,6 mm		Röhrenw. 2,7 mm	
Dunkelraumlänge	12	4—3½	3	1	5	2	4,5	3
Verhältnis der pos. Ladung zur negativ. Ladung = 1	3	6	3	4	4	5	6	17

Es ist interessant, die räumlichen Ladungsdichten für die einzelnen Aufnahmen zu verfolgen. Die Resultate geben die folgenden Tabellen XVIII bis XXVIII.

Tabelle XVIII.

Röhrendurchmesser 9,4 mm, Dunkelraumlänge 12 mm							
Abstand von der Kathode in mm	0,1	0,2	0,3	0,7	2,8	3,5	4
ϱ in statischen Einheiten	−17	−7	0	5	5	2,5	0

Tabelle XIX aus Fig. 2.

Röhrenweite 9,4 mm, Dunkelraum 5 mm							
Abstand von der Kathode in mm	0,2	0,5	0,8	2	3	3,5	4
ϱ in statischen Einheiten	−17	0	8,5	8,5	8,5	5	0

Tabelle XX aus Fig. 3.

Röhrenweite 9,4 mm, Dunkelraum 4—3½ mm										
Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,2	0,3	1	1,4	1,9	2,1	2,6	3	4
ϱ in statischen Einheiten . . .	−17	−8,5	0	10	12	12	10		5	0

Tabelle XXI aus Fig. 4.

Röhrenweite 9,4 mm, Dunkelraum 3 mm										
Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,8	2,2	3	3,2
ϱ in statischen Einheiten . . .	−24	−17	−8	0	7	12	12	9	2	0

Tabelle XXII aus Fig. 5.

Röhrenweite 9,4 mm, Dunkelraum 2 mm									
Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,25	0,35	0,7	0,8	1,4	1,7	1,8	2
ϱ in statischen Einheiten . . .	−28	−10	0	20	23	23	17	7	0

Tabelle XXIII aus Fig. 6.

Röhrenweite 9,4 mm, Dunkelraum 1 mm								
Abstand von d. Kathode in mm	0,05	0,2	0,25	0,4	0,5	0,7	0,9	1
ϱ in statischen Einheiten	−47	−13	0	27	33	33	20	0

Tabelle XXIV aus Fig. 7.

Röhrenweite 4,6 mm, Dunkelraum 5 mm									
Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,3	0,5	0,9	1	15	1,7	2	3	4
ϱ in statischen Einheiten . . .	−34	−17	0	17	19	19	17	12	7	0

Tabelle XXV aus Fig. 8.

Röhrendurchmesser 4,6 mm, Dunkelraum 4 mm										
Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,2	0,25	0,4	0,7	0,9	1,2	2	3	3,2
ϱ in statischen Einheiten . .	−34	−17	0	17	20	20	19	14	8	0

Tabelle XXVI aus Fig. 9.

Röhrendurchmesser 4,6 mm, Dunkelraum 2 mm									
Abstand v. d. Kathode in mm	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	1	1,6	2	2,5
in statischen Einheiten . .	−53	0	33	50	50	33	20	10	0

Tabelle XXVII aus Fig. 10.

Röhrendurchmesser 2,7 mm, Dunkelraum 4,5 mm										
Abstand v. d. Kathode in mm	0,05	0,15	0,2	0,4	0,6	0,7	1	1,5	2	3
ϱ in statischen Einheiten . .	−134	−50	0	50	57	57	53	37	20	0

Tabelle XXVIII aus Fig. 11.

Röhrendurchmesser 2,7 mm, Dunkelraum 3 mm								
Abstand von den Kathoden in mm	0,05	0,1	0,4	0,5	0,6	1	1,5	2
ϱ in statischen Einheiten	−67	0	67	70	67	53	23	0

Aus den Tabellen ist ersichtlich, daß die Höchstwerte der positiven räumlichen Dichte in den untersuchten Fällen zwischen 5 und 70 elektrostatischen Einheiten liegen, während die negative räumliche Dichte bei weitem höhere Werte

hat. Weiterhin gilt, daß vor allem bei großen Dunkelraumlängen die räumliche positive Dichte vom Höchstwert der Feldstärke bis zur negativen Glimmschicht nur langsam abfällt, während die negative Ladungskurve sich stets rasch dem Werte Null nähert. Nehmen wir das elektrische Elementarquantum zu $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ statischen Einheiten an, so berechnet sich der Überschuß der spez. Zahl der positiven Ionen über diejenige der negativen im Kathodendunkelraum zu 10^{10}—10^{11}.

§ 9. Bedeutung der Resultate für die Kathodenschichtmethode zur Untersuchung des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.

Bei den Untersuchungen des Effektes des elektrischen Feldes auf Spektrallinien mit Hilfe der Kathodenschichtmethode kommt es darauf an, gleichzeitig große Feldstärke und große Lichtstärke zu erzielen. Große Feldstärke ist nötig, um eine starke Zerlegung der zu untersuchenden Spektrallinien zu erhalten, und eine große Lichtstärke verkürzt die Belichtungsdauer und erhöht die Schärfe der Bilder. Wie obige Tabellen zeigen, nimmt mit kleinerem Röhrendurchmesser die Feldstärke zu, während die Lichtstärke bei kleinerer Rohrweite abnimmt. Die Tabellen gestatten den Schluß, daß sich mit Röhren, deren Durchmesser zwischen 3 und 5 mm liegt, die besten Resultate erzielen lassen.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Universität Greifswald unter Leitung des Herrn Prof. Dr. J. Stark ausgeführt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochgeschätzten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Stark, für die bereitwilligst gewährte Anregung und Förderung der Arbeit, sowie Hrn. Dr. O. Hardtke für manchen praktischen Ratschlag meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Greifswald, Physikal. Institut der Universität, Februar 1919.

(Eingegangen 18. Februar 1919.)

---

6. *Die thermische Ausdehnung regulär kristallisierender fester Körper;* von *E. Grüneisen.*

[Zweite Mitteilung.[1])]

In der vorigen Mitteilung hatte ich das thermische Ausdehnungsgesetz für regulär kristallisierende feste Körper (l. c. Gl. 1 und f. S. Gl. 3) an der Erfahrung geprüft und gefunden, daß der Zahlenfaktor h bisweilen über den Wert $\gamma + \frac{1}{3}$ (l. c. Gl. 2 und 3) erhöht werden muß, der früher theoretisch abgeleitet worden war. Ursprünglich hatte ich die Absicht, auf eine Erklärung dieser Unstimmigkeit zu verzichten, da ich mir sagte, daß eine für tiefe Temperaturen aufgestellte Theorie fester Körper im Gebiet hoher Temperaturen nicht mehr genau zutreffen kann. Durch eine Arbeit von A. Müller[2]) und eine Unterredung mit Hrn. Born auf die Differenz zwischen meiner Ausdehnungsformel und derjenigen von Debye[3]) aufmerksam gemacht, habe ich indessen die zu meiner Formel führenden Rechnungen nochmals geprüft, die Differenz zwischen Debye und mir aufgeklärt und dabei gefunden, daß der Zahlenfaktor h sehr wohl größer sein kann, als $\gamma + \frac{1}{3}$. Hierdurch kommen Theorie und Erfahrung in bessere Übereinstimmung, weshalb eine kurze Darlegung der Rechnung wohl gerechtfertigt erscheint.

Das Debyesche Ausdehnungsgesetz[3]) fester Körper läßt sich schreiben

$$(1) \qquad \frac{\Delta}{v_0} = \frac{E_0}{Q_0 - a\,T\,Q_1 + \frac{b}{a} E_0},$$

1) Die erste Mitteilung findet sich in Ann. d. Phys. 55. p. 371 bis 386. 1918 (im folgenden mit l. c. bezeichnet).

2) A. Müller, Physik. Zeitschr. 17. p. 29. 1916.

3) P. Debye, Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1914, S. 36, Formel (34).

wo $$\Delta = v - v_0 \,,$$

$$E_0 = 9 N k T \left(\frac{T}{\Theta_0}\right)^3 \int_0^{\Theta_0/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \,,$$

$$Q_0 = \frac{v_0}{a x_0} = \left(\frac{C_v}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}}\right)_0 \,,$$

a und b aber als Konstanten der Reihenentwicklung

$$\Theta = \Theta_0 \left[1 - a\frac{\Delta}{v_0} + \frac{b}{2}\left(\frac{\Delta}{v_0}\right)^2 + \cdots\right]$$

definiert sind. Debye leitet Formel (1) ab aus der Zustandsgleichung

$$p + \frac{\Delta}{v_0 x_0} = -\frac{d\Theta}{dv} 9 N k \left(\frac{T}{\Theta}\right)^4 \int_0^{\Theta/T} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \,,$$

wofür wir auch schreiben können

$$p v + \frac{\Delta}{x_0}\left(1 + \frac{\Delta}{v_0}\right) = -\frac{d\log\Theta}{d\log v} E\left(\frac{\Theta}{T}\right) \,. \tag{2}$$

Der äußere Druck p wird als verschwindend klein angenommen.

Das von mir abgeleitete[1]) und früher (l. c.) an der Erfahrung geprüfte Ausdehnungsgesetz lautet

$$\frac{\Delta}{v_0} = \frac{E}{Q_0 - kE} \,, \tag{3}$$

wo $$k = \gamma + \tfrac{2}{3} \qquad \gamma = -\frac{d\log\Theta}{d\log v}$$

als konstant angenommen sind. Die zugrundeliegende Zustandsgleichung lautet

$$p v + G(v) = -\frac{d\log\Theta}{d\log v} E\left(\frac{\Theta}{T}\right) \,, \tag{4}$$

wo gesetzt ist

$$G(v) = \frac{\Delta}{x_0}\left[1 - (\gamma + \tfrac{2}{3})\frac{\Delta}{v_0}\right] \,. \tag{5}$$

Und zwar ergab sich dieser Ausdruck für $G(v)$ aus der Annahme anziehender und abstoßender, nach Potenzgesetzen wirkender Kräfte zwischen den Atomen. Es war

$$G(v) = n\frac{A}{v^n} - m\frac{B}{v^m} = \frac{\Delta}{x_0}\left[1 - \frac{m+n+1}{2}\frac{\Delta}{v_0} + \cdots\right] \,,$$

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 39. p. 257. Gl. (39). 1912.

woraus für $n = 1$ und mit Rücksicht auf

$$\gamma = \frac{3m + 2}{6}$$

in erster Näherung Gleichung (5) folgt.

Der Vergleich von (2) und (4) lehrt, daß schon in der Zustandsgleichung selbst eine Differenz zwischen Debye und mir besteht, welche daher rührt, daß Debye für die innere potentielle Energie bzw. für das zweite Glied auf der linken Seite von Gleichung (2) einen einfacheren Ausdruck gewählt hat als ich. Hierin liegt ein erster Grund für den Unterschied zwischen (1) und (3).

Ein zweiter Grund ist, daß ich γ als konstant annahm, während nach Debyes obigem Ansatz für Θ

$$\gamma = -\frac{d \log \Theta}{d \log v} = a + (a^2 + a - b)\frac{\Delta}{v_0} \tag{6}$$

zu setzen wäre. Es ist also, wenn wir uns auf den Boden der Debyeschen Annahme stellen, nur in erster Näherung $\gamma = a$ = konst.

Endlich habe ich in Formel (3) $E(\Theta/T)$ stehen lassen, während Debye $E(\Theta_0/T)$ eingeführt hat. Beide E unterscheiden sich aber um ein geringes infolge der Änderung von Θ mit v. Man hat angenähert

$$E\left(\frac{\Theta}{T}\right) = E\left(\frac{\Theta_0}{T}\right) + (\Theta - \Theta_0)\left(\frac{\partial E}{\partial \Theta}\right)_{\Theta_0}$$

oder

$$E\left(\frac{\Theta}{T}\right) = E\left(\frac{\Theta_0}{T}\right) + a\frac{\Delta}{v_0}(TC_v - E)_{\Theta_0}. \tag{7}$$

Wir wollen nun sehen, wie sich Formel (3) ändert, wenn wir, von der Zustandsgleichung (4) ausgehend, außer (5) auch (6) und (7) berücksichtigen. Für $p = 0$ folgt dann

$$\frac{\Delta}{\varkappa_0}\left[1 - (\gamma + \tfrac{2}{3})\frac{\Delta}{v_0}\right] = \left[a + (a^2 + a - b)\frac{\Delta}{v_0}\right] \cdot \left[E_0 + a\frac{\Delta}{v_0}(TC_v - E)_{\Theta_0}\right],$$

oder, bei Vernachlässigung kleinerer Glieder und Einführung von Q_0 an Stelle von $v_0/a\varkappa_0$,

$$\frac{\Delta}{v_0}\left[Q_0 - (\gamma + \tfrac{2}{3})Q_0\frac{\Delta}{v_0} - \left(a + 1 - \frac{b}{a}\right)E_0 - a(TC_v - E)_{\Theta_0}\right] = E_0.$$

In der Klammer darf $Q_0 \Delta / v_0$ durch E_0 und γ durch a ersetzt werden, womit wir erhalten

$$\frac{\Delta}{v_0} = \frac{E_0}{Q_0 - \left(a + \frac{1}{3} - \frac{b}{a}\right) E_0 - a T C_v} . \tag{8}$$

Es ergibt sich also ein Ausdehnungsgesetz, welches sich von (3) merklich unterscheidet. Der im Nenner von Q_0 abzuziehende Betrag kann, falls b gegen a klein ist, wesentlich größer sein als er nach (3) sein würde. Die neue Rechnung läßt einen schnelleren Anstieg des Ausdehnungskoeffizienten in hoher Temperatur zu als die alte, was wesentlich auf der Annahme (6) beruht und mit dem Experiment insofern stimmt, als bei der empirischen Auswertung von (3) b zuweilen größer gefunden wurde als $\gamma + \frac{1}{3}$.

Die auch jetzt noch zwischen Formel (3) und Debyes Formel (1) bestehen bleibende Differenz rührt nur von dem andern Ausdruck für die innere potentielle Energie her.

Von den in (3) vorkommenden vier Konstanten ist das in E_0 und C_v enthaltene Θ_0 aus dem Anstieg der Atomwärme bekannt, während Q_0 und a näherungsweise aus den Werten der Atomwärme, des Ausdehnungskoeffizienten, der Kompressibilität und des Atomvolumens für Zimmertemperatur abzuleiten sind. Dagegen ist b vollständig unbekannt und kann nur aus der *Änderung* der Ausdehnung mit der Temperatur empirisch bestimmt werden. Den betreffenden Rechnungen nach (3) steht an sich nichts im Wege, ich habe jedoch von einer Neuberechnung der Versuche abgesehen, da sich auch ohnedies Werte für b abschätzen lassen. Schreibt man nämlich (3) in der Form

$$\frac{\Delta}{v_0} = \frac{E_0}{Q_0 - \left(2a + \frac{1}{3} - \frac{b}{a}\right) E_0 - a(TC_v - E)\varepsilon_0} , \tag{8a}$$

so beträgt $TC_v - E$ nur einen Bruchteil von E, der mit dem Fortschreiten nach hohen Temperaturen, wo überhaupt erst die Zusatzglieder zu Q_0 an Bedeutung gewinnen, kleiner und kleiner wird (Tab. 1).

Wie man aus der bekannten graphischen Darstellung der C_v-Kurve ersieht, steigt das Glied $a(TC_v - E)$ in höherer Temperatur — etwa von $T = \Theta$ ab — nur noch langsam an und bleibt, wenigstens für höher schmelzende feste Körper,

ein kleiner Bruchteil des Nenners — für Al beim Schmelzpunkt etwa 1,7 Proz., für Cu 1 Proz., für Jr etwa $^1/_2$ Proz. von Q_0. Man kann also in erster Näherung von diesem Gliede ganz absehen, wodurch (8a) mit (8) konform wird, nur daß

Tabelle 1.

$T =$	$\frac{1}{2}\Theta$	Θ	2Θ	4Θ
$\frac{TC_v - E}{E} =$	0,87	0,41	0,20	0,09

die Bedeutung von k sich verändert hat. Die früher (l. c.) für verschiedene feste Körper aus (8) bestimmten Zahlen k wären nicht mehr gleich $\gamma + \frac{3}{8}$ bzw. $a + \frac{3}{8}$ zu setzen, sondern

$$k = 2a + \tfrac{3}{8} - \frac{b}{a}. \tag{9}$$

In Tab. 2 sind für alle festen Körper, wo die nötigen Daten bekannt sind, die aus dem Anstieg des Ausdehnungskoeffizienten nach (8) berechneten Konstanten k[1]), ferner die früher[2])

Tabelle 2.

	$k_{\text{beob.}}$	$a = \gamma$	$2a + \frac{3}{8}$	$\frac{b}{a}$
Aluminium . . .	2,7	2,06	5,8	+ 3,1
Kupfer	2,8	1,9$_8$	5,6	+ 2,8
Platin	4,8	2,3$_9$	6,5	+ 1,7
Gold	3,0	2,9$_8$	7,5	+ 4,5
Flußspat	5,5	1,78	5,2	− 0,3

berechneten $\gamma = a$ und die daraus abgeleiteten $2a + \frac{3}{8}$ verzeichnet, endlich die durch Differenzbildung nach (9) entstehenden b/a. Damit sind zum ersten Male Werte für die Debyesche Konstante b gewonnen worden. Ob den so bestimmten Größen b tatsächlich die durch die Reihenentwicklung für Θ gegebene Bedeutung zukommt, ist fraglich und hängt davon ab, ob die weitgehende Extrapolation der Theorie

1) l. c. Tab. 2, 4, 5, 6, 7.

2) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 39. p. 273. 1913; Referat auf dem 2. Solvay-Kongreß in Brüssel 1913, Tab. 8.

nach hohen Temperaturen berechtigt ist. Unmöglich erscheinen die in Tab. 2 gefundenen Zahlen für b nicht. Das mit einer nicht sehr schwer wiegenden Ausnahme vorkommende positive Vorzeichen für b würde bedeuten, daß die Änderung von Θ bei Volumverkleinerung größer ist, als bei gleicher Volumvergrößerung, eine Unsymmetrie, die auch von Debyes Theorie verlangt wird.

Für praktische Zwecke bleibt es, abgesehen vielleicht von festen Körpern mit niederem Schmelzpunkt und kleinem Q_0, bei denen auf (8a) zurückgegangen werden muß, bei dem durch Formel (8) gegebenen Ausdehnungsgesetz, nur daß b die in (9) gegebene Bedeutung annimmt. Bei der Unbekanntheit von b kann für b nur ein oberer Grenzwert vorausgesagt werden, $2a + \frac{1}{3}$, wofür in der Regel etwa 6 gesetzt werden kann.

(Eingegangen 7. Januar 1919.)

7. *Zur Verdampfungswärme des Wassers;* von F. Henning.

[Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.]

Die Werte für die Verdampfungswärme des Wassers, welche ich in den Jahren 1906 und 1909[1]) veröffentlichte, sind durch Umrechnungen der in Wattsekunden gemessenen Energie auf kalorisches Maß entstanden. Die elektrischen Messungen beruhen auf den elektrischen Einheiten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Die Umrechnung geschah unter der vorläufigen Annahme, daß eine Kalorie von 15° gleichwertig mit 4,188 Wattsekunden ist. Es wurde darauf hingewiesen, daß dieser Faktor, dessen endgültiger Wert noch nicht vorlag, bis zu 1 Promille fehlerhaft sein könne.

Inzwischen ist von den Herren Jaeger und v. Steinwehr[2]) die spezifische Wärme des Wassers zwischen 5° und 50° in denselben elektrischen Einheiten gemessen worden. Hiernach ist 1 $\text{Kal.}_{15} = 4{,}184_2$ Wattsekunden zu setzen. Somit ist es möglich, die endgültigen Werte der Verdampfungswärme L in kalorischem Maße mitzuteilen. Diese sind gegen die früheren Angaben um 0,91 Promille zu vergrößern und sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

t	L	t	L
30°	579,8	110°	532,6
40	574,5	120	525,8
50	569,0	130	518,7
60	563,4	140	511,4
70	557,6	150	504,2
80	551,6	160	497,0
90	545,5	170	489,8
100	539,1	180	482,7

1) F. Henning, Ann. d. Phys. 21. p. 849—878. 1906; 28. p. 441 bis 465. 1909.

2) W. Jaeger u. H. v. Steinwehr, Berl. Ber. 1915. p. 424—432.

Meine Berechnung (l. c.) des spezifischen Dampfvolumens v_1 nach der Chapeyron-Clausiusschen Gleichung

$$v_1 = \frac{AL}{t + 273} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dt}} - v_2$$

(dp/dt Temperaturkoeffizient des Sättigungsdruckes p, v_2 spezifisches Wasservolumen, A mechanisches Wärmeäquivalent) bleibt unverändert, da das Produkt AL von der Beziehung zwischen den elektrischen und kalorischen Größen unabhängig ist. Der Wert für das Dampfvolumen v_1 ist unter der Voraussetzung abgeleitet, daß das Joule der Reichsanstalt (das gleich dem internationalen Joule ist) mit dem wahren Joule $= 10^7$ Erg übereinstimmt, was mit hinreichender Annäherung zutrifft.

Charlottenburg, den 24. Januar 1919.

(Eingegangen 31. Januar 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen

und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

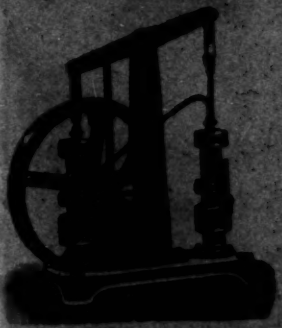
System Pfeiffer, D.R.P. — System Gaede, D.R.P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen. D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen. D.R.P.



Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

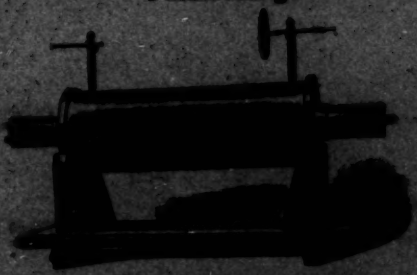
Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Hebenapparate.

Listen und Verlangen!